

sine-Gordon 型非線型微分方程式の準周期解について

阪大 理 伊達悦朗

1. このノートでは、主として、次の二つの方程式

(1) sine-Gordon 方程式

$$u_{\xi\eta} + \sin u = 0, \quad u = u(\xi, \eta),$$

(2) Pohlmeyer, Lund-Regge の system の方程式

$$u_{\xi\eta} - \frac{v_3 v_\eta \sin(\frac{u}{2})}{2 \cos^3(\frac{u}{2})} + \sin u = 0, \quad u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta)$$

$$v_{\xi\eta} + \frac{u_3 v_\eta + u_\eta v_3}{\sin u} = 0$$

の準周期解について考える。

これらの二つの方程式はいずれも、パラメーターを含む線型微分方程式系の可積分条件として表わされ、その線型作用素の散乱理論を用いることにより、多重ソリトン解、保存則等が求められている。(散乱の逆問題の方法)。これらの方程式の、散乱の逆問題の方法の立場から見た背景等については [] で若干述べた。

準周期解に関する結果としては、方程式 (1) については、Kozel-Kotlyarov [9], Its [8], McKean [10], Cherednik [2.3] があり、方程式 (2) については [6] で述べた。

ここでは、次の点について述べる。

- (A) 方程式 (2) において、 $v = \text{定数}$ の場合、方程式 (2) は方程式 (1) に帰着するが、この事情は、準周期解のクラスでは、超楕円曲線の、ある fixed point free involution に対応していること。
- (B) 方程式 (1) に関する Kozel-Kotlyarov, Its, McKean のいずれの結果においても、リーマン面上の二価関数が見られているが、この事実の解釈を (A) で述べる fixed point free involution と関連づけて示えること。
- (C) これは、より一般的な性格を持った問題であるが、リーマン面から出発して準周期解を構成する場合、得られる解は、一般には複素数値であるが、これを実数値にするためには、リーマン面にどのような制限を示えたらよいか。

2. (A), (B) に対する説明を示える前に、まず、方程式 (1) の準周期解について得られている結果のうち、今の問題に係わりある部分を紹介する。

方程式 (1) は、パラメータ ζ を含む線型微分方程式系

$$i\Psi_\zeta + \frac{u_\zeta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi + \frac{\zeta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0,$$

(3).

$$i\Psi_\eta + \frac{1}{2\zeta} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\eta} \\ e^{-i\eta} & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0$$

が可積分条件である. ([1], [17])

a) Kozel-Kotlyarov は、この線型方程式を用いて、 $w^2 + a \prod_{j=1}^{2g} (z - z_j) = 0$ の形の超楕円曲線のリーマン面上の theta 関数で表わされる方程式 (1) の解のクラスがあることを示した。その際、パラメータ ζ は、このリーマン面上の有理型関数 z と $\zeta = \sqrt{z}$ なる関係にあった。

b) Itsk は $w^2 = z \prod_{j=1}^{2g} (z - z_j)$ の形の超楕円曲線のリーマン面上のアーベル積分論を用いて、(3) の形の線型方程式の同時解 $\Psi = {}^t(\Psi_1, \Psi_2)$, $\Psi = \Psi(x, \eta, p)$, $p \in \mathbb{R}$ を構成することにより、方程式 (1) の準周期解を構成した。その際、 Ψ_2 は $\mathbb{R}$ 上の面 $\zeta = \sqrt{z}$ なる関係があった。

c) McKean は u が x に関して周期的な場合に ($x = \xi - \eta$, $t = \xi + \eta$)、線型作用素 (これは (3) に現れている線型作用素と同一)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \frac{i}{4} (u_x + u_t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16\zeta} \begin{pmatrix} e^{i\eta} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta} \end{pmatrix}$$

