

# Lie 群の proper 作用の同変 Whitehead 群

大阪市大理 荒木捷朗 (Shôvô Araki)

研究集会では「Whitehead 群, 同変 Whitehead 群,  $G$ -expansion 図」の表題で, 代表者の要請により expository な話としてなされた講演であるが, やはり細かい点で正確さを期す必要もあり, 時肉的に不可能である。

そこで, 講演中に含まれていた今迄より若干新しい部分についてのみ, 表題を変えて報告することにした。

同変 Whitehead 群についての従来の理論は, コンパクト Lie 群の作用に関するもの ([I1], [I2], [A]) で, たゞその展開の最終段階に nonコンパクト Lie 群の proper 作用の (ある制限を受けた) 同変 Whitehead 群があらわれるので, proper 作用について統一的に展開する方がよくないかとの高井氏 (都立大) 等の御指摘もあり, その線に沿って [A] を再編成してみた。

## 1. proper 作用の同変 Whitehead 群.

$G$  を Lie 群とし,  $G$  が作用する空間 ( $G$ -空間) は常に

局所コンパクト, Hausdorff, とする. (Palais [P] は completely regular, Hausdorff, で論じているが,  $G$ -CW 複体等々ためには上の若干強い条件の方が便利である. 又, この方が特に強い制限にならないことは, 例えは  $G$  がコンパクトなとき有限  $G$ -CW 複体はコンパクト Hausdorff 空間で, 上の条件をみたしていることを指摘しておけば充分であろう).

Lie 群  $G$  が (上の条件を満たす) 空間  $X$  に左から作用するとする. Palais [P] はこの作用が proper になるための 5 つの同値条件をのべている. その一つをとって proper  $G$ -空間を定義する.

$X \supset U$  に対し,  $((U, U)) = \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$  とおく.  
 $((U, U))$  がコンパクトなとき,  $U$  を thin set という.

$G$ -空間  $X$  が proper (又は proper  $G$ -作用をえつ) とは, ①  $X \ni x$ ,  $x$  は thin な近傍をえつ, ii)  $G \backslash X$  (orbit 空間) が Hausdorff, を充していること.

定義より, proper  $G$ -空間  $X$  の各点  $x$  での isotropy 群  $G_x$  はすべてコンパクトになる.

勿論コンパクト Lie 群の作用はすべて proper である.

$G$  のコンパクト Lie 部分群  $H$  に対し,  $G/H \times D^n$  ( $D^n$  は  $\mathbb{R}^n$  の単位  $n$ -disk) は, 勿論 proper  $G$  空間で, これは (euclidean) proper  $n$ - $G$ -cell という.  $f: G/H \times S^{n-1} \rightarrow X$  ( $S^{n-1} = \partial D^n$ ) を

(連続な)  $G$ -写像とし,

$$Y = X \cup_f G/H \times D^m$$

を  $G$ -空間  $X$  に  $n$  次元 proper  $G$ -cell を attach した  $G$ -空間 という.

補題 1.1  $X, Y$  が proper  $G$ -空間で,  $X = G \cdot C$ ,  $C$  は  $X$  のコンパクト集合, となっていてるとき,  $G$ -写像  $f: X \rightarrow Y$  は (局所コンパクト空間間の連続写像として) proper 写像である.

この証明は proper  $G$ -作用の基本的性質より容易にわかる. この補題を用いると, 次の命題が示される.

命題 1.2  $X$  は proper  $G$ -空間,  $Y = X \cup_f G/H \times D^m$  を  $X$  に proper  $G$ -cell を attach した  $G$ -空間とすると,  $Y$  も proper  $G$ -空間になる.

特に有限個の proper  $n$ - $G$ -cells を同時に proper  $G$ -空間  $X$  に attach した  $G$ -空間 ( $X$  の有限 proper  $n$ - $G$ -cellular extension) も proper  $G$ -空間である.

$G$ -空間の列

$$X = V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \cdots$$

で,  $X$  は proper  $G$ -空間,  $V^n$  は  $V^{n-1}$  の有限 proper  $n$ - $G$ -cellular extension となっていてるものを考える. 各  $V^n$  は proper  $G$ -空間である.

