

同変コホモロジーと Chevalley-Koszul 複体 (Equivariant cohomology and the Chevalley-Koszul complex)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

M をコンパクト連結 Lie 群 G が作用する Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする. $\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底, $v^a \in S\mathfrak{g}^*$ をその双対基底に対応する対称代数の生成元とすると, Cartan 複体

$$(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\text{inv}}, \quad 1 \otimes d - \sum_a v^a \otimes \iota(e_a)$$

が M の同変コホモロジーを与えることはよく知られている. $\{c_j\}$ を $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の primitive な生成元, $\{p^j\}$ をその双対基底に Chevalley's transgression theorem によって対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の生成元とすると, Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した.

主張 1. より “小さい” 複体

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes \Omega(M)_{\text{inv}}, \quad 1 \otimes d - \sum_j p^j \otimes \iota(c_j)$$

が Cartan 複体と擬同型である. つまりこの複体は M の同変コホモロジーを与える. □

彼らがどのようにしてこの主張を発見したかを思い出す. $\pi : P \rightarrow B$ を主 G -束とすると, Chevalley と Koszul により, 複体

$$\Omega(B) \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j),$$

は P の不変な微分形式による複体 $\Omega(P)_{\text{inv}}$ と擬同型であることが示されている. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した.

主張 2. 下に有界な DG(differential graded) $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の圏において、上の主張は成り立つ。

そして下に有界な DG $(Sg^*)_{\text{inv}}$ -加群と $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の圏の間に成り立つ Koszul 双対性を用いれば、主張 2 から主張 1 が導かれることを彼らは見出した。ただし Maszczyk-Weber [6] が [2] の主張 2 の証明にギャップがあることを指摘し、新たに証明を与えた。しかし Alekseev-Meinrenken [1] によって新しい証明にもギャップがあることを指摘されたが、彼らは主張 1 に新たな証明を与え、その“小さい”複体を小 Cartan 複体と名付けた。[1] における証明は前の二つとは異なり、Koszul 双対性を用いずに直接主張 1 を示したのだが、次の二点で優れている。まず主張 1 を擬同型ではなく、ホモトピー同値まで示しているのである。次に G が作用する多様体の微分形式の空間の一般化として g -微分空間を定義して、任意の g -微分空間に対して主張 1 を示した。微分形式は下に有界な g -微分空間であるから、有界条件を外したのである。以上をまとめると Alekseev-Meinrenken が示したことは次である。

主張 3 ([1, Theorem 4.2]). 任意の g -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して、 $\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体 $(Sg^*)_{\text{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\text{inv}}$ は $\mathcal{M}$ の Cartan 複体 $(Sg^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}$ と、DG $(Sg^*)_{\text{inv}}$ -加群の圏において、ホモトピー同値である。

一方 Alekseev-Meinrenken [1] は主張 2 の一般化である次の主張 4 を述べ、主張 3 と 4 が Koszul 双対性により関係することを示した。 $Wg := Sg^* \otimes \wedge g^*$ を Weil 代数とする。主 G -束 $P \rightarrow B$ に対して $\Omega(P)$ は、Chern-Weil 理論により、 Wg -加群になることから、 $\Omega(P)$ の一般化として g -微分 Wg -加群を考える。そして任意の g -微分 Wg -加群 $\mathcal{N}$ に対して、彼らは複体

$$\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota(c_j),$$

を導入し Chevalley-Koszul 複体と呼んだ。

主張 4 ([1, Theorem 5.5]). 任意の g -微分 Wg -加群 $\mathcal{N}$ に対して、 $\mathcal{N}$ の Chevalley-Koszul 複体は $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ と、DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の圏において、ホモトピー同値である。

しかし [1] の主張 4 の証明にはギャップがあることがわかった。本稿では主張 4 に新しい証明を与える。この主張と Koszul 双対性を使えば、下に有界な g -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して、 $\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることが従う。ただし Koszul 双対性を使ったことにより、ホモトピーに関する情報と有界条件が失われていることがわかる。それを解消するため、本稿では有界条件を保つ Lefèvre [5] の圏同値を用いる。

