

2値型集合行動に対する確率 フィードバック模型

1)橋本 昇 2)豊田規人
1)北海道医療大学 2)北海道情報大学

(2002 年 4 月 10 日受理)

暴動や流行現象等の2値選択型集合行動と呼ばれる社会現象の時間発展に対して、新しいタイプの数理模型を提案する。我々の模型では社会的なシステムの構成要素である個人の個性を無視し、各個人が他者と平均場型の相互作用をしながら、集合行動へ参加・不参加の態度を確率的に決めると仮定する。その結果、我々の模型は有限自由度で非平衡状態にあるイジングスピンの平均場型の相互作用をしながら時間発展する系と似た構造をもつ。この系の状態変数である参加者数はマルコフ型の確率フィードバックを受けながら時間発展すると仮定した。フィードバックの強さを与える制御変数 β は平衡系に於ける温度の逆数に対応しており、 β の値を変化させることにより、系は2次相転移的变化を示す。有限自由度系の為転移点は明確ではなく、 β のある範囲にわたって秩序パラメータに相当する参加率が大きなゆらぎを示す臨界的振る舞いが見られる。理論的解析及び数値シミュレーションから、この領域においては集合行動の持続時間分布及び行動参加者数の確率分布がべき乗則に従うことが示される。我々の模型に構成要素の個性を導入し、社会システムに対する模型としてより現実的なものにする方法についても議論する。

§1. 始めに

最近、経済学における価格変動の問題に対して統計物理学的アプローチが試みられている[1]。そこでは、株や為替の市場における需要と供給の均衡状態と物質系で見られる相転移の臨界状態との類似性が指摘され、取引価格の変動等が相転移理論の手法を用いて分析されている。相転移における臨界状態を特徴付けるものとしてべき乗則があるが、このべき乗則は”物質系”に限らず生物システムや社会システムなどの様々な系で見い出されている[2]。相転移の理論は主に”物質系”の理論として発展してきたが、相転移と見なすことのできる現象は”物質系”を越えて幅広く存在するものと思われる。社会システムや生物システムは有限の自由度から

なり、非平衡状態にあることが多いので、これらの系の”相転移”は本質的に有限自由度非平衡系が示す”相転移”ということになる。相転移の背後にはシステムを構成する多数の要素とそれらの間の相互作用が存在する。このような相互作用をする多自由度系の取り扱いが物理学が得意とする分野であり、様々な手法が開発されてきた。これらの方法が、従来物理学の対象外とされてきた人間を構成要素とする社会的なシステムの分析においても有効であることが実証されれば、物理学の境界に新たな地平が広がることになる。

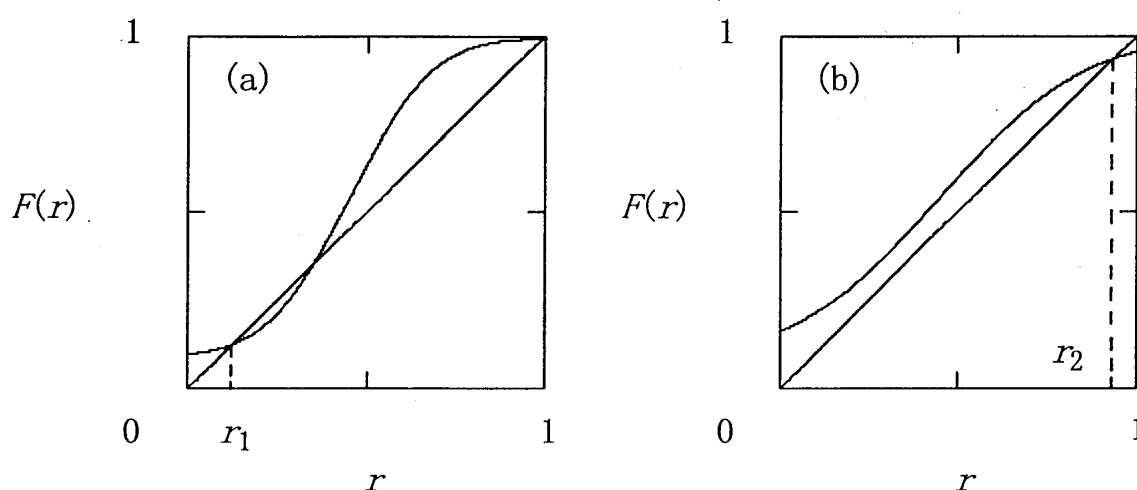
人間あるいは人間の集団が形成する社会的なシステムでは、構成要素である個々の人間や会社などの組織が本来個性を持っている。その為、原子や分子と言った個性のない要素からなる物理的なシステムとは異なり、一般に複雑な挙動を示すと考えられる。しかし、人間の集団が示す行動(集合行動)もその種類に依っては、個々の人間の行動を比較的単純化して考えることができる場合がある。例えば、2値選択(binary decision)型集合行動と呼ばれる暴動、イノベーションの普及、流行、ストライキ等においては、各個人は①参加(採用)する、②参加(採用)しない、の2つの選択肢があり、どちらを選ぶかの決定は他人の選択状況に依存して決定されると言われている[3]。システムを構成する各個人が2状態のうちのどちらかを他人の状態を見ながら選ぶという事情はコンタクトプロセスや相互作用をもったイジングスピンのシステムを連想させ、これらの集合行動は物理学的な枠組みに基づいたモデル化が十分可能と思われる。

実際、Weidlich[4]は社会システムにおける世論の二分極化という現象を強磁性体に対するイジング模型とのアナロジーに基づいてモデル化している。しかし、彼の模型は強磁性体に対する動的イジング模型[5]に登場する物理変数を殆どそのままの形で社会システムの変数に解釈し直したものであり、しかも本質的に平均場近似による扱いなので、有限自由度非平衡系に期待されるdynamicalなゆらぎを表現できない。又、Gibbs分布に相当する平衡状態を仮定するなど、そのままの形では社会システムに対する模型としては多少無理があるように思える。

