

2次元点渦系での粒子性に基づく散逸効果

八柳祐一

YUICHI YATSUYANAGI

静岡大学教育学部

FACULTY OF EDUCATION, SHIZUOKA UNIVERSITY

羽鳥尹承

TADATSUGU HATORI

神奈川大学理学部

FACULTY OF SCIENCE, KANAGAWA UNIVERSITY

1 初めに

円筒境界内に閉じ込められた2次元点渦系の高エネルギー側には、統計力学的に定義された絶対温度が負となる状態が現れうることを、Onsagerは1949年に予言した[1]。我々はこの予言に興味を持ち、それまで計算例がほとんど存在しなかった円筒境界内に閉じ込められた2次元点渦系での検討を行ってきた。その結果の一つがFig. 1に示した平衡分布である(たとえば, [2,3])。系の温度が負となる高エネルギー側では、同符号の点渦同士が凝集してクラスタを形成した状態が平衡解となる。これは、Joyce and Montgomeryにより導かれた負温度点渦系の平衡解[4]を与えるsinh-Poisson分布となっている。

一方、Matthaeusらは、減衰性2次元Navier-Stokes系での平衡分布に関する報告[5]を行っており、周期的境界条件の矩形領域内に人工的に生成したランダムな渦度分布からスタートしたシミュレーションの終状態は、正の渦度と負の渦度が局在した2極構造になることが示されており(原論文Fig. 5参照)、我々と同様に、sinh-Poisson分布となっていることが論文から読み取れる。

以上の事実は、連続系であり有限粘性の2次元Navier-Stokes系の平衡解と、離散系であり非粘性の2次元点渦系の平衡解が類似していることを表している。我々はこの点に今回注目し、点渦系には、実は点渦という粒子性に由来する衝突的な効果が実質的に含まれているのではないかと予想し検討を行った結果、そのような効果を解析的に導くことに成功した。本論文では、この内容についての紹介を行う。

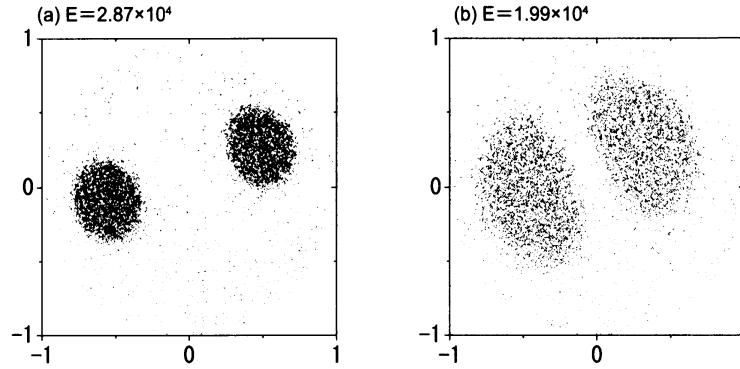


図 1: 時間発展シミュレーションにより時間漸近的に得た負温度点渦系の平衡分布。(a), (b) どちらの場合も、右側のクランプはほぼ正の点渦のみ、左側のクランプはほぼ負の点渦のみから構成されている。系の絶対温度が負となる高エネルギー側では、同符号の点渦が凝集した状態が平衡状態となる。

2 ミクロ系とマクロ系

2次元オイラー方程式

$$\frac{\partial \omega_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_z(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

は、ミクロな粒子解である点渦解を持つ。

$$\omega_z(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \omega_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \right) \\ &= - \sum_i \Omega_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(t) \right) \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \omega_z(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 Ω_i , $\mathbf{r}_i$ は、 i 番目の点渦の循環、および位置ベクトル、 $\delta(\mathbf{r})$ は、Dirac の 2 次元デルタ関数である。我々は、点渦解をみたすオイラー方程式は、実はミクロな粒子方程式であり、それがたまたまマクロな流体方程式と同じ形をしているだけなのではないかと考えた。この点渦解を有するミクロな粒子方程式に対し、何らかの平均操作を施すことにより得られるマクロな流体方程式には、実は、ミクロな点渦という粒子同士の衝突に類する効果に由来する粘性が現れるだろうと予想した。

$$\frac{\partial \langle \omega_z \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \omega_z \rangle = \langle \text{viscous term} \rangle \quad (4)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は平均操作を表す演算子である。