DG $(Sg^*)_{\text{inv}}$ -加群の圏 $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$ がモデル圏になることはよく知られている。モデル圏は, fibration, cofibration, そして弱同値と呼ばれる射からなる特別な3つのクラスをもつことを思い出すと, 例えば $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$ においては, 弱同値のクラスとして擬同型からなるクラスを定義すればよい。さらに Lefèvre [5] は cocomplete DG $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の圏 $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ がモデル圏になることを示した。 $\mathcal{C}$ をモデル圏とすると, そのホモトピー圏 $\text{Ho}(\mathcal{C})$ とは弱同値のクラスでの局所化と定義する。 Lefèvre [5] は, モデル圏の強力な道具立てを用いて, $\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}$ と $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ のホモトピー圏が同値であることを示した。つまり,

$$\text{Ho}(\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}) \simeq \text{Ho}(\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}).$$

が成り立つ。ここで DG 空間は下に有界であることを仮定していないことを注意しておく。

本稿では次を示す。

主張 5. 任意の g -differential Wg -module $\mathcal{N}$ に対して, cocomplete DG $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の圏において, 弱同値 $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$ が存在する。

そして Lefèvre によって得られた圏同値により, 主張 3 と 5 が関係することを示す。特に, 主張 5 と Lefèvre の圏同値を使えば, g -微分空間 $\mathcal{M}$ (下に有界であることを仮定しない) に対して, $\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることがわかる。

2 g -微分空間

$(g, [\cdot, \cdot]_g)$ を標数 0 の体 F 上の Lie 代数とする。

定義 2.1. g -空間とは DG 空間 $(\mathcal{M}, d^{\mathcal{M}})$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}} : g \rightarrow \text{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi \in g$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, -1 ,
- $[d^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_g)$,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$.

□

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とすると、 $\mathcal{M}_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\mathcal{M}_{\text{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$, そして $\mathcal{M}_{\text{basic}} := \mathcal{M}_{\text{inv}} \cap \mathcal{M}_{\text{hor}}$ とおく. $\square$

$\wedge \mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の外積代数として、その次数を

$$(\wedge \mathfrak{g}^*)^i := \wedge^i \mathfrak{g}^*,$$

と定める. また $S\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の対称代数として、その次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0$$

と定める. $\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底, $\{e^a\}$ をその双対基底とする. 以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と表すことにする.

例 2.3. (a) G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\mathfrak{g}$ -微分空間の典型例は M 上の微分形式からなる空間 $\Omega(M)$ である. ただしその Lie 微分と contraction は G の作用の infinitesimal generator によるものとする.

(b) 外積代数 $\wedge \mathfrak{g}^*$ は余随伴表現 $L^\wedge$, contraction $\iota^\wedge(\xi)$, そして微分

$$d^\wedge := \frac{1}{2} \sum_a y^a L^\wedge(e_a)$$

を考えることにより $\mathfrak{g}$ -微分空間になる. $\square$

ここから $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数と仮定する. $\mathfrak{g}$ の外積代数 $\wedge \mathfrak{g}$ の次数は

$$(\wedge \mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i \mathfrak{g}, \quad (\wedge \mathfrak{g})^i := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定める. $\wedge \mathfrak{g}$ と $\wedge \mathfrak{g}^*$ の間の非退化な pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて、微分 $\partial : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$ を

$$\langle d^\wedge X, Y \rangle = \langle X, \partial Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

によって定義する. 同様に contraction $\iota^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\wedge \mathfrak{g})$ を

$$\langle \xi \cdot X, Y \rangle = \langle X, \iota^*(\xi)Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

で定義する. $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$ を Schouten 括弧とすると、微分 ∂ と $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$ を考えれば ($\wedge \mathfrak{g}$ ではなく) $(\wedge \mathfrak{g})[1]$ が DG Lie 代数になることを注意しておく. ここで $(\wedge \mathfrak{g})[1]$ は $(\wedge \mathfrak{g})[1]^i := (\wedge \mathfrak{g})^{i+1}$ なる次数付き空間とする.

$(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ を $\wedge \mathfrak{g}$ の随伴表現による不変部分空間とする. $\mathfrak{g}$ は簡約 Lie 代数であるから, $\wedge \mathfrak{g}$ と $\wedge \mathfrak{g}^*$ の間の pairing は $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ と $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の間の非退化な pairing に制限される. これより $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の積が $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ の余積 Δ を導く. $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ が primitive であるとは

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする. $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ においても primitive な元を同様に定義する. $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ をそれぞれ $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の primitive な元からなる部分空間とすると, よく知られているように, $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ と $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の間の pairing は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^*$ の間の pairing に制限される. よって $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間になるので, $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

$L^S(\xi)$ は余随伴表現を $S\mathfrak{g}^*$ の次数 0 の derivation に拡張したものととして, その不変部分空間を $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ と表す. Chevalley's transgression theorem によって c^j に対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ の元を p^j と表す (例えば [1] 参照). $\deg p^j = \deg c^j + 1$ であることを注意しておく.

