

Morse の理論について

教育大 理 高橋恒郎

Morse の理論は二つの部分に分れている。一つは、多様体上に与えられた函数の臨界点と、多様体の位相構造との関係を与える理論であり、他方は、Riemann 多様体上の測地線の理論である。この二つは勿論密接な関係があるが、ここでは測地線の理論にはふれない。

§1 においては必要な言葉の定義と、Morse 理論の主な結果を述べる。(定理等の証明はすべて省略した。) §2 において簡単な例として 2 次元の輪環面上の特別な函数について考察してみた。

§1. 定義と定理.

M を n 次元の微分多様体とし、 f を M 上で定義された微分可能な函数とする。(ここで微分可能とは class C^∞ , i.e. すべての階数の偏導函数が存在するという意味で用いる)。

$\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$ を M の点 p のまわりの局所座標系としたとき、

点 p において

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial u^1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial u^n} = 0$$

が成り立つとき、点 p を f の臨界点 (critical point) といい、
臨界点において f のとる値を f の臨界値 (critical value) と
いう。

例えば、点 p において f が極大値、又は極小値をとるなら
ば、 p は f の臨界点である。

点 p が f の臨界点であるとき、 p において

$$(2) \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

なる行列を考える。これは n 次の正方形行列で、これを点 p に
おける f のハッセの行列という。ハッセの行列は座標系のと
り方に依存するが、その負の固有値の数 (重複もこめて) お
よび階数は座標系に依存しない。そこで、ハッセの
行列の負の固有値の数を臨界点 p の指標 (index) といい、又
ハッセの行列が退化しないとき、 p は正則な (non-degenerate)
臨界点という。

次の定理は臨界点のまわりの函数の変化の具合と、指標
との関係を与えるだけでなく、Morse の理論の基礎になる定
理である。

定理 1. (Morse の Lemma) M の点 p が指標 λ の正則な臨界点ならば, p のまわりの局所座標系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ を適当にとつて, p の座標は $(0, 0, \dots, 0)$ で, しかも p の十分小さな近傍において, 函数 f を

$$(3) \quad f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

と表わすことが出来る.

この定理から直ちに次の事がわかる.

系 1. 正則な臨界点は孤立臨界点である. (i.e. 点 p を正則な臨界点とすると, 点 p の十分小さな近傍内には臨界点は存在しない).

系 2. 正則な臨界点 p において, 函数 f が極大値 (又は極小値) をとるための必要十分条件は, p の指標が $m = \dim M$ (又は 0) なることである.

さて, 函数 f と実数 a に対して, M の部分集合 M^a を

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \mid p \in M, f(p) \leq a\}$$

とする. $M^{-\infty}$ は空集合であり, M^∞ は M 自身とする.

一般に位相空間 X に対し, X の k 次元のバッチ数を $R_k(X)$

(係数群は適当に一つ定めておく), X とその部分集合 A に対して, X の A を基底とする相対バッチ数を $R_k(X, A)$ と書くことにする.

定理 2. $a, b \in \mathbb{R}$ なる実数と, $f^{-1}[a, b] (= \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\})$ なる M の点 p の全体) はコンパクトでしかも臨界点を含まないとする. このとき, M^a は M^b に微分同型で, 特に

$$(4) \quad \begin{cases} R_k(M^a) = R_k(M^b) \\ R_k(M^b, M^a) = 0 \end{cases} \quad k=0, 1, \dots, n$$

である.

(4) は a から b までの間に臨界値が存在しないとき, M^a と M^b のバッチ数に変化がないことを示す. 従ってバッチ数に変化がみられるのは, その間に臨界値が存在するときで, その場合は次の定理により示される.

定理 3. 実数 a が臨界値で, a を臨界値にもつ臨界点は $p_1, p_2, \dots, p_k$ でそれらはすべて正則で, 指標は $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とする. もし十分小さな $\varepsilon > 0$ をとったとき, $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ 内には a 以外に臨界値はなく, $f^{-1}[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ はコンパクト

とすると, $M^{a+\varepsilon}$ は $M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}$ と同じホモ

トロピーをもつ. 特に,

$$(5) \quad R_k(M^{a+\varepsilon}) = R_k(M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

すなわち, $M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}$ は, $M^{a-\varepsilon}$ に $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_R}$

なる cell を attach したものである. (e^{λ} は λ 次元の cell).

一般に位相空間 X に対して

$$(6) \quad R_k(X \cup e^{\lambda}, X) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = \lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. したがって次の系を得る.

系. 定理 3 と同じ仮定のもとに, a を臨界値にもつような指標 λ の正則な臨界点の個数を $C_\lambda(a)$ とすると,

$$(7) \quad R_\lambda(M^{a+\varepsilon}, M^{a-\varepsilon}) \leq C_\lambda(a)$$

が成り立つ.