$V = \operatorname{colim}_n V^n$  は一般にはわからないが,  $\exists m > 0$ ,  $V = V^m$  のときには  $V$  は proper  $G$ -空間で, このとき  $(V, X)$  を

有限相対 proper  $G$ -CW 複体 といふ。通常の  $n \geq 1$  とく、各

$$V^n - V^{n-1} = \bigsqcup_i b_i^n, \quad b_i^n = G/H_i \times \text{Int } D^n,$$

と有限個の proper (1桁)  $n$ - $G$ -cells の disjoint union に分解される。

其指数  $(H_i) \in G$ -cell  $b_i^n$  の (isotropy) type といふ。このことより

り、有限相対 proper  $G$ -CW 複体  $(V, X)$  においては、 $V-X$  は有限個の proper  $G$ -cells の disjoint union に分解されている。

上にのべたことは一部をまとめる。

命題 1.3.  $(V, X)$  を有限相対 proper  $G$ -CW 複体とすると、

$V$  は proper  $G$ -空間である。

elementary  $G$ -expansion を通常  $n \geq 1$  とく定義する ([II1], [AI]).

$(W, X) < (V, X)$  を有限相対 proper  $G$ -CW 複体の 包含 (即ち、

$W-X$  の  $G$ -cells は  $V-X$  の  $G$ -cells の一部よりなる) とし、このとき

$$(W, X) \nearrow_e (V, X), \quad \text{elementary } G\text{-expansion rel } X,$$

であるとは、

$$V - W = b^{n-1} \sqcup b^n$$

となる  $G$ -cells よりなり、 $G$ -字像

$$f: G/H \times D^n \rightarrow V$$

$$\text{すなわち } D^n = S^{n-1} = D_+^{n-1} \cup D_-^{n-1}, \quad D_+^{n-1} \cap D_-^{n-1} = S^{n-2} \text{ とする。}$$

$$f|_{G/H \times \text{Int } D^n}: G/H \times \text{Int } D^n \approx b^n, \quad G\text{-同相},$$

$$f|_{G/H \times \text{Int } D_+^{n-1}}: G/H \times \text{Int } D_+^{n-1} \approx b^{n-1}, \quad G\text{-同相},$$

となる  $f$  が存在すること。このとき  $b^{n-1}, b^n$  は同じ type

(H) とし、特に  $\text{type}(H)$  の elementary  $G$ -expansion とし、これが  
ある。

有限相對 proper  $G$ -CW 複体の elementary  $G$ -expansions を包含  
写像とみて、その有限個の合成を formal  $G$ -expansion とし、  
 $(W, X) \nearrow (V, X)$  等と記す。

$G$  の Lie 部分群よりなる集合  $\mathcal{F}$  への条件をみたすもの  
を考へる: i)  $\mathcal{F} \ni \forall H$  はコンパクト. ii)  $\mathcal{F} \ni H, H \sim H' \text{ (共轭)} \Rightarrow$   
 $H' \in \mathcal{F}$ . このような  $\mathcal{F}$  を  $G$  の コンパクト部分群の族 とし、 $\mathcal{F}$   
 $\mathcal{F}$  は  $G$  の compact 部分群のいくつかの共轭類の union としてあ  
らわされる。

$X$  を proper  $G$  空間,  $\mathcal{F}$  を  $G$  の compact 部分群の族とし、次  
の 図  $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  を考へる.  $\text{Obj } \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  は有限相對 proper  
 $G$ -CW 複体  $(V, X)$  について、i)  $X \subset V$  が  $G$ -ホモトピー同値, ii)  $V-X$   
の各  $G$ -cells の  $\text{type} \subset \mathcal{F}$ , をみたすものよりなる.  $\text{Hom } \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$   
は上の objects 間の formal  $G$ -expansions よりなる. 同様に構成して  
作られた有限相對 proper  $G$ -CW 複体は同値とみなせば、この  
図 は小 図 になる.  $\mathcal{F} = \{\text{all}\} = \{\text{all compact subgroups}\}$  のとき、  
 $\mathcal{E}_G(X) = \mathcal{E}_G(X, \{\text{all}\})$  と書く。

$\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  の objects について、 $(V, X) \nearrow (W, X)$  のとき、これは  
同値とみて、この関係が generate された同値関係  $\sim$  を考へる。

$$\mathcal{W}h_G(X, \mathcal{F}) = \text{Obj } \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F}) / \sim$$

$$Wh_G(X) = \text{Obj } \mathcal{E}_G(X) / \sim$$

と置く.