3 Chevalley-Koszul 複体

$\mathfrak{g}$ -微分代数とは次数付き結合代数 $\mathcal{A}$ であり, $\mathfrak{g}$ -微分空間の構造を持ち $d, L(\xi)$ そして $\iota(\xi)$ がその積に関して derivation になるものとする. $\mathfrak{g}$ -微分 $\mathcal{A}$ -加群とは $\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{N}$ であり, $\mathfrak{g}$ -微分空間の準同型写像 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ をもつものとする.

例 3.1. Weil 代数 $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$ において, Lie 微分として $L^W(\xi) := L^S(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$, contraction として $1 \otimes \iota^\wedge(\xi)$, そして微分として

$$d^W := \sum_a (1 \otimes y^a) L^W(e_a) - 1 \otimes d^\wedge + \sum_a y^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定めれば $\mathfrak{g}$ -微分代数となる. □

任意の $\mathfrak{g}$ -微分 $W\mathfrak{g}$ -加群 $\mathcal{N}$ に対して, horizontal projection

$$P_{\text{hor}} := \prod_a \iota^\mathcal{N}(e_a) y^a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{hor}}$$

が構成できる. 定義から P_{hor} は $S\mathfrak{g}^*$ の作用と $L^\mathcal{N}(\xi)$ と可換である. $d_{\text{hor}} := P_{\text{hor}} \circ d^\mathcal{N}$ とすると, d_{hor} は derivative であり, 任意の $x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$ に対して, $d_{\text{hor}} x = (d - \sum_a y^a L^\mathcal{N}(e_a)) x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$ が成り立つことを注意しておく. また $\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$ 上の次数 0 の自己準同型写像

$$\alpha := \sum_a \iota^\mathcal{N}(e_a) \otimes y^a, \quad \beta := \sum_a y^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定める. α, β は nilpotent であるから e^α, e^β は有限和となる.

[1] における Proposition 5.3 にはギャップがあるので, 次のように修正する.

命題 3.2. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ -微分 $W\mathfrak{g}$ -加群とする. $\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$ を

$$1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a) - \sum_a (1 \otimes y^a) L(e_a), \quad (1)$$

を微分とする DG 空間と考える. ここで $L(\xi) := L^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$. このとき

$$e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : \mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{N}, \quad x \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$$

は DG 空間の同型写像になる. □

証明. まず

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^\alpha)(1 \otimes \iota^\wedge(\xi)) &= 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) + [\alpha, 1 \otimes \iota^\wedge(\xi)] + \frac{1}{2}[\alpha, [\alpha, 1 \otimes \iota^\wedge(\xi)]] + \dots \\ &= \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

同様に

$$\text{Ad}(e^{-\beta})(\iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1) = \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi).$$

よって

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \\ \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \iota^\mathcal{N}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) & & \downarrow 1 \otimes \iota^\wedge(\xi) \\ \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \end{array}$$

が可換であることがわかる. $\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker(1 \otimes \iota^\wedge(\xi)) = \mathcal{N} \otimes \mathbb{F} = \mathcal{N}$ に注意すると, 2つの同型写像

$$\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \xrightarrow{e^{-\beta}} (\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}} \xrightarrow{e^{-\alpha}} \mathcal{N}$$

を得る. $(\mathcal{N} \otimes \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}}$ において, $e^{-\alpha} = \prod_a (1 - \iota^\mathcal{N}(e_a) \otimes y^a)$ は

$$1 \otimes \prod_a (1 - y^a \iota^\wedge(e_a)) = 1 \otimes \prod_a \iota^\wedge(e_a) y^a = 1 \otimes P_{\text{hor}}^\wedge$$