社会システムの非平衡性を強調したより現実的な2値選択型集合行動に対する模型として、M.Granovetter[3]は閾値モデル(threshold model)と呼ばれる興味深い数理モデルを提案している。閾値モデルでは、ある集団の集合行動に対して、以下のことを仮定する。

- (i) 集団を構成する各個人は各時刻 t において集合行動への参加・不参加をその時の集団内の参加率 $r(t)$ に基づいて決める。
- (ii) 各個人は時間に依らない参加への閾値 x をそれぞれ持っており、 $r(t) < x$ では参加せず、 $r(t) \geq x$ で初めて参加する。
- (iii) 集団内で閾値 x を持つ人の割合はある確率分布関数 $f(x)$ で与えられる。

以上の仮定から累積分布関数 $F(x)$ を

図1 $\sigma^2 < \sigma_c^2$ ((a)) と $\sigma^2 > \sigma_c^2$ ((b)) に対する累積分布関数

$$F(x) = \int_0^x f(u) du \quad (1)$$

で定義すると、 $r(t)$ の時間発展は

$$r(t+1) = F\{r(t)\} \quad (2)$$

で与えられることになる。 $f(x)$ として正規分布をとると、 $F(x)$ は sigmoid 的な関数になる。図 1(a) の様な場合、固定点を与える方程式 $r(t) = F\{r(t)\}$ は 3 個の実数解を持ち、 $r=0$ から出発すると r の値が安定な固定点 r_1 に達して系の時間発展が止まることになる。正規分布 $f(x)$ の平均値を固定して分散 σ^2 だけを次第に増加させていくと、 σ^2 がある値 σ_c^2 で $F(x)$ は傾き 45° の直線に接する。 $\sigma_c^2 < \sigma^2$ になると図 1(b) の様になり、 r_2 が唯一の固定点になる。つまり、このモデルでは閾値分布の分散の値が σ_c^2 を越えると最終的な参加率(採択率)が r_1 から r_2 へ大きくジャンプする。

このように閾値モデルは社会現象における相転移的变化を预言する興味深い模型であるが、しかし問題点もいくつかある。まず第一に、このモデルでは集団の構成要素である各個人が集団全体の参加率を常に正確に把握すると言うことを前提としている[6]。しかし、各個人の集団全体に対する知覚はある程度曖昧さを含んでいると考えた方が現実的である。第二に、このモデルでは 1 つの安定状態が消失して他の安定状態に移行する過渡期において期待される参加率の大きなゆらぎを表現できない。経済学への応用を考えた場合、“神のふるえる手”[1]を表現できる模型の方が望ましいと考えられる。第三に、このモデルでは一旦固定点に落ち着くと以後系の時間発展は止まり、参加率が 0 に収束するような終息過程を表現できない。この点は、モデル

に参加(採用)中止の閾値 x_u を導入することにより改善されるが、その場合でも参加率が1になった直後に0になると言う不自然な終わり方をする[7]。以上の問題点は各個人の選択行動が決定論的になされると仮定していること、及び系の時間発展を支配する決定論的方程式が制御変数の変化に対して一次相転移に相当する分岐を示すことに起因している。

上記問題点を克服するため、我々は今回2値型集合行動において各個人は集団全体の参加率を見ながら参加・不参加の選択をするがその選択が確率的に行われ、しかも系の制御変数の変化に対して二次相転移に相当する分岐を示す模型を考えてみた。我々の系は各要素が他の要素全体と相互作用しながら2値状態の一方を確率的にとる系であり、丁度非平衡状態にある平均場型相互作用をするイジングスピンの系(Curie-Weiss模型)と似た力学構造を持つ。ただし、我々の模型ではWeidlichの模型とは異なって社会システムの非平衡性を積極的に取り入れ、“熱平衡状態”の存在は仮定せず系のよりdynamicalな時間発展を考える。又、有限自由度の影響として平均場近似を越えたゆらぎの効果を陽に取り入れる。その結果、2次相転移に伴うべき乗則の出現や、Weidlichの模型では不可能であった秩序パラメータのフラクタルなゆらぎを議論することができるようになる。

我々の模型は現在のところ、Granovetterの閾値モデルと同様に、ただちに実際の社会現象に当てはめ、実測のデータと比較できる段階ではない。しかし、社会システムに現れるべき乗則等の臨界的振る舞いが、物質系の相転移現象と表面的な類似性だけでなく構成要素間の協力現象と言う観点で深くつながっている可能性を示す、という点で意味のある模型と考える。

以下では、§2で我々の模型を紹介し、我々の模型では系の秩序パラメータである参加率の時間発展が相乗型のLangevin方程式によって与えられることを示す。§3で模型から導かれる臨界現象を理論的に解析し、臨界状態において参加率に大きなゆらぎが生じ、集合行動にべき乗則が現れることを示す。§4では数値シミュレーションにより、§3の結果を確認する。最後に§5で今後の展望について述べる。

§2. 確率フィードバック模型

今、ある2値型集合行動へ参加する可能性のある N 人からなる集団があるとする。この集団を一つの系と考え、この系における2値型集合行動への参加人数 $n(t)$ の時間変化を考える。具体的な2値型集合行動としては§1で上げたような暴動への参加や流行の採用などを想定しているが、以下では特に指定せず、2値型集合行動一般に適用可能な形で議論を進める。特定の集合行動との関連については必要に応じて言及する。この系の構成要素である各個人に番号 $1, 2, 3, \dots, N$ を付け識別する。 i 番目の人の時刻 t における集合行動への参加状態を変数 $u_i(t)$ で表し、 $u_i(t) = 1$ は参加を $u_i(t) = 0$ は不参加を表すものとする。 $u_i(t)$ を用いると、