これ以後、ミクロな物理量とマクロな物理量を区別するため、ミクロな物理量には、 $\hat{\cdot}$ を付すことにする。すなわち、ミクロな渦度は、 $\hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t)$ と表される。マクロな渦度は、ミ

クロな渦度の平均

$$\omega_z(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) \rangle_{SE} \quad (5)$$

と定義される。ここで、平均操作を表す演算子の添え字 S, E は、それぞれ空間平均、アンサンブル平均を表し、空間平均は、微小面積要素 Λ に対して、

$$\langle \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) \rangle_S = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda(\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \hat{\omega}_z(\mathbf{r}', t) \quad (6)$$

と定義される。なお、以降、基本的に $\mathbf{r}'$ は空間積分の積分変数として用いることにする。一方、ミクロな渦度は、マクロな渦度 + 揺らぎ

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_z(\mathbf{r}, t) &= \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ &= \omega_z(\mathbf{r}, t) + \delta\omega_z(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7)$$

と定義される。ミクロな渦度に併せて、ミクロな流れ関数、速度場も次のように表され、それぞれ、マクロな平均部分と揺らぎから成る。ここで、 $G(\mathbf{r})$ は 2 次元ポアソン方程式に対するグリーン関数、 $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向の単位ベクトルである。

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

3 拡散係数の導出

出発点は、点渦解を厳密解として持つミクロな渦度方程式である。

$$\frac{\partial \hat{\omega}_z}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\omega}_z = 0 \quad (10)$$

この式に、(7) 式で定義される揺らぎを含んだミクロな渦度を代入する。すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_z(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \omega_z(\mathbf{r}, t)] = -\nabla \cdot \langle \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \delta \omega_z(\mathbf{r}, t) \rangle_{SE} \quad (11)$$

を得る。左辺は全てマクロな量である。一方、右辺には揺らぎの積の平均が残ると考える。この項が、粒子性 (ミクロ性) に由来する拡散項であると考ええる。

$\delta \omega_z(\mathbf{r}, t)$ の具体的表式を得るため、(10) 式に (7) 式で定義される揺らぎを含んだミクロな渦度を代入し、揺らぎに関して 1 次の項を集めた線形化方程式を用いる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \omega_z(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \delta \omega_z(\mathbf{r}, t) = -\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \omega_z(\mathbf{r}, t) \quad (12)$$

この式の左辺第 2 項に現れる $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 、および右辺に現れる $\omega_z(\mathbf{r}, t)$ は、マクロな量であることに注意する。マクロな量は、ミクロなスケールでは変化しない定数と見なすことができると考えると、上式は積分可能で、

$$\delta \omega_z(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \delta \mathbf{u}(\mathbf{r} - (t - \tau) \mathbf{u}, \tau) \cdot \nabla \omega_z(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

を得る。ここで、 $\delta\omega_z(\mathbf{r}, t = -\infty) = 0$ を仮定した。この結果を(11)式右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \langle \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \delta\omega_z(\mathbf{r}, t) \rangle_{SE} &= -\nabla \cdot (\tilde{\eta} \cdot \nabla \omega_z) \\ \tilde{\eta} &= \int_{-\infty}^t d\tau \langle \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - (t - \tau)\mathbf{u}, \tau) \rangle_{SE} \end{aligned} \quad (14)$$

となり、拡散係数に対応するテンソルの具体的表式が得られる。

4 さらに評価

さらに $\tilde{\eta}$ を具体的に評価するため、Fourier変換を導入する。

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) &= \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}' \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \sum_i \Omega_i G(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) &= \int d\mathbf{r}' \hat{\omega}_z(\mathbf{r}', t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \int d\mathbf{r}' \sum_i \Omega_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) &= \int d\mathbf{r}' (-\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \\ &= i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

Fourier逆変換を用いて $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t)$ などを表すと、以下ようになる。

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t) \rangle_{S \text{ at } \mathbf{r}} &= \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda(\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t) \rangle_{SE} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \rangle_E \equiv \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_E(\mathbf{r}, t) \quad (20)$$