と一致する. これから $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}(x \otimes \eta) = (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$ であることがわかる. □

$$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

とする. d_g を微分 (1) の $K_g(\mathcal{N})$ への制限とする. つまり

$$d_g = 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a).$$

$K_g(\mathcal{N})$ は微分を d_g , $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群構造を $(-1)^{|\cdot|}(1 \otimes \iota^\wedge(c))$ とする DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群と考える. ここで $\iota^\mathcal{M} : g \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$ を代数の準同型写像 $\iota^\mathcal{M} : \wedge g \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$ に拡張しておく. 一方 $\mathcal{N}$ を g -微分 W_g -加群とすれば, $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ は DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群になる. ただし $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群構造は $\iota^\mathcal{N}(c)$ とする. α, β は $L(\xi)$ と可換であるから, e^α, e^β も $L(\xi)$ と可換である. よって $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$ の $K_g(\mathcal{N})$ への制限が DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であることがわかる. つまり $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$ の制限も同じ記号で書くと,

$$d^\mathcal{N} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} = e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_g \quad (2)$$

が成り立つ.

定義 3.3. $\mathcal{N}$ を g -微分 W_g -加群とする. $\mathcal{N}$ の Chevalley-Koszul 複体とは DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群

$$\tilde{K}_g(\mathcal{N}) := \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_g := d^\mathcal{N} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j),$$

である. ただし $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群構造は $1 \otimes \iota^\wedge(c)$ と定める. $\square$

$\tilde{K}_g(\mathcal{N})$ と $K_g(\mathcal{N})$ を結び付けるため, Alekseev-Meinrenken [1] に倣って, ある Maurer-Cartan-型方程式を考える. $(\wedge g)^- := \bigoplus_{i>0} \wedge^i g$ とするとき, Alekseev-Meinrenken は次を示した ([1, Theorem 3.6] 参照):

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge g} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \quad (3)$$

は次数 0 の canonical な解 $f \in (Sg^* \otimes (\wedge g)^-)_{\text{inv}}$ が存在する. ここで $\wedge g$ における微分 ∂ , Schouten 括弧 $[\cdot, \cdot]_{\wedge g}$ を

$$\partial(p \otimes y) := p \otimes \partial y, \quad [p \otimes y, p' \otimes y']_{\wedge g} := pp' \otimes [y, y']_{\wedge g}.$$

と定義することにより $(Sg^* \otimes (\wedge g)^-)_{\text{inv}}$ 上に拡張する. 以下では (3) の解 $f \in (Sg^* \otimes (\wedge g)^-)_{\text{inv}}$ をひとつ固定しておく. また $f = \sum_i f'_i \otimes f''_i \in (Sg^* \otimes (\wedge g)^-)_{\text{inv}}$ に対して, $(N_{\text{hor}} \otimes \wedge g^*)_{\text{inv}}$ 上に $\iota(f)$ を

$$\iota(f)(x \otimes \eta) := \sum_i f'_i x \otimes \iota^\wedge(f''_i) \eta.$$

で定義する. f は nilpotent であるから, $e^{\iota(f)} : (N_{\text{hor}} \otimes \wedge g^*)_{\text{inv}} \rightarrow K_g(\mathcal{N})$ は有限和であることを注意しておく.

$K'_g(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge g^*)_{\text{inv}}$ は微分, $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群構造を, それぞれ

$$d'_g := e^{-\iota(f)} \circ d_g \circ e^{\iota(f)}, \quad (-1)^{|c|} (1 \otimes \iota^\wedge(c)).$$

と定めた DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群と考える.

ここで

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge g}) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f) L^\wedge(e_a)$$

となる ([1, Lemma 2.2] 参照). (3) の解 f を用いれば

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f) L^\wedge(e_a).$$

であり, $K_g(\mathcal{N})$ の微分が $d_g = 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$, であつたことを思い出せば,

$$\begin{aligned} e^{-\iota(f)} \circ d_g \circ e^{\iota(f)} &= d_g - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f) L^\wedge(e_a) \\ &= 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f) L^\wedge(e_a) \end{aligned} \quad (4)$$

が成り立つことがわかる.

次の写像

$$\tilde{i} : \tilde{K}_g(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_g(\mathcal{N}) \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|} z \otimes \eta.$$

を定義する. $x \in \mathcal{N}_{\text{basic}}$ に対しては $d_{\text{hor}} x = d^{\mathcal{N}} x$ であることに注意すれば

$$d'_g \circ \tilde{i} = \tilde{i} \circ \tilde{d}_g \quad (5)$$

がわかる. よつて $\tilde{i}$ はコチェイン写像である. さらに $\tilde{i}$ は DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像であることがわかる.