$n(t)$ 及び時刻 t における参加率 $r(t)$ は

$$n(t) = \sum u_i(t), \quad (3)$$

$$r(t) = n(t)/N \quad (4)$$

となる。

我々はここで以下のことを仮定する。①各個人は各時刻において全体の参加率 $r(t)$ に基づいて参加・不参加の決定をする。②参加・不参加の決定は確率的に行われる。③同一時刻における各個人の参加の確率は等しい。①の各個人が参加・不参加を判断する情報として参加率を用いるという仮定は閾値モデルの仮定(i)と同じであるが、閾値モデルでは参加・不参加の決定は決定論的に行われるのに対して、我々のモデルでは、確率的に行われると仮定している(②)。③の仮定は、構成要素の個性が閾値の違いという形で導入されている閾値モデルとは対照的に、構成要素に個性を認めないと言う仮定であり、人間の集団を原子や分子の集団と同様に扱うことになる。社会的なシステムの議論では構成要素の個性が本質的な役割を果たす場合があり重要と考えられる。しかし、我々はまず第一段階のモデルとして、各構成要素がシステム全体と相互作用し、確率的に意志決定しながら時間発展するような系の振る舞いをできるだけ単純な形で明らかにすることを優先し、構成要素の個性はひとまず無視することにする。我々のモデルでも、議論の見通しは悪くなるが、個性をいくつかの型に分類することにより構成要素に個性を持たすことは可能である。この様なモデルの拡張については §5 で改めて述べる。

上記3つの仮定により、この系は平均場相互作用をするイジング模型と似た系になる。①、②より時刻 t においてある個人が行動へ参加する確率を $p(t)$ とすると $p(t)$ は時刻 $t-1$ における参加率 $r(t-1)$ の、つまり $n(t-1)$ の関数になる。また、時刻 t における参加人数 $n(t)$ は確率変数になり、 $n(t)$ が整数値 m をとる確率は③より

$$P[n(t) = m] = {}_N C_m p(t)^m \{1 - p(t)\}^{N-m} \quad (5)$$

となる。問題は $p(t)$ の $n(t-1)$ に対する依存性をどうとるかである。熱平衡状態にあるイジング模型の場合は1個のイジングスピンのupの状態である確率 p_+ はハミルトニアンを通してup状態にあるスピンの数 n_+ に依って決まる平均場の関数として与えられる。しかし、今考えている系は有限自由度の社会システムであり、ハミルトニアンに相当するものは知られていないし、熱平衡状態にもないと考えられる。従って、ここでは以下のようにこの系の性質をうまく反映し、しかも最も単純な形をとる関数を直感的な議論に基づいて選ぶことにする。

二項分布(5)は $p(t) \ll 1$ のときPoisson分布で近似でき

$$P[n(t) = m] \cong B(t)^m \exp[-B(t)]/m!, \quad B(t) \equiv p(t)N \quad (6)$$

となる。時刻 t における参加人数の平均 $B(t)$ は時刻 $t-1$ において実現した参加人数 $n(t-1)$ の関数になるので $B(t+1) = G\{n(t)\}$ と置き、 $G\{n(t)\}$ は $n(t) = 0$ の回りに展開できると仮定してみる:

$$B(t+1) = B_0 + a n(t) + b n(t)^2 + \dots \quad (7)$$

ここで、2値型行動に対するモデルが共通に備えていなければならない最低限の性質を考えてみると、まず、(a)行動が始まる前は $n(t) = 0$ であり、行動が開始される為には $n(t) = 0$ であっても、次の時刻で $n(t+1) > 0$ になる確率が正でなければならない。これは暴動の場合では”扇動者”が存在することに、新製品の流行現象の場合では企業の宣伝等が存在していることに対応する。次に、各個人は他人の行動に対し同調を求める欲求と差別を求める欲求があると言われている[8]。このことに対応し、(b)他人の行動につられて参加を開始する (bandwagon効果) が、(c)参加者があまり多数になりすぎると参加を中止する (snob効果) という行動を表現できなければならない。例えば、暴動の場合だと周りに付和雷同して参加するが、そのうち飽きてdrop outする、あるいはファッションなどの流行現象では、あるファッションが流行り始めると自分も採用するが、あまり多数の人が採用すると自分は他のファッションに切り替えることにより目立とうとする、等である。以上の効果は閾値模型では参加開始と中止の2つの閾値によって表現された[7]。我々の模型では(7)において $B_0 > 0$ とすると(a)の条件が満たされることがわかる。また、(b)と(c)も、 a と b をそれぞれ $a > 0$, $b < 0$ にとれば満たすことができる。以上の議論から、我々は $G\{n(t)\}$ の最も簡単な関数形として次の2次式を仮定することにする。

$$B(t+1) = \beta n(t)\{1 - n(t)/Q\} + B_0 \quad (0 \leq n(t) \leq Q) \quad (8)$$

$$B(t+1) = B_0 \quad (Q < n(t))$$

ここで、 β, Q, B_0 はすべて正の定数であり、 β はbandwagon効果を、 Q はsnob効果を、又 B_0 は集合行動を誘発する外部及び内部の”扇動”効果をそれぞれ制御するパラメータである。

結局、我々の系の状態変数 $n(t)$ の時間発展はPoisson分布(6)と分布の平均値を1つ前の時刻の状態変数から決める式(8)で与えられるMarkov過程になる。この系の時間発展は、通常の力学系の様に時刻 t の状態から時刻 $t+1$ の状態が決定論的に決められるのではなく、 $t+1$ 時刻における状態変数の平均値のみが決められるという特徴を持っている。Poisson分布の分

散は平均値に等しいので、時刻 t の状態が時刻 $t+1$ における状態変数のゆらぎを決めていることになる。この系をフィードバックシステムとしてみると、時刻 t における状態が次の時刻の系へ確率的にゆらぎを持ってフィードバックされるが、このゆらぎの大きさが時刻 t における状態に依存するという意味で“状態に依存したゆらぎをもつ確率フィードバック系”と呼ぶことができる[9]。このような確率フィードバックシステムは従来相乗型Langevin方程式を用いて記述されてきたが、実際次節で議論するように、我々の系の $B(t)$ は適当な近似のもとで相乗型Langevin方程式を満たす。