ここで、(19), (20)式の被積分関数の中に現れる $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ の $\mathbf{r}$ は空間平均済みなので $\mathbf{r}$ で良い。また、ローパス関数 $L(k\epsilon)$ を導入した。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda(\mathbf{r})} \int_{\Lambda(\mathbf{r})} d\mathbf{r}' \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') &= \langle \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \rangle_S \\ &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \end{aligned} \quad (21)$$

$$L(k\epsilon) \equiv \frac{2}{(k\epsilon)^2} \int_0^{k\epsilon} x J_0(x) dx \quad (22)$$

$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)$ は,

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) &= \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t) - \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle_E(\mathbf{r}, t) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \rangle_E \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\mathbf{k} (\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \rangle_E)
 \end{aligned} \tag{23}$$

となる。 $\bar{\eta}$ に $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)$ を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta} &= \int_{-\infty}^t d\tau \langle \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}', t) \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}' - (t - \tau)\mathbf{u}, \tau) \rangle_{SE} \\
 &= \int_{-\infty}^t d\tau \left\langle \left(\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\mathbf{k} (\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \rangle_E) \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\mathbf{k}' (\exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}' - (t - \tau)\mathbf{u})) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', \tau) \right. \\
 &\quad \left. \left. - \exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - (t - \tau)\mathbf{u})) L(k'\epsilon) \langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', \tau) \rangle_E) \right) \right\rangle_{SE}
 \end{aligned} \tag{24}$$

さらに、(17) 式を用いると、

$$(24) \text{ 式} = \int_{-\infty}^t d\tau \left\langle \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' (\ast 1) \times (\ast 2) \right\rangle_{SE} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 (\ast 1) &= \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \\
 &\quad - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) L(k\epsilon) \langle i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \rangle_E
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 (\ast 2) &= \exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}' - (t - \tau)\mathbf{u})) i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}') \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', \tau) \\
 &\quad - \exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - (t - \tau)\mathbf{u})) L(k'\epsilon) \langle i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}') \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', \tau) \rangle_E
 \end{aligned} \tag{27}$$

となる。

ここで、以下の事項を仮定・確認する。

- 全体にかかる $\langle \cdot \rangle_{se}$ は、四つの項ごとに分割可能。
- $\langle \cdot \rangle_S$ は、 $\mathbf{r}'$ に関する平均であり、 $L(k\epsilon)$ がかかっている項は $\mathbf{r}'$ に関する積分が終了しているの、位置ベクトルは $\mathbf{r}$ となる。
- $\langle \cdot \rangle_E$ は、 $\hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t)$ に対して作用し、 $G(\mathbf{k})$, $G(\mathbf{k}')$ などは、単なる変数であり、粒子種とは無関係なので $\langle \cdot \rangle_E$ の外に出せる。
- $\langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', t) \rangle_E \rangle_E = \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \rangle_E \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', t) \rangle_E$

すると、(25) 式の被積分関数は、

$$\langle (\ast 1) \times (\ast 2) \rangle_{SE}$$

$$\begin{aligned}
&= i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \times [\\
&\quad \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (t - \tau)\mathbf{u}) L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', \tau) \rangle_E \\
&\quad - \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (t - \tau)\mathbf{u}) L(k\epsilon) L(k'\epsilon) \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) \rangle_E \langle \hat{\omega}_z(\mathbf{k}', \tau) \rangle_E] \\
&\hspace{15em} (28)
\end{aligned}$$

と書き換えられる。以下の式

$$\hat{\omega}_z(\mathbf{k}, t) = \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i(t)) \quad (29)$$

$$\hat{\omega}_z(\mathbf{k}', \tau) = \sum_j \Omega_j \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) \quad (30)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned}
(28) \text{ 式} &= i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \times [\\
&\quad \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - (t - \tau)\mathbf{u})) L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \\
&\quad \times \langle \sum_i \sum_j \Omega_i \Omega_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i(t)) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) \rangle_E \\
&\quad - \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - (t - \tau)\mathbf{u})) L(k\epsilon) L(k'\epsilon) \\
&\quad \times \langle \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i(t)) \rangle_E \langle \sum_j \Omega_j \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) \rangle_E] \\
&= i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \times [\\
&\quad L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_i \sum_j \Omega_i \Omega_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r})) \\
&\quad \times \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_j(\tau) + (t - \tau)\mathbf{u} - \mathbf{r})) \rangle_E \\
&\quad - L(k\epsilon) L(k'\epsilon) \\
&\quad \times \langle \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r})) \rangle_E \\
&\quad \times \langle \sum_j \Omega_j \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_j(\tau) + (t - \tau)\mathbf{u} - \mathbf{r})) \rangle_E] \\
&\hspace{15em} (31)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで,