この系と定理 3 より, M^a のバッチ数は a が段々と増大するにつれて, a が指標 λ の正則な臨界点の臨界値を乗り越すたびに, 増えるが, その増え方は, 臨界点の個数以下である.

(これは厳密な言い方ではない) ことがわかる.

以上の事と簡単な計算により次の Morse の不等式が得られる.

定理 4. M がコンパクトな微分多様体で, f は M 上の微分可能な函数で正則な臨界点だけをもつとする. 指標 λ なる臨界点の個数を C_λ とするとき, 次の不等式が成り立つ.

$$(8) \quad R_\lambda(M) \leq C_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

$$(9) \quad \chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda C_\lambda$$

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k R_{\lambda-k}(M) \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k C_{\lambda-k} \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

ここに $\chi(M)$ は, M の Euler 標数であって

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k R_k(M)$$

で与えられる.

以上が Morse の理論の概略であるが, 定理 4 において仮定したように, 函数 f の臨界点はすべて正則であるという仮定を必要としたが, その点については次の二つの定理がある.

定理 5. 任意の n 次元の微分多様体 M において, 正則な臨

界点しかもたず、しかも各任意の実数 a に対して M^a がコンパクトになる様な微分可能な函数が存在する。

定理 6. M 上の任意の微分可能な函数 g に対して、 g が有界ならば、正則な既約点しかもたない函数で g に近似的に近づくことができる。

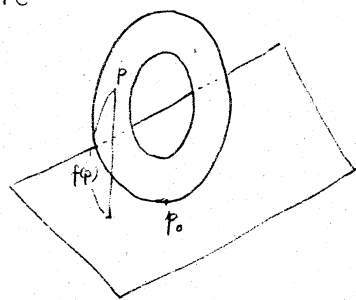
§ 2. 輪環面における例.

3次元ユークリッド空間内で輪環面を考える。簡単のために、半径 b の円をその中心から $a (> b)$ だけ離れた直線のまわりに回転して出来たものとする。これを M とすると M は2次元の微分多様体である。 M 上の一点 p_0 における接平面から M 上の任意の点 p までの高さを $f(p)$ としよう。

回転軸を y 軸にとり、点 $(a, 0, 0)$ を中心とし半径 b の円を xy -平面内に考え、これを y 軸のまわりに回転したものと考える。

このとき、 M は (u, v) を適当にとつて

$$(1) \quad \begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = b \sin u \\ z = (a + b \cos u) \sin v. \end{cases}$$



と表わすことが出来る。 p_0 として $(0, 0, -(a+b))$ なる点を

とるこ、 f は

$$(12) \quad f(u, v) = (a + b \cos u) \sin v + a + b.$$

とるこ、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -b \sin u \sin v, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (a + b \cos u) \cos v$$

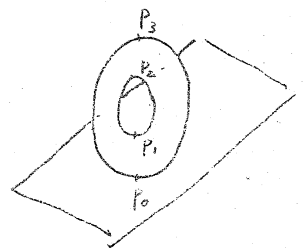
より臨界点を求めると、次の様な表を得る。

臨界点	(u, v)	(x, y, z)	$f(p)$	ヘッセの行列	指標
p_0	$(0, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a+b))$	0	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$	0
p_1	$(\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a-b))$	$2b$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$	1
p_2	$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0, (a-b))$	$2a$	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	1
p_3	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0, a+b)$	$2(a+b)$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \cos u \sin v & -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \cos v & -(a + b \cos u) \sin v \end{pmatrix}$$

より各臨界点でのヘッセの行列、および指標は又上の表の様になる。従ってすべての臨界点は正則である。

臨界点の位置は右の図の様になっている。



次に、 $c \in \mathbb{R}$ とし、 M^c の変化の様子をみてみる。

(1) $c < 0 = f(p_0)$ のとき M^c は空集合.

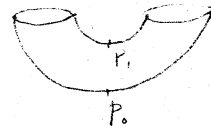
(2) $0 < c < 2a = f(p_1)$ のとき M^c は

2-cell に同位相.



(3) $2a < c < 2a = f(p_1)$ のとき M^c は

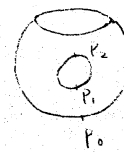
円柱に同位相.



(4) $2a < c < 2(a+b) = f(p_2)$ のとき M^c は

円を境界にもつ genus 1 の 2 a パ

クトな曲面.



(5) $2(a+b) < c$ のとき $M^c = M$

以上の各々の場合のバッチ数を求めると次の表の様になり

通り越した臨界点の指標が n のとき n 次元のバッチ数が n

度 1 (臨界点の数) だけ増えることがわかる.

c	$R_0(M^c)$	$R_1(M^c)$	$R_2(M^c)$
$c < 0$	0	0	0
$0 < c < 2a$	1	0	0
$2a < c < 2a$	1	1	0
$2a < c < 2(a+b)$	1	2	0
$2(a+b) < c$	1	2	1

この場合は $R_n(M) = C_n$ である.