次に、我々の系の安定状態(“相”)を調べるため、 $Q/N \equiv q$ を有限に保ちながら系の要素(集団の構成員)の数 N と Q を無限大にする熱力学的極限を考えてみよう。この系の秩序パラメータは集合行動の参加率 $r(t) = n(t)/N$ と考えられるが、熱力学的極限において $r(t)$ の時間発展は単純なロジスティック写像で与えられる: $N \rightarrow \infty$ の極限では、Poisson分布(6)は $\delta\{n(t) - B(t)\}$ で置き換えることができ、 $n(t) = B(t)$ となる。簡単のために $B_0 = 0$, $0 < \beta \leq 3$ の場合を考えると、(8)は

$$r(t+1) = \beta r(t) \{1 - r(t)/q\} \quad (9)$$

となる。この力学方程式は β の値に依って分岐が生じ、 $\beta < 1$ では $r(t) = 0$, $\beta > 1$ では $r(t) = q(1 - 1/\beta)$ がそれぞれ安定固定点になる。つまり、系の集合行動の最終的な参加率は $\beta = 1$ を境にして異なる。これは“物質系”における2次相転移に相当し、 $r(t) = 0$ の相は“無秩序相”、 $r(t) > 0$ の相は“秩序相”にそれぞれ対応する。また、Curie-Weiss模型と比較することにより、 $B(t)$ が巨視的な磁化に、 β が温度パラメータの逆数に、 B_0 が外場にそれぞれ相当することがわかる。我々の模型で $\beta > 1$ のとき最終的な参加率が0でない有限な値に落ち着くことになるのは、強磁性体で自発磁化が生じるのと同じ現象と言うことになる。

N, Q が有限の場合は系に内在するゆらぎのために最終的な参加率 $r(t)$ も安定固定点の周りで揺らぐ。その為、 $\beta < 1$ で集合行動が終息して $n(t) = 0$ になっても、 $B_0 > 0$ であれば常に再開の可能性がある確率で存在することになる。更に、 β の値が1の近傍にあれば $n(t)$ は大きなゆらぎを示し、 $n(t) = 0$ と $n(t) > 0$ の期間を不規則に繰り返す間欠的变化を示すと考えられる。これは社会システムにおいて古い安定状態が消失して新しい安定状態に移行するような変革期においては、構成員の集合行動に大きなゆらぎが生じることを意味する。社会科学に対する統計物理学的アプローチの動機の一つはこの様な社会システムに見られるゆらぎのメカニズムを相転移とのアナロジーによって解明するということにあるので、次節では $\beta = 1$ の近傍で我々の系が示す秩序パラメータのゆらぎやべき乗則等の臨界的振る舞いを調べることにする。

§3. 確率フィードバック模型における臨界現象

前節の議論から予想される $\beta = 1$ 近傍における秩序パラメータ $r(t)$ の大きなゆらぎを定量的に扱うために、間欠性の議論に習って、 $n(t) = 0$ の期間(集合行動の静止期)をラミナー期、 $n(t) > 0$ の期間(集合行動が持続する期間)をバースト期と呼ぶことにする[9]。その上で、ラミナー期間とバースト期間の分布が $\beta = 1$ の近傍でどのような形をとるかを見てみる。

ラミナー長分布 ラミナー期間の分布は(6)、(8)から次のように求めることができる:時刻 t に $n(t) = 0$ になると $B(t+1) = B_0$ であるので $n(t+1) = 0$ となる確率は $\exp[-B_0]$ である。従って、時間間隔 τ の間参加者0が続く確率(ラミナー長分布)は

$$f_L(\tau) \sim \exp[-B_0\tau] \quad (10)$$

となる。つまり、ラミナー期においては状態のフィードバックが無いいため、ラミナー期間の確率分布は単純なPoisson過程の待ち時間分布と同じになる。一方、 $n(t) > 0$ が持続する時間の分布(バースト長分布)の導出には、以下のようなLangevin方程式に基づいた議論が必要である[9]。

バースト長分布 時刻 t において $n(t)$ は平均値 $B(t)$ 、分散 $B(t)$ のPoisson分布に従う確率変数であるが、 $B(t) \gg 1$ の場合、この分布は同じ平均値と分散をもつGauss分布で近似できる。そこで、新たな変数 $r(t) \equiv n(t) - B(t)/\sqrt{B(t)}$ を導入すると、 $r(t)$ は平均値0、分散1のGauss分布に従う確率変数とみなすことができる。 $B_0 \ll 1$ を仮定し、 $n(t)$ の代わりに $r(t)$ を用いて(8)式を書き換えると、

$$B(t+1) - B(t) = \nu B(t) + \beta \sqrt{B(t)} \{1 - 2B(t)/Q\} r(t) - \beta B(t)^2/Q \quad (11)$$

を得る。ただし、 $\nu \equiv \beta - 1$ とおいた。

長時間にわたる系の統計的な性質を解析的に調べる為には、(11)式の連続時間極限をとればいいわけであるが、非線形項が存在する為、このままの形で連続時間に移行しても系の振る舞いを解析的に調べるのは困難である。そこで、以下のように右边の第3項の非線形効果を境界条件で置き換える近似をする。 $\nu > 0$ とすると、(11)式で右边の第1項は $B(t)$ を増加させ、第3項は $B(t)$ の増加を抑える働きをするが、第3項の抑制効果が現れ始めるのは $B(t) \sim Q$ になったときである。 $B(t)$ がとり得る値の範囲は(8)式より $B_0 \leq B(t) \leq B_r \equiv B_0 + \beta Q/4$ に制限されているので、かなり粗い近似になるが、第3項を $B(t) = B_r$ における完全反射の境界条件で置き換えることにする。又、集合行動の終息時には $n(t-1) > 0$ 、 $B(t) > B_0$ の状態から $n(t) = 0$ 、 $B(t+1) = B_0$ となるので、 $B(t) = B_0$ において完全吸収の境界条件を課すことにする。以上の近似の上で連続時間に移行すると、相乗性のLangevin方程式