$$\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r} \equiv \Delta \mathbf{r}_i(t) \quad (32)$$

$$\mathbf{r}_j(\tau) - \mathbf{r} \equiv \Delta \mathbf{r}_j(\tau) \quad (33)$$

とする。 $\Delta \mathbf{r}_i(t)$ は原点を $\mathbf{r}$ とした第 i 粒子の位置ベクトルである。

$$\begin{aligned}
(31) \text{ 式} &= i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \times [\\
&\quad L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_i \sum_j \Omega_i \Omega_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}_i(t)) \\
&\quad \times \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\Delta \mathbf{r}_j(\tau) + (t - \tau)\mathbf{u})) \rangle_E \\
&\quad - L(k\epsilon) L(k'\epsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \langle \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\Delta\mathbf{r}_i(t))) \rangle_E \\
& \times \langle \sum_j \Omega_j \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) + (t-\tau)\mathbf{u}) \rangle_E] \quad (34)
\end{aligned}$$

ここで, $\sum$ を $i=j$ の場合と $i \neq j$ の場合に分離する。

$$\begin{aligned}
& = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') \times [\\
& \quad L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_i \Omega_i^2 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r}_i(t)) \\
& \quad \times \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\Delta\mathbf{r}_i(\tau) + (t-\tau)\mathbf{u})) \rangle_E \\
& \quad + L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_{i \neq j} \Omega_i \Omega_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r}_i(t)) \\
& \quad \times \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\Delta\mathbf{r}_j(\tau) + (t-\tau)\mathbf{u})) \rangle_E \\
& \quad - L(k\epsilon) L(k'\epsilon) \\
& \quad \times \langle \sum_i \Omega_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\Delta\mathbf{r}_i(t))) \rangle_E \\
& \quad \times \langle \sum_j \Omega_j \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) + (t-\tau)\mathbf{u}) \rangle_E] \quad (35)
\end{aligned}$$

第2, 第3項は近似的にゼロとする。第1項については,

$$\Delta\mathbf{r}_i(\tau) = \Delta\mathbf{r}_i(t) - (t-\tau)\mathbf{u} + \delta\mathbf{r}_i(\tau) \quad (36)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\text{第1項} & = L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_i \Omega_i^2 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r}_i(t)) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot (\Delta\mathbf{r}_i(t) + \delta\mathbf{r}_i(\tau))) \rangle_E \\
& = L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \langle \sum_i \Omega_i^2 \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \Delta\mathbf{r}_i(t)) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \delta\mathbf{r}_i(\tau)) \rangle_E \quad (37)
\end{aligned}$$

となる。ここでの $\Delta\mathbf{r}_i$ は, 確率変数 $\Delta\mathbf{r}$ の標本値とみなす。

以上より,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} & = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} \\
& \quad \times \int_{-\infty}^t d\tau L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \Omega \int d\Delta\mathbf{r} \omega_z(\Delta\mathbf{r}) \\
& \quad \times \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \Delta\mathbf{r}) \langle \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \delta\mathbf{r}_i(\tau)) \rangle_E \quad (38)
\end{aligned}$$

を得る。次に, ブラウン運動理論におけるキュムラント展開の結果を導入する [6]。

$$\langle \delta\mathbf{r}(\tau) \rangle = 0 \quad (39)$$

$$\langle (\delta\mathbf{r}(\tau))^2 \rangle = 2\eta(\Delta\mathbf{r})(t-\tau) \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\langle \exp(-i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r}(\tau)) \rangle_E & = \exp\left(-\frac{\langle (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r})^2 \rangle}{2}\right) \\
& = \exp(-k^2 \eta(\Delta\mathbf{r})(t-\tau)) \quad (41)
\end{aligned}$$