の固有値問題 $Lf = \zeta f$ を考察して、二価性に言及している。

次に方程式 (2) の準周期解の構成の概略を述べる。詳細は [6] に述べる。

方程式 (2) は、パラメータ λ を含む、線型微分方程式系

$$i\Phi_{\zeta} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} \Phi + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi = 0$$

$$(4) \quad i\Phi_{\zeta} + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \omega u & -e^{-i\omega} \sin u \\ -e^{i\omega} \sin u & -\omega u \end{pmatrix} \Phi = 0$$

$$a = \frac{i(e^{i\omega} \sin u)_{\zeta}}{2\cos u}, \quad \omega_{\zeta} = \frac{v_{\zeta} \omega u}{2\omega^2(\frac{u}{2})}, \quad \omega_v = \frac{v_v}{2\omega^2(\frac{u}{2})}$$

が可積分条件である。([11])

この形の線型方程式の同時解となるべき関数をアベール積分論を用いて構成する。

$R \Sigma$: 超楕円曲線 $\mu^2 + a \prod_{i=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_i) = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_k$ ($i \neq k$), $\lambda_i \neq 0$ のリーマン面 (種数 $= g$) とする。 P_i (resp. Q_i), $i=1, 2$ Σ R 上の点で、 R 上の有理型関数 λ による $\mathbb{P}^1$ の image が ∞ (resp. 0) となる点とする。点 P_i (resp. Q_i) のまわりを local parameter として λ^{-1} (resp. λ) とする。 δ を R 上の次数 $g+1$ の正因子で $l(\delta - P_i) = 1$, $i=1, 2$ なるものとする。

このとき、次の性質を持つ関数 $\Phi_j(z, \lambda, P)$, $j=1, 2$, $(z, \lambda) \in U$, (U は $0 \in \mathbb{R}^2$ のある近傍), $P \in R$ Σ 一意的に構成できる。

i) Φ_j は $R - \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ で ($P \in R$ の関数として) 有理型

で、その極因子は δ ,

ii) P_k の近傍で $\Phi_j \exp(-\frac{ia_k \lambda \xi}{2})$, $a_1 = 1, a_2 = -1$, は正則かつ

$$(\Phi_j \exp(-\frac{ia_k \lambda \xi}{2}))(P_k) = \delta_{jk},$$

Q_k の近傍で $\Phi_j \exp(-\frac{ia_k \eta}{2\lambda})$ は正則.

このような性質を持つ関数の構成は、 R 上のある種の Jacobi の逆問題を解くことに帰着する。 Φ_j は R 上のアーベル積分、theta 関数を用いて表示できる。

P_j, Q_j の近傍に於ける、 $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$, $\Phi = t(\Phi_1, \Phi_2)$ の振舞いについて調べることにより、 Φ が次の方程式を満たすことがわかった。

$$i\Phi_\xi + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix} \Phi + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi = 0,$$

(5)

$$i\Phi_\eta + \frac{1}{2\lambda(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})} \begin{pmatrix} \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21} & -2\beta_{11}\beta_{12} \\ 2\beta_{21}\beta_{22} & -\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} \end{pmatrix} \Phi = 0,$$

ここで α_{jk} は $\Phi_j \exp(-\frac{ia_k \lambda \xi}{2})$ の P_k での展開の λ^1 の係数、

β_{jk} は $\Phi_j \exp(-\frac{ia_k \eta}{2\lambda})$ の Q_k での展開の定数項である。

(4) と (5) と比較することにより

$$u = \arccos \left(\frac{\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} \right),$$

$$v = i \log \frac{\beta_{12}}{\beta_{21}} + v_0, \quad v_0 = \text{定数}$$

が方程式 (2) の解であることがわかる。これらの解は、 $\mathbb{R}$ 上の θ 関数を用いて表示できる。

3. (A), (B) に対する説明を与える。

そのために、2 の後半で、方程式 (2) の準周期解の構成に用いた超楕円曲線 $\Sigma: \mu^2 + a \prod_{i=1}^{2g} (\lambda - \lambda_i)(\lambda + \lambda_i) = 0$, $\lambda_i^2 \neq \lambda_k^2 (i \neq k)$, $\lambda_i \neq 0$ の形のものを特殊化する。(種数 $= 2g-1$)

この超楕円曲線には、次の fixed point free involution がある。
 $T: (\lambda, \mu) \mapsto (-\lambda, -\mu)$.