$\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  の object  $(V, X)$  が代表する  $Wh_G(X, \mathcal{F})$  の元を  $[V, X]$  と書く.  $i: X \subset V$  は  $G$ -homotopy 同値  $i$  は  $G$ -cofibration であるから  $X$  は  $V$  の (strong)  $G$ -deformation retract である.  $\Rightarrow$  の objects  $(V_1, X), (V_2, X)$  に対し

$$(V_1, X) + (V_2, X) = (V_1 \cup_X V_2, X)$$

と置く.  $V_1, V_2$  が  $X$  への  $G$ -deformation retractions の和により,  $X$  は  $V_1 \cup_X V_2$  の  $G$ -deformation retract.  $\Rightarrow$   $(V_1, X) + (V_2, X)$  が  $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  の object になる.  $\Rightarrow$  の objects の和は morphism を保つから  $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  は "category with sum" になる.  $\Rightarrow$  の和は  $Wh_G(X, \mathcal{F})$  の和と等しい,  $Wh_G(X, \mathcal{F})$  は abelian monoid ( $[X, X]$  を 0 とする) になる. 実は abel 群になるが, それはあとで示される.

$f: X \rightarrow Y$  を proper  $G$  空間への  $G$  写像とする.  $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$  の object  $(V, X)$  に対し,  $(V \cup_f Y, Y)$  は  $\mathcal{E}_G(Y, \mathcal{F})$  の object になる. 対応  $(V, X) \mapsto (V \cup_f Y, Y)$  は morphism と和を保存し, 和を保つ functor

$$f_{\#}: \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{E}_G(Y, \mathcal{F})$$

と置く. ~~等~~ 同型

$$f_*: Wh_G(X, \mathcal{F}) \rightarrow Wh_G(Y, \mathcal{F})$$

を誘導する.  $f, g: X \rightarrow Y$  を  $G$ -ホモトピーのとき,  $\gamma$  の  $G$ -ホモトピー  $F: f \simeq_G g$  を用い,  $E_G(X, \mathcal{F})$  の object  $(V, X)$  に対して  $(V \times I \cup_F Y, Y)$  なる  $E_G(Y, \mathcal{F})$  の object を考えよう.  ~~$V-X$~~   $V-X$  の各  $G$ -cell  $e$  と  $\gamma$  による cylinder  $e \times I$  を elementary  $G$ -expansion を構成することから, skeleton-wise,  $G$ -cell-wise に

$$(V \cup_f Y, Y) \nearrow (V \times I \cup_F Y, Y) \nwarrow (V \cup_g Y, Y)$$

が通常の論法で示され, 特には

$$f_*[V, X] = g_*[V, X].$$

つまり,  $f_*$  は  $G$ -homotopy functor になる.

定理 1.4.  $E_G(X, \mathcal{F})$  の objects の包含  $(V, X) < (W, X)$  (部分複体) が与えられ,  $\gamma$  とする. (こゝで  $\gamma$  は  $G$ -retraction  $\gamma: V \rightarrow X$  が存在し,  $(W, V)$  は  $E_G(V, \mathcal{F})$  の object になる).

このとき

$$[W, X] = \gamma_*[W, V] + [V, X] \in Wh_G(X, \mathcal{F}).$$

この定理の証明は [11], Chap. II, Lemma 2.2, と全く同じであるから省略するが, この定理は 同変 Whitehead 群の理論でかなりの重要性をもつ.

定理 1.5.  $Wh_G(X, \mathcal{F})$  は  $\mathbb{A}$ - $\mathbb{A}$  群になる.

証明の概略.  $(V, X) \in E_G(X, \mathcal{F})$  の object とする.  $X$  は  $V$  の  $G$ -deformation retract なるから,  $G$ -retraction  $\gamma: V \rightarrow X$  が存在する. このとき,  $M_\gamma \in \mathcal{F}$  は mapping cylinder,  $\bar{M}_\gamma = M_\gamma / \sim$ ,

$\sim$  は  $w_1: X \times I \rightarrow X$  と  $X \times I \simeq X$  とを同一視する同位関係,  
 とおく  $(\bar{M}_r, X)$  は  $\mathcal{E}_G(X, \mathbb{F})$  の object と  $(X, X) \nearrow (\bar{M}_r, X)$ .  
 よって

$$[\bar{M}_r, X] = 0 \in Wh_G(X, \mathbb{F}).$$

包含  $(V, X) \subset (\bar{M}_r, X)$  に対して上の定理 1.4 を適用すると,

$$0 = [\bar{M}_r, X] = \gamma_* [\bar{M}_r, V] + [V, X].$$

即ち  $\gamma_* [\bar{M}_r, X]$  が  $[V, X]$  の加法逆元で,  $Wh_G(X, \mathbb{F})$  のすべての  
 元は加法逆元をもつ. (3).