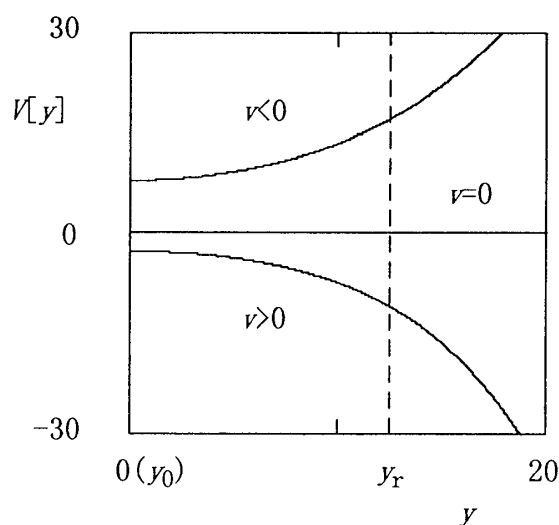


図2 ”ポテンシャル” $V[y]$ の y 依存性

$$dB(t)/dt = \nu B(t) + \beta\sqrt{B(t)}\{1 - 2B(t)/Q\}r(t), \quad (12)$$

境界条件: $B(t) = B_r$ で完全反射

$B(t) = B_0$ で完全吸収

を得る。(12)式は更に、変数変換

$$y(t) = (\sqrt{2Q}/\beta)\tanh^{-1}(\sqrt{2B(t)/Q}) \quad (13)$$

によって相加性のLangevin方程式

$$dy(t)/dt = -\partial V[y]/\partial y + r(t), \quad V[y] = -(\nu Q/4\beta^2)\cosh[\beta y\sqrt{2/Q}], \quad (14)$$

境界条件: $y(t) = y_r$ で完全反射

$y(t) = y_0$ で完全吸収

に書き換えられる。ここで、 $r(t)$ は $\langle r(t), r(t') \rangle = \delta(t - t')$ を満たすGaussian白色雑音であり、 y_r と y_0 はそれぞれ境界 $B(t) = B_r$ 及び B_0 に対応する変数 $y(t)$ の値である。(14)式は

われわれの系が図2のような”ポテンシャル”中を白色雑音を受けながら安定点に向かって緩和する仮想的な粒子の系と等価であることを示している。 ν の正負によって安定点に移り変わるのは§2で議論した $\beta = 1$ を転移点とする”相転移”に対応する。

以上のような変数変換の結果、一回の集合行動の開始から終息までは y 軸上で $y = y_s \approx y_0$ から出発した仮想的な粒子が不規則な運動をしながら吸収壁に達して消滅する過程で表されることがわかった。従って、集合行動の持続時間の分布(バースト長分布)は y 軸上の仮想的な粒子の寿命、つまりfirst passage timeの分布で表されることになる。first passage timeの分布はLangevin方程式(14)に対するFokker-Planck方程式を解くことによって得られる。(14)式に従う確率変数 $y(t)$ の分布関数を $f[y, t]$ とすると、 $f[y, t]$ はFokker-Planck方程式

$$\partial f[y, t]/\partial t = -\partial J[y, t]/\partial y, \quad J[y, t] = -f[y, t]\partial V[y, t]/\partial y - (1/2)\partial f[y, t]/\partial y, \quad (15)$$

$$\text{境界条件: } J[y_r, t] = 0$$

$$f[y_0, t] = 0$$

を満たす。ここで、 $J[y, t]$ は y 軸上の確率密度流を表す。first passage timeの分布は吸収境界上における確率密度流 $-J[y_0, t]$ に比例する[10]と考えられるので、(15)式を初期条件 $f[y, 0] = \delta(y - y_s)$ の下で解き、その解を用いて $-J[y_0, t]$ を計算することになる。

(15)式は $\nu \neq 0$ の場合、係数が y 依存性をもつ複雑な2階の微分方程式であるが、我々が興味を持つ $\nu = 0$ の場合には単純な拡散方程式になるので与えられた初期条件及び境界条件を満たす解は

$$f(y, t) = (2/Y) \sum_{l=0}^{\infty} \sin[\kappa_l(y_s - y_0)] \sin[\kappa_l(y - y_0)] \exp[-\lambda_l t], \quad (16)$$

$$Y = y_r - y_0, \kappa_l = (l + 1/2)\pi/Y, \lambda_l = \kappa_l^2/2$$

となる[11]。これより、 $\eta \equiv (y_s - y_0)/Y \ll 1$ に対してバースト長分布として

$$f_B(t) \propto -J[y_0, t] \sim (\eta\pi^2/Y^2) \sum_{l=0}^{\infty} (l + 1/2)^2 \exp[-(l + 1/2)^2 \pi^2 t/2Y^2] \quad (17)$$

を得る。(17)式は $t \ll Y^2$ 及び $t \gg Y^2$ の領域でそれぞれ以下の式で近似される:

$$f_B(t) \sim (\eta Y \sqrt{2\pi}) t^{-3/2} \quad (t \ll Y^2) \quad (18)$$

$$f_B(t) \sim (\eta\pi^2/4Y^2) \exp[-\pi^2 t/8Y^2] \quad (t \gg Y^2) \quad (19)$$

(18)式より”臨界点”近傍にある系では、2値型集合行動の持続時間分布がある範囲で指数 $-3/2$ のべき乗則に従うことがわかる。従って、このような系で2値型集合行動が開始されると、終息までに長時間を要する確率が高くなることを意味する。これは物質系の相転移で見られる臨界減速に対応した現象である。我々の模型をゆらぎを無視した純粋な平均場近似で取り扱ったと、臨界減速の緩和時間は(9)式の解によって与えられ、べき指数は -1 になる。平均場近似を越えたゆらぎの効果を取り入れた結果、べき指数が $-3/2$ にずれたことになる。

(16)式より、2値型集合行動参加者の人数の確率分布についてもべき乗則が得られる： $B(t)$ が(11)式に従って時間発展する間に $B(t)$ が B と $B + dB$ ($y(t)$ が y と $y + dy$)の間の値をとる確率を $F(B)dB$ ($F(y)dy$)とすると、 $F(B) = F(y)dy/dB$ であるが、

$$F(y) = \int_0^\infty f(y, t) dt = 4\eta \sum_{I=0}^\infty \sin\{\gamma_I(y - y_0)\} / \gamma_I \sim 2\eta Y \quad (20)$$

