

# On contingent equations

神大 理 菊 池 紀夫

$F(t, x)$  は  $I(=[t_0, t_1]) \times R^m$  で定義され, 値を  $R^m$  の compact set にとる集合値関数であるものとし, つぎの関係

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

を *Contingent equation* とよぶ。Hukuhara に始まり, Marchaud, Zarembka の研究がある。これは, 微分不等式を拡張したものであるが, また, 制御関数  $u(t)$  と含む制御方程式系

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \in R^m,$$

$$u(t) \in U \subset R^r$$

をつぎのよう

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),$$

$$F(t, x) \equiv f(t, x, U)$$

に考えることにより, 自然にあらわれてくるものである。

「Contingent equation の解」の存在について、まづ、考えてみる。ここで、解とは、「 $I$  で絶対連続、 $I$  のほとんどいたる所で Contingent equation をみたす関数」のことである。

常微分方程式の解の存在証明における Cauchy の折れ線  $x_n(t)$  は

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x_n(t)) + \varepsilon_n(t)$$

をみたす。ただし、折れ線  $x_n(t)$  は、「その区間最大中が  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に近づく」分割  $D_n$  に応じて作られたものであり、 $\varepsilon_n(t) \in \mathbb{R}^m$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 0 \quad \text{uniformly on } I$$

なるものである。ここで、「 $f(t, x)$  の有界性」を仮定するならば、 $\{\dot{x}_n(t)\}$  は有界となり、たとえば、Cauchy 問題と考えるとすれば、 $\{x_n(t)\}$  は正規族となる。その一様収束の極限関数を  $x(t)$  とすると、「 $f(t, x)$  の  $x$  に関する連続性」があるならば、右辺は  $n \rightarrow \infty$  のとき  $f(t, x(t))$  に一様収束する。したがって、 $\{\dot{x}_n(t)\}$  も一様収束し、微分作用素が閉であることに注意すれば、

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

となり、すなわち、解の構成が得られる。

さて、Contingent equation においても、常微分方程式

の場合と同じように、「 $F(t, x)$  に適当な滑らかさ (Hausdorff の距離に関して)」があるならば

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, x_n(t)) + \varepsilon_n(t)$$

する Cauchy の折れ線列  $\{x_n(t)\}$  を作ることができる。「 $F(t, x)$  の有界性」を仮定するならば、 $\{x_n(t)\}$  は正規族となり、その極限関数  $x(t)$  であらわす。「 $F(t, x)$  の  $x$  に関する連続性」があるならば、右辺は  $F(t, x(t))$  に収束する。しかし、「 $\{\dot{x}_n(t)\}$  の挙動」は、一般には、わからない。特に、「 $F(t, x)$  の値が  $\mathbb{R}^m$  の Convex set」であると仮定するならば、その「convexity」と「 $\{\dot{x}_n(t)\}$  の有界性により得られる弱収束性 (たとえば、関数空間  $L^1(I)$  における)」とを組み合わせることにより、 $n \rightarrow \infty$  としたとき

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

となり、解を構成することができる。さらに、常微分方程式における性質と同じように、「解の族の Compact 性」、「linearity の性質」、「Hukuhara 現象」がなりたつ。また、「Hukuhara 現象」ともつ解  $x(t)$  については

$$\dot{x}(t) \in \partial F(t, x(t))$$

のなりたつことがわかる。

つぎに、「 $F(t, x)$  の convexity」を仮定しない場合を

考える。Wojewski は解の概念を拡張し、その「一般化された解」の存在を示した。すなわち、 $I$  で連続な関数  $x(t)$  にたいし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{x}_n(t) = \dot{x}(t) \quad \text{uniformly on } I,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\dot{x}_n(t), F(t, x_n(t))) = 0 \quad \text{a.e. } I$$

なる  $I$  で絶対連続な関数列  $\{x_n(t)\}$  が存在するとき、 $x(t)$  を「一般化された解」とあるとし、 $F(t, x)$  の適当な滑らかさのもとに、その解の存在することを示し、解の間の関係を調べている。また、Filippov は「 $F(t, x)$  の  $(t, x)$  に関する Lipschitz 条件」と仮定して一階連続微分可能な解の存在を示している。なほ、「 $F(t, x)$  の  $(t, x)$  に関する絶対連続」の仮定のもとで、一階連続微分可能な解の存在は言える。

$I$  で定義された集合値関数  $F(t)$  が

$$f(t) \in F(t) \quad \text{a.e. } I$$

なる可積分関数  $f(t)$  をもつものと仮定する。このとき、

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^t f(t) dt; f(t) \in F(t) \text{ a.e. } I, f(t) \text{ integrable on } I \right\}$$

で、 $F(t)$  の積分を定義する。この積分の定義は、Aumann により、はじめて、きちんとあたえられたようである。この積分を用いて

$$x(t) \in x(t_0) + \int_{t_0}^t F(t, x(t)) dt$$

をみたす  $I$  で絶対連続な関数  $x(t)$  を「一般化された解」と定義しよう。この解は「Ważewski の一般化された解」と一致し、さらに、「 $\text{co} F(t, x)$  ( $F(t, x)$  の convex hull) に対応する contingent equation」の解とも一致することが確かめられる。したがって、「一般化された解の族」には「 $F(t, x)$  の convexity」を仮定した場合に得られる解の性質があることになる。ただし、最後の性質は

$$\dot{x}(t) \in \partial \text{co} F(t, x(t)) \quad \text{a.e. } I$$

となる。この性質は、ある  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^m$  が存在して

$$\dot{x}(t) \cdot \gamma(t) = \sup F(t, x(t)) \cdot \gamma(t) \quad \text{a.e. } I$$

となり、特に

$$F(t, x) \equiv f(t, x, U)$$

となる制御方程式系の場合と考えると、 $x(t)$  に対応する制御関数を  $u(t)$  とするとき

$$f(t, x(t), u(t)) \cdot \gamma(t) = \sup_{u \in U} f(t, x(t), u) \cdot \gamma(t) \quad \text{a.e. } I$$

すなわち、「Pontryagin の最大原理」を指している。