定義から $e^{\iota(f)} : K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow K_g(\mathcal{N})$ は DG $(\wedge g)_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であるから, 写像 Ψ を次の合成

$$\tilde{K}_g(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{i}} K'_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{\iota(f)}} K_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}} \mathcal{N}_{\text{inv}},$$

とすれば, Ψ はコチェイン写像である. 実際, (2) と (5) によつて

$$\begin{aligned} \Psi \circ \tilde{d}_g &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \circ \tilde{d}_g \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ d'_g \circ \tilde{i} \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_g \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \\ &= d^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} = d^{\mathcal{N}} \circ \Psi. \end{aligned}$$

明らかに Ψ は $DG(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像である。 Ψ は $z \otimes \eta$ を $(-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$ にうつすので、 Ψ は [1] で定義されたものと似ている。しかし、ともに3つの写像の合成なのだがそのうちの2つが異なるため、これら2つは異なることを注意しておく。

さらに次を得るが、この証明は [1] の Theorem 4.2 の証明と平行である。

定理 3.4. $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数、 $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ -微分 $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする。このとき

$$\Psi : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$$

は $DG(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群としてホモトピー同値写像である。 $\square$

証明. $e^{\iota(f)} : K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ と $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$ は同型写像であるから、 $\tilde{i} : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ がホモトピー同値写像であることを示せばよい。つまり $\tilde{i}$ の homotopy inverse $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ を構成すればよい。

$\mathfrak{g}$ は簡約 Lie 代数であるから、 $\mathfrak{g}$ 上に不変な内積 B を定める。 B によって定まる同型写像を $B^{\sharp} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ として、 $\wedge \mathfrak{g}^*$ の Casimir 作用素 $\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}$ を $\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge} := \sum_a L^{\wedge}(B^{\sharp}(e^a)) \circ L^{\wedge}(e_a)$ と定義する。よく知られているように $\wedge \mathfrak{g}^* = \ker(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}) \oplus \text{im}(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge})$, $\ker(\text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge}) = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ である。さらに $\mathcal{L}_0$ を $1 \otimes \text{Cas}_{\mathfrak{g}}^{\wedge} \in \text{End}(\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)$ の $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ への制限とすると $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}_0) \oplus \text{im}(\mathcal{L}_0)$, $\ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ である。 Π_0 を $\text{im}(\mathcal{L}_0)$ に沿った $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ から $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ への射影、 $\mathcal{G}_0$ を $\mathcal{L}_0$ に関する Green 作用素とする。つまり $\mathcal{G}_0 \circ \Pi_0 = 0$, $\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 = 1 - i \circ \Pi_0$ 。ここで $i : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ は自然な包含写像とする。

$K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ 上で

$$h := \sum_a 1 \otimes \iota^{\wedge}(B^{\sharp}(e^a)) \circ L^{\wedge}(e_a)$$

を考える。そして $\mathcal{L} := [d'_{\mathfrak{g}}, h]$ とおく。明らかに $\mathcal{L}$ はコチェイン写像である。さらに $\ker \mathcal{L} = \ker \mathcal{L}_0$ であることが次のようにわかる: $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}$ を $\wedge^j \mathfrak{g}$ の全ての元の contraction で 0 になる元からなる部分空間とすると、filtration

$$0 = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(0)} \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(1)} \subset \cdots \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = \wedge \mathfrak{g}^*$$

を得る。さらに $L^{\wedge}(\xi)((\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}) \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}$ であるから $K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(j)} := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)})_{\text{inv}}$ は well-defined. よって filtration

$$0 = K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(0)} \subset K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(1)} \subset \cdots \subset K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$$

を得る. (4) より $\mathcal{L}$ において $[1 \otimes d^\wedge, h]$ 以外の全ての項は filtration の次数を少なくとも 1 つ下げることがわかる. $K'_g(\mathcal{N})$ において

$$[1 \otimes d^\wedge, h] = \sum_a 1 \otimes L^\wedge(B^\sharp(e^a))L^\wedge(e_a) = 1 \otimes \text{Cas}_g^\wedge = \mathcal{L}_0,$$

であるから $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + R$ と表すことができる. ただし R は filtration の次数を下げる. $h \circ i \circ \Pi_0 = 0$ から $\mathcal{L} \circ i \circ \Pi_0 = 0$ を得るが, さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L} \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 \circ (1 - i \circ \Pi_0) + R \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 + R \circ \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 \\ &= (1 + R \circ \mathcal{G}_0) \circ \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

が成り立つ. $R \circ \mathcal{G}_0$ は filtration の次数を下げるので, $1 + R \circ \mathcal{G}_0$ は可逆. よって $\ker(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$. 以上のことにより $K'_g(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}) \oplus \text{im}(\mathcal{L})$, $\ker(\mathcal{L}) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$ を得る.