なので、結局

$$F(B) = 2\eta Y \{\beta \sqrt{B}(1 - 2B/Q)\} \sim (2\eta Y \beta) B^{-1/2} \quad (B \ll Q) \quad (21)$$

を得る。

以上見たように、我々の模型では他人との同調の程度を表すパラメータ β がある臨界値に近づくと、集合行動の緩和時間は指数 $-3/2$ のべき乗則に従い、参加者数の確率分布も指数 $-1/2$ のべき乗則になる。前者は系がこの様な臨界状態にあるとき開始された集合行動は終息までに非常に長い時間を要する確率が高いことを意味し、後者はそのような系では参加者が系全体に及ぶような大規模な集合行動が起きる確率が無視できないことを意味する。次節では、(6)、(8)式に基づいた $n(t)$ の時間発展を数値シミュレーションすることにより、参加者 $n(t)$ の間欠的变化、バースト長分布及び参加者数の分布のべき乗則(18),(21)が実際に成り立っていることを見てみる。

§4. 数値シミュレーション

我々は(6),(8)式で与えられる確率フィードバックシステムの時間発展を、以下の方法で数値的にシミュレートしてみた。まず、与えられた $B(t)$ に対して、Poisson分布(6)に従う乱数 m をコンピュータで1個発生させ、その値を $n(t)$ とする。 $n(t)$ を(8)式でフィードバックさせて $B(t+1)$ を求め、 $B(t+1)$ に対して再び分布(6)に従う乱数を発生させ $n(t+1)$ とする。以下、同様の方法を繰り返すことにより、 $n(t)$ ($t = 0, 1, \dots$)に対する数値データを得る。制御変数の値は、 $Q = 100$ に固定し、 $\beta = 0.1 \sim 2$ 、 $B_0 = 0.001 \sim 1$ の範囲で $t = 0 \sim 10^6$ の区間に対して $n(t)$ を計

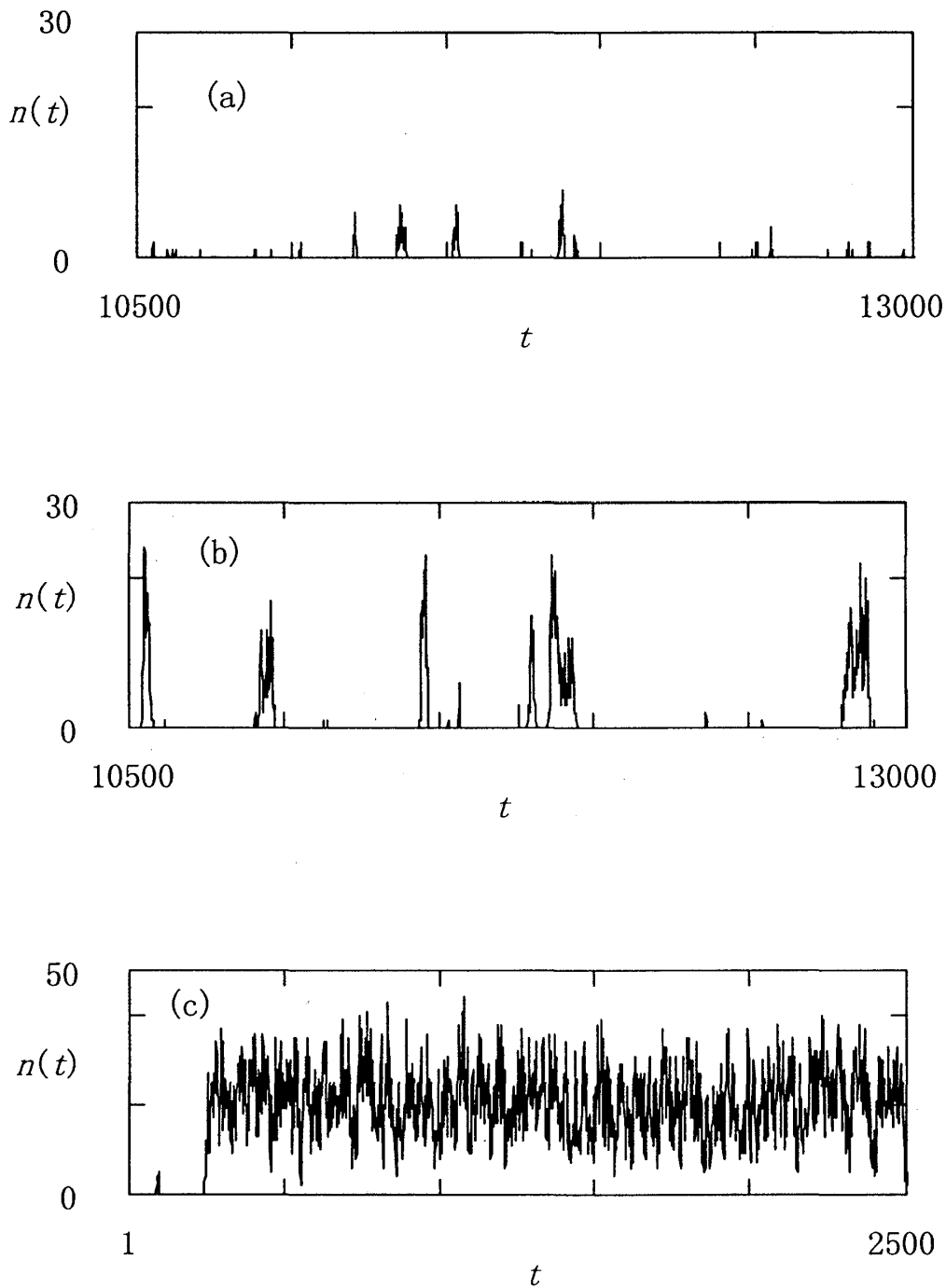
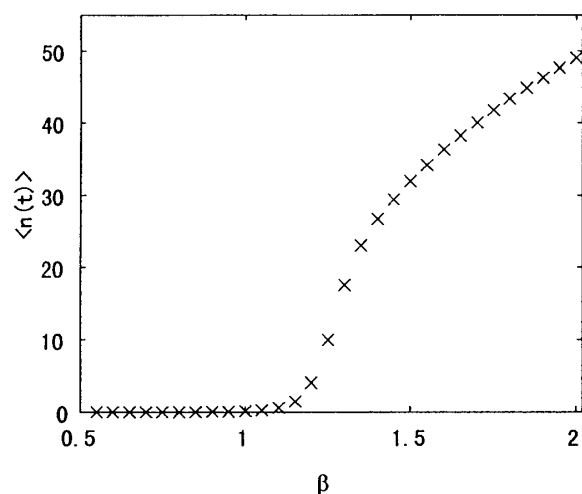
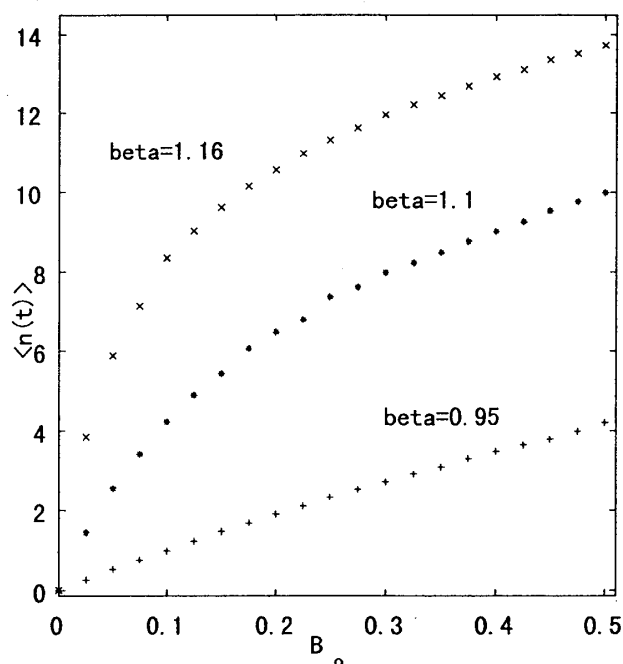


