

エルゴード理論と Transversal Commutation Relation

津田塾大 小和田 正

§ 1. 序

エルゴード理論の永い歴史の眼裡に対して、Ya. G. Sinai は一つの目覚ましい光を与えた。即ち、いわゆる撞球問題のエルゴード性を証明した（実はもっと強い性質をもつことを示したのであるが）。この事に関しては、本講義録の久保氏の報告に精しいので、本稿に於いては重複を避けるが、Sinai によるこの著明な結果に使われている基本的アイデアの一つに Transverse field がある。この用語と概念を明確に用いたのは Sinai を嚆矢とするように思われるが、Sinai に先立つもう一つの著しい結果 — 負の定曲率を有する様体上の geodesic flow がエルゴード的であることを示した E. Hopf の結果に於いても Transverse field のアイデアの系形が使われていることが知られるのである。更に歴史的にさかのぼると、S. Lie が或る種の

常微分方程式の積分因子を求めるのに、Transverse に相当する idea を使っていることがうかがい知られる。

この様に Transverse field の概念は古くから有効に使われてきたのであるが、Sinai は 撞球問題 にあきつぎ、一般的な可測な流れが K-flow であることと、Transverse flows を用いて判定する方法を提示した。

以下に於いて、Transverse を一つの交換関係として定式化し、そのエルゴード理論への応用について述べてみたい。詳細については文献[3]を参照していただきたい。

§2. 定義

応用に際して当面する ~~幾何~~ 状況の多様性にそなえて、Transversal Commutation Relation (以下 T.C.R. と略記) を次のように、少し莫然と定義しておく。

G_1, G_2 を二つの群とし、 X を適当な空間とする。 X 上の、 G_1, G_2 の元をパラメーターに持つ二つの変換群 $\{T_g; g \in G_1\}$ と $\{Z_h; h \in G_2\}$ とが 交換関係

$$T_g Z_h = Z_{T_g(h)} T_g$$

をみたすとき、 $\{Z_h\}$ は $\{T_g\}$ の transversal group であるという、上の交換関係を T.C.R. と呼ぶ。但し T_g は、各 $g \in G_1$ に対して、 G_2 上の isomorphism である。

空間 X は m -space, Hilbert空間, または色々な確率空間
と考えることが多い。又 G_1 は 整数全体 または 実数全体
 R , G_2 は R^n であることが多い。

T.C.R. からすいぬかえることがあつか、各 T_g は
 $\{Z_h\}$ による $x \in X$ の軌道, $\{Z_h x; h \in G_2\}$ を
他の軌道 $\{Z_h T_g x; h \in G_2\}$ に変換する。この事は
本質的である。ざつぱくにいえば、 $\{Z_h\}$ は 座標系
のような役目を果たし $\{T_g\}$ についての情報を与えてくれるし
、 $\{Z_h\}$ を調らべるのに、「その上の」変換達 $\{T_g\}$ が
 $\{Z_h\}$ についての情報を与えてくれるのである。Sinai
の撞球問題のアイデアは前者のパターンに属するものと云えよ
う。我々もかゝる立場から トーラス上の群自己同型の同型
問題を考える。又後者の見地から可測な流れ $\{Z_h; h \in R\}$
を調らべる。

§3 エルゴード理論のいくつかの問題と T.C.R.

以下に於いて、T.C.R. とエルゴード理論の二、三の問題
とのかゝり方について述べる。

(1) Spectral type of flow

$J = (\Omega, B, P, T_t)$ を flow とした時、 J の

スペクトル型とは $L^2(\Omega, P)$ 上に T が induce する unitary operators の 1-parameter group $\{U_t\}$ の スペクトル型を云う。 H を a separable Hilbert space, U を H 上の unitary operator 及び $\{V_\lambda\}$ を 1-parameter group of unitary operators on H であり T.C.R. をみたすものとする。 即ち $X = H$, $G_1 = \text{整数全体}$, $G_2 = \mathbb{R}$, $T_n(t) = \lambda^n t$, $n \in G_1$, $t \in \mathbb{R}$ 且 λ は $|\lambda| \neq 1$ なる実数。で

$$U_n V_t = V_{\lambda^n t} U_n, \quad (*)$$

$U_n = U^n$ とおいて置くものとする。 この時

定理 1. U に対し上記の関係 (*) をみたす $\{V_\lambda\}$ が存在すれば U は σ -Lebesgue スペクトル をもつ。

同様に H 上の 1-parameter group of unitary operators $\{U_t\}$ についても その transversal group が存在することから次の結果が得られる。

定理 2. H 上の 1-parameter group of unitary operators $\{U_t\}$ に対して T.C.R. をみたす 1-parameter group of unitary operators $\{V_\lambda\}$ が存在すれば $\{U_t\}$ は uniform Lebesgue スペクトル をもつ。

$$U_t V_\lambda = V_{\lambda e^{it}} U_t \quad \lambda \neq 0$$

をみたす 1-parameter group of unitary operators $\{V_\lambda\}$ が存在すれば $\{U_t\}$ は uniform Lebesgue スペクトル をもつ。

上の二つの定理を利用すれば、ロバチエフスキー平面上の geodesic flow が σ -Lebesgue スペクトル をもつことが容易にわかる。この結果は Gelfand-Formis によって automorphic function theory 及び $SL(2, R)$ の マック表現 を使うことにより示されている。我々の方法は、線形に簡単な operators の計算のみによっている。