を用いると,

$$(38) \text{ 式} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' G(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}') i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} \int d\Delta\mathbf{r} L(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|\epsilon) \Omega\omega_z(\Delta\mathbf{r}) \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{k^2 \eta(\Delta\mathbf{r})} \quad (42)$$

最後の $\frac{1}{k^2 \eta(\Delta\mathbf{r})}$ は τ の積分による。 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$ と置換すると,

$$\begin{aligned} &= \int d\Delta\mathbf{r} \frac{\Omega\omega_z(\Delta\mathbf{r})}{\eta(\Delta\mathbf{r})} \\ &\quad \times \int d\boldsymbol{\kappa} L(\boldsymbol{\kappa}\epsilon) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta\mathbf{r}) \\ &\quad \times \int d\mathbf{k}' G(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}') G(\mathbf{k}) i(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}') \times \hat{\mathbf{z}} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} \\ &= \int d\Delta\mathbf{r} \frac{\Omega\omega_z(\Delta\mathbf{r})}{\eta(\Delta\mathbf{r})} \int d\boldsymbol{\kappa} L(\boldsymbol{\kappa}\epsilon) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta\mathbf{r}) F(\boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad (43)$$

となる。ここに,

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k}' \frac{1}{|\mathbf{k}'|^4} i\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{z}} \frac{-i(\mathbf{k}' - \boldsymbol{\kappa}) \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k}' - \boldsymbol{\kappa}|^2} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} &\int d\boldsymbol{\kappa} L(\boldsymbol{\kappa}\epsilon) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta\mathbf{r}) F(\boldsymbol{\kappa}) \\ &\approx F(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\kappa} 1 \cdot \exp(-\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta\mathbf{r}) \\ &= F(0) (2\pi)^2 \delta(\Delta\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\eta(0) = \frac{(2\pi)^2 \Omega\omega_z(0)}{\eta(0)} F(0) \quad (46)$$

すなわち,

$$\eta(0) = \sqrt{(2\pi)^2 \Omega\omega_z(0) F(0)} \quad (47)$$

を得る。ここで, $\omega_z(0)$ はローカルな密度, $F(0)$ はシステムサイズに依存し, 大きければ大きいほど効く項である。 a をシステムサイズとすると

$$\begin{aligned} O(F(0)) &= \frac{1}{|\mathbf{k}'|^2} \propto a^2 \\ \eta(0) &\approx 2\pi \sqrt{\Omega\omega_z(0) F(0)} \propto \sqrt{N}\Omega \end{aligned} \quad (48)$$

となり, ローカルな粘性は, 粒子数の $1/2$ 乗に比例するという結果が得られる。

5 考察・結論

2次元点渦系において、粒子性に起因する粘性が表れることをプラズマの世界でよく知られる Klimontovich formula に従い導出した。従来、点渦系のシミュレーションでは、Leonard が点渦系のシミュレーションに関する review において指摘したこと [7]: "It now appears that using an increased number of point vortices of decreased strength will not yield a converged solution. ... Ironically, best results with the point vortex method often are achieved by using only a few vortices with a diffusive time integration scheme." に端的に語られているとおり、粒子数を上げると結果が思わしくなくなることが経験的に知られていた。今回の我々の結果は、この経験則が実は正しく、粒子数に依存した粘性が点渦シミュレーションには実効的に導入されていることを表している。

なお、本結果については、シミュレーションにより数値的に検討することも可能であり、現在、課題として取り組んでいる最中である。

- [1] L. Onsager: *Nuovo Cimento Suppl.* **6** (1949) 279.
- [2] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida and T. Ebisuzaki: *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 054502.
- [3] 八柳祐一: 数理解析研究所講究録「オイラー方程式の数理: 渦運動 150 年」 **1642** (2009) 87.
- [4] G. Joyce and D. Montgomery: *J. Plasma Phys.* **10** (1973) 107.
- [5] W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton and D. Montgomery: *Physica D* **51** (1991) 531.
- [6] 戸田盛和, 久保亮五: 統計物理学 (岩波講座 現代物理学の基礎) (岩波書店, 東京, 2004) Chap. 5.
- [7] A. Leonard: *J. Comput. Phys.* **37** (1980) 289.