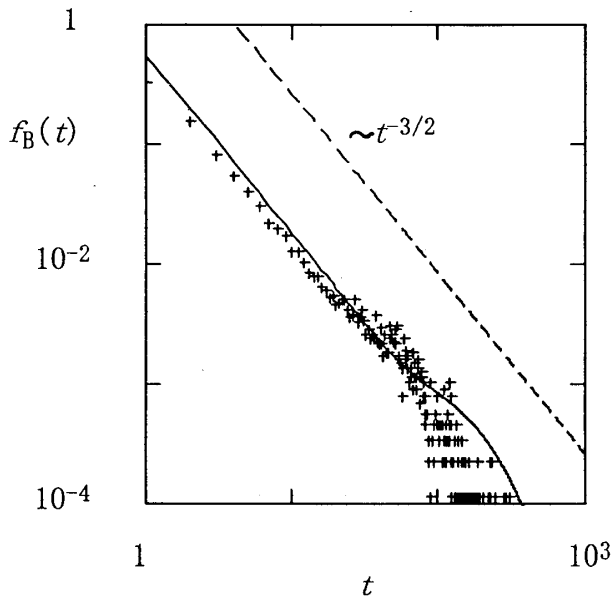
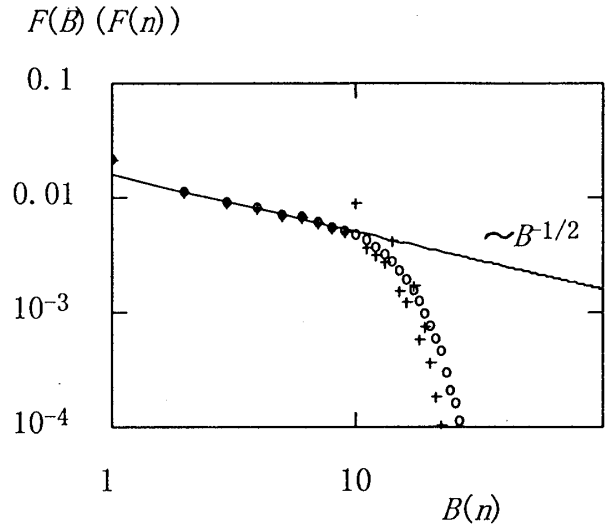
図3 数値シミュレーションから得られた $n(t)$ の時間変化。(a),(b),(c)はそれぞれ、 $\beta = 0.95, 1.11, 1.3$ に対応。

算してみた。我々が用いるコンピュータの性能上の制約から $Q = 100$ ととったが、 Q の値は snob 効果を表すパラメータであり、集団全体の構成員 N の数は Q の数倍からせいぜい数十倍と考えられる。従って、ここで行われる数値シミュレーションでは $N = 100 \sim 1000$ 規模の集団を想定していることになる。現実の社会システムでは、例えばある地域でのファッションの流行とか、特定商品の採用などの集合行動を議論する場合、 N の値は数万から数十万、あるいはそ

図4 平均参加者数 $\langle n(t) \rangle$ の β 依存性図5 平均参加者数 $\langle n(t) \rangle$ の B_0 依存性