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{L}$ に関する Green 作用素, i.e., $\mathcal{G} \circ i \circ \Pi = 0$, $\mathcal{G} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{G} = 1 - i \circ \Pi$ とする. ここで Π は $\text{im}(\mathcal{L})$ に沿った $K'_g(\mathcal{N})$ から $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$ への射影とする. $\mathcal{G}$ はコチェイン写像であるから, $H := h \circ \mathcal{G}$ は $[d'_g, H] = 1 - i \circ \Pi$ を満たす. よって $\tilde{\Pi} : K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$ を

$$\tilde{\Pi}(z \otimes \eta) := (-1)^{|\eta|} \Pi(z \otimes \eta)$$

と定義すれば $1 - i \circ \tilde{\Pi} = 1 - i \circ \Pi = [d'_g, H]$ が成り立つ. ゆえに $\tilde{\Pi}$ が求める準同型写像である. $\square$

4 小 Cartan 複体

4.1 小 Cartan 複体

定義 4.1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. $\mathcal{M}$ の Cartan 複体とは $\text{DG}(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv-}}$ 加群

$$C_g(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}}, \quad d_g^C := 1 \otimes d^\mathcal{M} - \sum_a v^a \otimes \iota^\mathcal{M}(e_a),$$

であり, そのコホモロジー $H_g(\mathcal{M}) := H(C_g(\mathcal{M}), d_g^C)$ が $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの Cartan モデルと呼ばれる. $\square$

注意 4.2. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とする. G をコンパクト連結 Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用している多様体とする. このとき古典的な結果として $H_g(\Omega(M))$ は M の同変 (Borel) コホモロジーと同型である. $\square$

定義 4.3. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. $\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体とは $\mathrm{DG} (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ -加群

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}}^C := 1 \otimes d^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j),$$

であり, そのコホモロジー $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{d}_{\mathfrak{g}}^C)$ が同変コホモロジーの小 Cartan モデルと呼ばれる. $\square$

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であると主張した. Maszczyk-Weber [6] により [2] におけるその証明にはギャップが指摘されたが, Alekseev-Meinrenken [1] は次を示した.

定理 4.4 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数, $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$ -微分空間とする. 方程式 (3) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して, 合成写像

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は $\mathrm{DG} (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ -加群としてホモトピー同値写像である. 特に, これは同型写像 $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を導く. $\square$

[2], [6], そして [1] において指摘されているように, この定理と Koszul 双対性を使えば, 下に有界な $\mathfrak{g}$ -微分 $W_{\mathfrak{g}}$ -加群 $\mathcal{N}$ に対して, $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ と $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ が擬同型であることがわかる. 逆に, 定理 3.4 と Koszul 双対性を使えば, 下に有界な $\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して, $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることがわかる. これより, Koszul 双対性を使えば, ホモトピーの情報と有界条件を失うことがわかる. そのため本稿では, Lefèvre [5] によって得られた有界条件を保つ圏同値を用いる.

4.2 Lefèvre の圏同値

この節では Lefèvre [5] によって得られた結果を復習する. [4] に良い解説があることを注意しておく.

A を augmented DG 代数とし, d^A を微分, $\mu^A : A \otimes A \rightarrow A$ を積, そして $\varepsilon^A : A \rightarrow \mathbb{F}$ を augmentation とする. C を cocomplete augmented DG 余代数とし, d^C を微分, $\Delta^C : C \rightarrow C \otimes C$ を余積, そして $\varepsilon^C : \mathbb{F} \rightarrow C$ を augmentation とする. ここで余代数 C が cocomplete であるとは, C が

$$C \rightarrow C^{\otimes n} \rightarrow (C/\mathbb{F})^{\otimes n}, \quad n \geq 2,$$

