

Modular 束に対する語の問題

都立大 理 武内謙介

自由 modular 束に対する ‘語の問題 (w.p.)’ はそれが提示されてから 40 年たつが, 1970 年代になつて急に大きな進歩をみせた. それが一般代数系の $w.p.$ の中で占める位置をある程度顧慮しながら総合報告を行う. 以下はその概略.

$\mathcal{V}$ を代数系の *finitely presented (f.p.) variety*, $\mathcal{V}_f$ を $\mathcal{V}$ に含まれる有限な代数系たちの *class* とする. $A \in \mathcal{V}$ が *residually finite (r.f.)* であるとは, A の異なる 2 元の組 (x, y) のすべてに対して A の準同形 φ が存在して $\varphi(A)$ が有限かつ $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ となることであるが, これは $A \in SP \mathcal{V}_f$ と同値である. A が *f.p.* (すなわち生成元も関係も有限) かつ *r.f.* ならば A の $w.p.$ が解けることはよく知られていたが, 条件 *f.p.* を *recursively presented* に弱めると解けない例が最近群に対して示された. (Meskin, Proc. AMS, 1974).

Freeze (Trans. AMS, 1979) は $FM(5)$ (5 個の生成元を

もつ自由 modular 束) が f.p. でないこと, すなわち 5 個の生成元をもつ f.p. な modular 束 L で $HSP M_5$ (ここで M は modular 束全体の variety) に属さないものがあることを示した. F, K をそれぞれ異なる標数 p, q をもつ可附番無限体とし, L_p, L_q をそれぞれ線形空間 F^4, K^4 の部分空間が作る modular 束とすれば, L は L_p と L_q を適当に 'くっつけ (glue)' て得られる.

Post (1947) は f.p. な半群で w.p. の解けないものを示したが, その presentation は現在 $(2, 5)$, すなわち 2-generated 5-related, にまで改良されている. Hutchinson (J. Algebra, 1973) および Lipshitz (Trans. AMS, 1974) は f.p. な modular 束でその w.p. が解けないものを示したが, Hutchinson (Alg. Univ. 1979) は更に $(5, 1)$ にまでそれを改良した. $(n, 0)$ すなわち自由代数系で w.p. の解けない例は, たとえば可換な loop のある variety に対して与えられていたが (Mal'cev, 1966), これは云はば人間が無理に作ったもので, 天然に存在するものとしては modular 束ではじめて与えられることになる.

Freese (preprint, 1979) は $FM(5)$ の w.p. が解けないことを証明した. これは概略さきの L において体 K の代りに Cohn (Skew Field Construction, 1974) が構成した斜体 D をもつ

て置きかえる。 D の乗法群 D^* は部分群として有限生成な自由群を含むが、その準同形像が $w.p.$ の解けない群と同形になるようにしておけば、求める結果がえられる。自由 modular 束に対する $w.p.$ だけに限定すれば、残された問題は $FM(4)$ の $w.p.$ がどうなるかということである。