れ以上の可能性がある。しかし、臨界状態を特徴付けるような振る舞いは系のサイズに依らず共通と考えられるので、この様な振る舞いを見るためには $N = 100 \sim 1000$ 規模のシミュレーションで十分と思われる。図3に $n(t)$ の典型的な変動を示す。図3(a)はbandwagon効果が十分に小さい場合 ($\beta < 1$) 集合行動は散発的に発生し、すぐに終息するので集団内に定着できない様子を表す。一方図3(c)はbandwagon効果が十分に大きい ($\beta > 1$) と集合行動は一気に集団内に定着する様子を表す。 $\beta = 1$ の”臨界点”近傍で $n(t)$ は予想通り間欠的なゆらぎを示す(図3(b))。図4に秩序パラメータの区間 $t = 0 \sim 10^5$ にわたる平均値 $\langle n(t) \rangle$ を $B_0 = 0.01$ の場合について β の関数として示した。有限系のために”転移点”近傍における立ち上がりは鋭くはないが、この系が $\beta \sim 1$ で相転移的变化を示している。図5には秩序パラメータの区間 $t = 0 \sim 10^5$ にわたる平均値 $\langle n(t) \rangle$ を”外場” B_0 の関数として示した。当然のことながら、外部からの働きかけ B_0 が強くなるに従って参加者の平均値 $\langle n(t) \rangle$ が増加する様子を表している。 $\beta = 1.11$ の場合について、集合行動が持続する時間の分布を表すバースト長分布 $f_B(t)$ を図示すると、図6のようになる。図6中の実線は理論式(17)から計算されたグラフを表す。この図から”臨界点”では、秩序パラメータ $n(t)$ の緩和時間が $t \leq 10^2$ の範囲では指数-3/2のべき乗則に従っていることがわかる。図7に $\beta = 1.11$ のときの $B(t) (n(t))$ の値の分布関数 $F(B) (F(n))$ を示す。この場合も $B(n)$ のある範囲で $F(B) (F(n))$ は指数-1/2のべき乗則に従うことが見て取れる。図6、図7共 B_0 の値は 0.01 である。

以上のように、数値シミュレーションの結果は § 3 の理論的な予測とほぼ一致する。

図6 集合行動の持続時間分布 $f_B(t)$ 図7 参加者数分布 $F(B)$ (○印)と $F(n)$ (+印)

§5. 今後の展望

我々は社会的な集団内における2値型集合行動の時間発展に対して、統計物理学的な描像に基づく確率模型を提案した。構成要素間に平均場型の相互作用を仮定し、系の有限性を考慮してゆらぎを陽に取り入れると、模型系は時間発展が相乗性のLangevin方程式で記述される確率フィードバック系となった。我々の模型は、有限系である為ばやけてはいるが、bandwagon効果を表すパラメータ β の値と共に集合行動の静止相から定着相へ2次相転移的变化を示す。 β の値がこの2つの安定状態の境界領域にあるとき、系は”臨界状態”になり、秩序パラメータである参加率は間欠的に変化し大きくゆらぐ。この”臨界状態”においては、理論的解析及び数値シミュレーションの結果から

- ・集合行動の持続時間分布 $f_B(t)$ が指数-3/2のべき乗則に従う。
- ・参加者数の確率分布 $F(n)$ が指数-1/2のべき乗則に従う。

ことが示された。つまり、我々の模型はある条件下では2値型集合行動にべき乗則が現れることを予言する。これらのべき指数の値は確率フィードバックの式(8)中でbandwagon効果を表す項を $n(t)$ に関して線形にとったことの直接の帰結である。従って、得られたべき指数の値は線形のbandwagon効果を仮定する限り不変で、snob効果を表す非線形項の次数を変えても変わらない。

我々の模型はGranovetterの模型が表現できなかった”臨界状態”のゆらぎを表現できる模型であるが、Granovetterの模型では考慮されていた構成要素の個性を無視するという非現実性を抱えている。この点の改善は、我々の模型を現実の集合行動に適用する上で不可欠である。現在、我々は以下の様な方法で構成要素の個性を模型に導入することを検討している：対象となる集団の構成員は考えている集合行動に対するbandwagon効果とsnob効果の強さによっていくつかのタイプ別グループに分けられると仮定する。例えば、流行現象の場合であれば、”熱し

やすく冷めやすい”グループと慎重に周りを見てから判断する”熟慮型”のグループ等である[7]。今、仮に集団がAグループとBグループに分けられるとすると、集合行動への参加者は $n(t) = n_A(t) + n_B(t)$ となるので、フィードバックの式(8)をそれぞれに $B_A(t+1) = G_A\{n(t)\}$ 、 $B_B(t+1) = G_B\{n(t)\}$ と与え、 $G_i\{n(t)\}$ の形はグループのタイプにふさわしい形を与える。 $B_A(t+1)$ と $B_B(t+1)$ からそれぞれ、 $n_A(t+1)$ と $n_B(t+1)$ を決める。以上の方法で、今回無視した個人の個性というものを、ある程度は我々の模型に取り入れることができる。以上のような改善の後に、我々の模型も現実の社会システムに現れる集合行動と比較検討することができるようになるものと思われる。

その他、我々が現在考えている検討課題を上げると、

- (I) 集団内に異なるタイプのグループが存在するとき、それらの間の相互作用の様子と”相転移”への影響。
- (II) ”外場” B_0 が時間依存性をもった場合の参加者数変動。特に、 B_0 を周期的に変化させた場合その周波数と平均参加者数 $\langle n(t) \rangle$ の関係。
- (III) レーザー系や有限自由度スピン系等の非平衡物質系への応用。

等がある。

ここで議論した確率フィードバック模型は $G\{n(t)\}$ を工夫することにより、実に多様な非平衡系に適用可能となる。様々な系において観測されるべき乗則を、確率フィードバック系の臨界挙動として統一的に理解することが我々の目標である。

参考文献

- [1] 高安秀樹: 日本物理学会誌54(1999)3及びその参考文献.
- [2] 高安秀樹: フラクタル(朝倉書店、1986). 武者利光: ゆらぎの世界(講談社、1980).
- [3] M. Granovetter: Am. J. Sociology 83(1978)1420.
- [4] W. Weidlich: Brit. J. Math. Statist. Psychol. 24(1971)251. W. Weidlich: Collective Phenomena 1(1972)51.
- [5] R. J. Glauber: J. Math. Phys. 4(1963)294.
- [6] 石井健一: 理論と方法 2(1987)15.
- [7] 松田光司: 理論と方法 11(1996)113.
- [8] M. Granovetter and R. Soong: J. Math. Sociology 9(1983)165.
- [9] 橋本昇、豊田規人: 物性研究 72(1999)89.
- [10] R. L. Stratonovich: Topics in Theory of Random Noise(Gordon and Breach, New York, 1963)Vol. I.
- [11] A. Cenys, A. N. Anagnostopoulos and G. L. Bleris: Phys. Lett. A224(1997)346.