の kernel の和集合と一致することとする. ただし最初の写像は余積を n 回繰り返したものの, 最後の写像は標準的な射影とする. $\tau : C \rightarrow A$ を

twisting cochain とする. つまり次数 1 の $\mathbb{F}$ -線型写像であり,

$$d^A \circ \tau + \tau \circ d^C = \mu^A \circ (\tau \otimes \tau) \circ \Delta^C, \quad \varepsilon^A \circ \tau \circ \varepsilon^C = 0$$

を満たすものとする. DG 右 A -加群 L に対して, $1 \otimes \Delta^C$ を余積,

$$d^L \otimes 1 + 1 \otimes d^C + (\mu^L \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta^C).$$

を微分とする cocomplete DG 右 C -余加群 $L \otimes C$ を構成し, $L \otimes_\tau C$ と表すことにする. このとき, $\text{Mod } A$ を DG 右 A -加群の圏, $\text{Comc } C$ を cocomplete DG 右 C -余加群の圏とすると, 関手

$$? \otimes_\tau C : \text{Mod } A \rightarrow \text{Comc } C$$

を得ることがわかる. 同様にして, cocomplete DG 右 C -余加群 M に対して,

$$d^M \otimes 1 + 1 \otimes d^A - (1 \otimes \mu^A) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta^M \otimes 1).$$

を微分とする DG 右 A -加群 $M \otimes A$ が構成でき, $M \otimes_\tau A$ と表す. このとき関手

$$? \otimes_\tau A : \text{Comc } C \rightarrow \text{Mod } A.$$

を得る. Lefèvre は $(? \otimes_\tau C, ? \otimes_\tau A)$ が随伴関手の組であることを示した ([5, Lemme 2.2.1.2] 参照).

以下では $\tau : C \rightarrow A$ は acyclic であると仮定する. つまり adjunction morphism $(A \otimes_\tau C) \otimes_\tau A \rightarrow A$ が擬同型写像であるとする. よく知られているように, $\text{Mod } A$ は擬同型写像を弱同値, 全射準同型写像を fibration と定めるとモデル圏になる. Lefèvre は次を示した.

定理 4.5 ([5, Théorème 2.2.2.2]). (a) $\text{Comc } C$ は $f \otimes_\tau A$ が擬同型となる射 f を弱同値, 単射準同型写像を cofibration と定めるとモデル圏になる.

(b) 関手 $? \otimes_\tau C, ? \otimes_\tau A$ は quasi-inverse equivalence

$$\text{Ho}(\text{Mod } A) \rightleftarrows \text{Ho}(\text{Comc } C),$$

を導く. ここでモデル圏 C に対して, ホモトピー圏 $\text{Ho}(C)$ とは弱同値のクラスによる局所化とする. $\square$

$A = (Sg^*)_{\text{inv}}, C = (\wedge g^*)_{\text{inv}}$ とする. よく知られた結果を 2 つ復習する. まず $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ における primitive な元からなる部分空間 $\mathcal{P}^*$ に対して, $(\wedge g^*)_{\text{inv}} \cong \wedge \mathcal{P}^*$ が成り立つ. 次に $\tilde{\mathcal{P}}^* := \mathcal{P}^*[-1]$ を transgression により

$(Sg^*)_{\text{inv}}$ の部分空間と同一視すると, $(Sg^*)_{\text{inv}} \cong S\tilde{P}^*$ が成り立つ. 以上に注意して,

$$\tau : (\wedge g^*)_{\text{inv}} \cong \wedge P^* \rightarrow P^* \rightarrow S\tilde{P}^* \cong (Sg^*)_{\text{inv}}$$

と定義する. ここで $\wedge P^* \rightarrow P^*$ は自然な射影, $P^* \rightarrow S\tilde{P}^*$ は transgression とする. このとき τ は acyclic twisting cochain になる. よって定理 4.5(b) により, $? \otimes_{\tau} (\wedge g^*)_{\text{inv}}, ? \otimes_{\tau} (Sg^*)_{\text{inv}}$ は圏同値

$$\text{Ho}(\text{Mod}(Sg^*)_{\text{inv}}) \simeq \text{Ho}(\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}) \quad (6)$$

を導くことがわかる.