[II] 群自己同型の同型問題

M_n を n -次元トーラス。 A を群 M_n 上の自己同型とする。 P を M_n 上の 正規化された Ham measure とし、 A は P -不変とすれば A は unimodular integral matrix と同一して良い。 A の行列が実固有値 λ をもつ場合、 λ に対応する固有ベクトル x を用い

$$g_t = t x \pmod{1}$$

とおけば $\{g_t\}$ は M_n の 1-parameter subgroup となり flow $\{Z_t\}$; $Z_t g = g + g_t$ $g \in M_n$ は T.C.R.

$$AZ_t = Z_{\lambda t} A$$

をみたす。更に一般に 任意の A に対し、 m -parameter subgroup $\{g_t; t \in R^m\} \subset M_n$ が存在し、 m -parameter flow $\{Z_t; t \in R^m\}$; $Z_t g = g + g_t$

は、或る正則な $m \times m$ 行列 T があって $T.C.R.$

$$AZ_t = Z_{Tt} A$$

をみたし $\{Z_t\}$ は ergodic ~~である~~ 離散スペクトルをもつようにできる。これを用いて

定理3. M_n 上の 群自己同型 A_1 及び A_2 に対して

$$1) \quad A_i Z_A^{(i)} = Z_{T_A}^{(i)} A_i \quad (i=1,2).$$

2) $\{Z_A^{(i)}\}$ は ergodic で 離散スペクトルをもち

$\{Z_A^{(1)}\}$ と $\{Z_A^{(2)}\}$ は スペクトル 同値

をみたす 多次元パラメーターの flow $\{Z_A^{(i)}\}$ $i=1,2$ が存在することが A_1 と A_2 とが metrically isomorphic であるの必要十分条件である。

群自己同型に関する同型問題は R.L. Adler and B. Weiss において エントロピーが完全不変量であることが示されているが、我々の方法の利点は 同型対応の ~~対応関係~~ 構造がわかりやすい点にある。しかるに 我々の不変量である transversal group $\{Z_A\}$ の構造は 必しも容易ではない。

[III] Time change of flow

与えられた可測な flow を time change した時、その性質はどのように変るか という問題を考える。

$J = (\Omega, \mathcal{B}, P, T_t)$ is a standard space $(\Omega, \mathcal{B})$ on a measurable flow, $\tau(t, \omega)$ is a time change function of J as follows. $S_t \omega = T_{\tau(t, \omega)} \omega$ is defined by a measurable transformation group $\{S_t\}$ on an invariant measure μ and a flow $\mathcal{J} = (\Omega, \mathcal{B}, \mu, S_t)$ is of the same type as J by σ . That is,

$$\sigma T_t \sigma^{-1} \omega = S_t \omega = T_{\tau(t, \omega)} \omega \quad \omega \in \Omega$$

such a transformation exists. The fact is an isomorphism σ between $\{T_t\}$ and T.C.R. means the same thing. ~~逆に~~ $\{T_t\}$ and T.C.R. means a measurable transformation σ exists

$$\sigma T_t \sigma^{-1} \omega = S_t \omega$$

$$\mu(\sigma E) = P(E), \quad E \in \mathcal{B}$$

by σ , a flow $\mathcal{J} = (\Omega, \mathcal{B}, \mu, S_t)$ is defined. $\mathcal{J}$ is of the same type as J and $S_t \omega = T_{\tau(t, \omega)} \omega$ for some $\tau = \tau(t, \omega)$. So $\mathcal{J}$ is a time changed flow of J . So the time changed flows of J are of the same type. The problem is to find a measurable transformation σ between $\{T_t\}$ and T.C.R. to determine the same thing. In this problem setting, that is, the following result is obtained.

定理4 $J = (\Omega, \mathcal{B}, P, T_t)$ を 2次元トーラス Ω 上の
微分方程式 $dx/dt = 1, \quad dy/dt = r \quad (r \text{ は無理数})$

によって定義される流れとし、 $\mathcal{J} = (\Omega, \mathcal{B}, P, \mathcal{J}_t)$ を

$$dx/dt = 1/K(x, y), \quad dy/dt = r/K(x, y)$$

によって定義される流れとし、もし r に対し

$$|nr + m| > L / (|n| + |m|)^H \quad \text{が 全ての}$$

整数 m, n について成立するような 正数 L と H が 存在す

れば、 $K(x, y) \in C^{(k)}$ なる関数について $\mathcal{J}$ は J と

同型である。

文献

- [1] R. L. Adler and B. Weiss: Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, Proc. of N.A.S. of U.S.A., vol. 57, No. 6 (1967)
- [2] I. M. Gelfand and S. V. Fomin: A geodesic flow on manifold of constant negative curvature, Uspehi Math. Nauk, t. VII, b. 1 (1952)
- [3] M. Kowada: Transversal Commutation Relation and its Applications to Ergodic Theory, Seminar on Probability vol 36
- [4] I. Kubo: 撞球問題, Seminar on Probability vol 37

- [5] Ya.G. Sinai; Dynamical systems with countable
Lebesgue spectrum II, Izv. AN. SSSR, 30(1966)
(in Russian)