この fixed point free involution の周期行列、アーベル積分への作用を考慮に入れ (cf. Rauch-Farkus [12], Fay [7]) 更に因子 δ を $T\delta = \delta$ なるように選んでおけば、重の表示式から、次の関係式を示すことができる。

$$\Phi_1(z, \eta, Tz) = \Phi_2(z, \eta, z), \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21}, \quad \beta_{11} = \beta_{22}, \quad \beta_{12} = \beta_{21}.$$

つまり、この時 2 の後半に述べた方法で構成する方程式 (2) の解において $v = \text{定数}$ となる。従って方程式 (1) の解が得られる。

続いて (B) の説明を与える。 $\Psi_1 = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Psi_2 = \Phi_1 - \Phi_2$ とおくと、 Ψ_1 は T -不変、 Ψ_2 は T -反不変である。更に $\Psi = {}^t(\Psi_1, \Psi_2)$ は方程式

$$i \Psi_3 + \begin{pmatrix} \alpha_{21} & 0 \\ 0 & -\alpha_{21} \end{pmatrix} \Psi + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0,$$

$$i \Psi_4 + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_{11} + \beta_{12}}{\beta_{11} - \beta_{12}} \\ \frac{\beta_{11} - \beta_{12}}{\beta_{11} + \beta_{12}} & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0$$

をみたす。

超楕円曲線 $\mu^2 + a \prod_{j=1}^{2g} (\lambda - \lambda_j)(\lambda + \lambda_j) = 0$ の involution T による quotient は $w^2 + a z \prod_{j=1}^{2g} (z - \lambda_j^2) = 0$ z の projection は $w = \lambda \mu$, $z = \lambda^2$ で与えられる。それぞれに対応するリーマン面を $\hat{R}$, R とすると、 Ψ_1 は R 上の 1 価関数で、 Ψ_2 は R 上の 2 価関数である。更に、 λ は R 上の 2 価である。

ここでは、 $\hat{R}$ から出発して、そのある“対称性”を用いて、方程式 (1) の準周期解を構成したが、It's a 場合は、 R から出発して、二価性を使って方程式 (1) の解を構成している。

4. (C) について述べるために、まず次の定義から始める。
symmetric Riemann surface (R, σ) とは、コンパクトリーマン面 R と R 上の anti-holomorphic involution σ の pair $\sigma = \pm$ と言う。

この定義は Klein によるものである。

symmetric Riemann surface の性質は Weichold [13] により調べられている。彼の結果をいくつか述べる。

$R_0 \in \Sigma$ に関する不動点集合とする。

$R - R_0$ は連結である (こゝを $R/\langle \sigma \rangle$ は non-orientable) が、又は、丁度二つの連結成分からなる (こゝを $R/\langle \sigma \rangle$ は orientable) がのいずれかである。

$r \in R_0$ の連結成分の個数とする。

symmetric Riemann surface (R, σ) に対して triple (g, r, ε) を対応させる。こゝで g は R の種数、 $R/\langle \sigma \rangle$ が orientable のときには $\varepsilon = +$, non-orientable のときには $\varepsilon = -$ とおく。

r の範囲は次のようになる。

$\varepsilon = +$ のときには、 $1 \leq r \leq g+1$ で $g-r+1 = \text{偶数}$

$\varepsilon = -$ のときには $0 \leq r \leq g$ 。

symmetric Riemann surface (R, σ) が type (g, r, ε) であるとは、上のようにして、 (R, σ) に対応させる triple が (g, r, ε) であるときをいう。

Weichold は更に、各 type に対して、 $H_1(R, \mathbb{Z}) \curvearrowright \sigma$ の作用、period matrix (I_g, τ) の $\text{Re } \tau$ の決定等を行っているが、こゝでは省略する。