4.3 Chevalley-Koszul 複体との関係

Δ を $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ の余積とすると, $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}$ は $1 \otimes \Delta$ を余積とする cocomplete DG $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群になる. 一方, 定理 3.4 の用語を用いて, 写像 $\Upsilon : \mathcal{N}_{\text{inv}} \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$ を合成写像

$$\mathcal{N}_{\text{inv}} \xrightarrow[\sim]{e^{\beta} \circ e^{\alpha}} K_g(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\iota(f)}} K'_g(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \tilde{K}_g(\mathcal{N})$$

として定義する. このとき合成写像

$$\mathcal{N}_{\text{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{1 \otimes \Delta} \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}} \xrightarrow{\Psi \otimes 1} \mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (\wedge g^*)_{\text{inv}}.$$

は $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ の余積となることがわかる. よって $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ は cocomplete DG $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群になる. $\Upsilon \circ \Psi = 1$ が成り立つことに注意すると, Ψ, Υ は DG $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ -余加群の準同型写像になることがわかる. さらに定理 3.4 より Ψ, Υ が擬同型であることも従う. 以下では Ψ, Υ が $\text{Comc}(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ において弱同値であることを示す.

filtered C -余加群 M が admissible であるとは, filtration $\{M^i\}$ が exhaustive, かつ $M^0 = 0$ を満たすとする. Lefèvre は次を示した.

補題 4.6 ([5, Lemme 2.2.2.5]). cocomplete augmented DG 余代数 C が $C^0 = \mathbb{F}$ である exhaustive filtration $\{C^i\}$ をもつならば, admissible filtered DG C -余加群の間の擬同型は弱同値になる. $\square$

$C^j := \bigoplus_{i \leq j} (\wedge^i g^*)_{\text{inv}}$ とすれば, $(\wedge g^*)_{\text{inv}}$ 上に exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \dots \subset C^{\dim g} = (\wedge g^*)_{\text{inv}}$$

を得る. $\mathcal{P}$ を $(\wedge g)_{\text{inv}}$ の primitive な元からなる部分空間として, F^j を $\wedge^j \mathcal{P}$ の全ての元の contraction で 0 になる元からなる $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$ の部分空間とする. このとき $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$ 上に exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \dots \subset F^{\dim \mathcal{P}+1} = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$$

を得る. 同様に $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ 上にも $(F')^0 = 0$ である exhaustive filtration $\{(F')^j\}$ を得る. よって, filtered $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -余加群 $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$, $\mathcal{N}_{\text{inv}}$ はともに admissible. 定義から Ψ, Υ が filtration を保つことは従うので, 補題 4.6 により次が成り立つ.

定理 4.7. $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数, $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ -微分 $W\mathfrak{g}$ -加群とする. このとき

$$\Psi : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|} (e^{\iota(f)} \eta) \cdot z$$

は cocomplete DG $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -comodules としての弱同値である. $\square$

これと定理 4.5 (a) から, 任意の $\mathfrak{g}$ -微分 $W\mathfrak{g}$ -加群 $\mathcal{N}$ に対して, DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -加群としての擬同型写像

$$\Psi \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} : \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad (7)$$

を得る. ここで, 簡単のため, $\otimes_{\tau}$ の代わりに $\otimes$ と表す.

$\sim$ を $\text{Mod } (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ における擬同型を表すことにすると, 任意の $\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &\cong \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\sim (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\sim (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\cong (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \\ &\sim (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\text{inv}} \\ &= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ の acyclicity から導かれ, 次の $\sim$ は擬同型写像 (7) から得られ, そして最後の $\sim$ は圏同値 (6) からわかる. $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ 上の余積は $\gamma := \sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j) \otimes c_j$ を用いて

$$\mathcal{M}_{\text{inv}} = \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes \mathbb{F} \xrightarrow{e^{\gamma}} \mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}},$$

と定義すれば, 関手 $? \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ は $\mathcal{M}_{\text{inv}}$ を $\mathcal{M}_{\text{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ にうつすが, その微分は $d^{\mathcal{M}} \otimes 1 - \sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j) \otimes p_j$ となることを注意しておく. 以上のことにより, 任意の $\mathfrak{g}$ -微分空間 $\mathcal{M}$ に対して (ここで下に有界な仮定は必要ではない), $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型であることがわかる. 逆に, この主張と圏同値 (6) を用いれば直ちに定理 4.7 が従う.

参考文献

- [1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.
- [2] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.
- [3] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [4] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.
- [5] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ catégories*, math.CT/0310337.
- [6] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.