一方で、Witt [14] は一変数実代数関数体に関する研究において、次のことを示した。

type $(g, 0, -)$ の symmetric Riemann surface 上には $ff^\sigma = -1$ なる有理型関数 f が存在する。こゝで

$$(f^\sigma)(z) = \overline{f(\sigma z)}.$$

彼 a 証明 を 用 いた り、 f a degree (= 極 a 個数) は $g+1$ に と れ
る こと が わ かる。

こ れ ら a 結果 を 用 い る こと によ り、 方程式 (2) a 解 を 実 数
値 に する には、 $\mu^2 + \prod_{i=1}^{g+1} (\lambda^2 + a_i \lambda + b_i) = 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 < 4b_i$
(type $(g, 0, -)$, $\sigma: (\lambda, \mu) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$) a 形 a 超楕円曲線 を と れ
ば よ く、 方程式 (1) a 解 を 実 数 値 に する には

$\mu^2 + \prod_{i=1}^g (\lambda^2 + a_i \lambda + b_i)(\lambda^2 - a_i \lambda + b_i) = 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 < 4b_i$
(type $(2g-1, 0, -)$, $\sigma: (\lambda, \mu) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$) a 形 a 超楕円曲線 を と
れ ば よ い こと が わ かる。

5. 3, 4 で 述べ た こと を 用 い た り、 [5] を 用 いた り
massive Thirring model a 方程式 a 準周期解 も 構成 でき る。
た だ し、 そ a 場 合 には、 4つ a fixed points を も σ -involution
を 用 い る。

更 に、 3, 4 で a 議論 は Zakharov-Mikhailov [15], Zakharov-
Skabat [16] が 考 え て い る 方程式 系:

$$\Phi_z = U(\lambda, z, \eta) \Phi, \quad \Phi_{\bar{z}} = V(\lambda, \bar{z}, \eta) \Phi, \quad \Phi = \Phi(\lambda, z, \eta), \quad \Phi: U, V: N \times N \text{ 行列},$$

U, V は パラメータ λ a 有理関数で、 そ a 極 は (z, η) に 依
ら ない、 とい う 形 a 線型方程式 a 可積分条件 と して 表 わ され
る、 U, V a 或 方 に関する 非線型方程式系、 a 準周期解 a 構

成を考えた場合にも、重要であると思われる。(Zakharov-Mikhailov, Zakharov-Shabat の意味での "reduction") .
 Cherednik [4] も同様の問題を抱えているが、この 1-トの 3
 で述べた "reduction", あるいは 4 で述べた symmetric
 Riemann surface には言及していない.

References

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur.
 Phys. Rev. Lett., 30, 1262-1264 (1973)
- [2] I. V. Cherednik. Funct. Anal. Appl., 12 (3), 45-54 (1978) (Russian)
- [3] ————, ————, 13 (1), 81-82 (1979) (Russian)
- [4] ————. Dokl. Akad. Nauk USSR, 246 (3), 575-578 (1979)
 (Russian)
- [5] E. Date. Prog. Theor. Phys., 59, 265-273 (1978)
- [6] ————. 数理論究録 349, 8-31 (1979)
- [7] J. D. Fay. Lect. Note in Math. 352, Springer, 1973
- [8] A. R. Its, preprint
- [9] V. A. Kozel and V. P. Kotlyarov. Dokl. Akad. Nauk UkrSSR.
 Ser. A 10, 878-881 (1976) (Ukrainian)
- [10] H. P. McKean. Helsinki Congress z'a 講演原稿
- [11] K. Pohlmeyer Commun. math. phys. 46, 207-221 (1976)

- [12] H.E. Rauch and H.M. Farkus : Theta functions with applications to Riemann surfaces, Williams & Wilkins, 1974
- [13] G. Weichold. Zeitschrift f. Math. u. Phys, 28 321-351 (1883)
- [14] E. Witt. J. Reine Angew. Math. 171, 4-11 (1934)
- [15] V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov. J. Exp. Theor. Phys. 74, 1953-1973, (1978) (Russian)
- [16] V.E. Zakharov and A.V. Shabat. Funct. Anal. Appl. 13 (3), 13-22 (1979) (Russian)
- [17] V.E. Zakharov, L.A. Takhtadzhian and L.D. Faddeev Soviet Phys. Dokl., 19 824-826 (1974)