特に,  $\mathcal{P}\text{-Top}_G$  は proper  $G$  空間とその  $G$  写像の圏とす  
 と, 対応:  $X \mapsto Wh_G(X, \mathbb{F})$ , " $f: X \rightarrow Y$ "  $\mapsto f_*$  により  $G$ -本元  
 トピ-圏

$$Wh_G(\cdot; \mathbb{F}): \mathcal{P}\text{-Top}_G \rightarrow ab$$

が得られることになる.

(proper 作用の) 単体ホモトピー-理論では,  $Wh_G(X)$  ~~を~~  $Wh_G(X, \mathbb{F})$  として  
 の圏ととしての naturality を考慮しなから, 直和分解し, その  
 直和因子をより単純なものに帰着させ, 更に直和分解し,  
 ... の過程を繰り返して, 最終的にはいくつかの discrete 群の古典  
 的な Whitehead 群の直和と同型を得るものと理解してよ  
 い.

## 2. 同変単体ホモトピー-理論

前節の記号をそのまま使用する.

定理 2.1. (Hanschild)  $X$  に関する natural な次の直和分解が成立する.

$$Wh_G(X, \mathcal{T}) \cong \coprod_{(H) \in \mathcal{T}} Wh_G(X, (H))$$

$$Wh_G(X) \cong \coprod_{(H)} Wh_G(X, (H)).$$

但し,  $\mathcal{T}$  の分解の直和は  $\mathcal{T}$  に含まれるすべての群の位数に  
わたり,  $\mathcal{T}$  の分解の <sup>(直和は)</sup>  $G$  のすべてのコンパクト部分群の位数  
をわたる.

証明の方針.  $\mathcal{T}$  の直和分解は  $\mathcal{T} = \{\text{all}\}$  なる特別の場合 ~~である~~ であるから,  $\mathcal{T}$  の直和分解を示せばよい. 先づ特別の場合として,  $\mathcal{T}$  が有限 ( $\mathcal{T}$  に含まれる群の数が有限) の場合を示す.  $G$  のコンパクト部分群の位数に関する  $\leq$  は, 「 $(H) \leq (K) \Leftrightarrow \exists g \in G, gHg^{-1} \subset K$ 」により順序が入る.  $\mathcal{T}$  は有限と仮定したから, この順序で極大な元  $(H)$   $< \mathcal{T}$  が定まる.  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - (H)$  とおく.  $(H)$  の代表元  $H$  への  
送心,  $E_G(X, \mathcal{T})$  の object  $(V, X)$  に対し,  $(G \cdot V^H \cup X, X)$  を考へる.  
 $V$  の  $X$  への  $G$ -deflation retraction を  $G \cdot V^H \cup X$  に制限すると,  $(H)$  の  
極大性より, これは  $G \cdot V^H \cup X$  の  $X$  への  $G$ -deflation retraction にな  
る. morphism に関する同一に考察をすると, 和を得る関数

$$a: E_G(X, \mathcal{T}) \rightarrow E_G(X, (H))$$

$$((V, X) \mapsto (G \cdot V^H \cup X, X))$$

を得るが,  $X$  に関する natural な準同型

$$a_+ : Wh_G(X, \mathbb{F}) \rightarrow Wh_G(X, (H))$$

を誘導する.  $\gamma : G \cdot V^H \cup X \rightarrow X$  は  $G$ -retraction かつ  $\gamma$  の map は

について考察して, 準同型

$$b_+ : Wh_G(X, \mathbb{F}) \rightarrow Wh_G(X, \mathbb{F}')$$

$$([V, X] \mapsto \gamma_+ [V, G \cdot V^H \cup X])$$

を得る.  $\gamma$  は  $i : X \subset G \cdot V^H \cup X$  の  $G$ -homotopy inverse であるから, 上の対応は  $\gamma$  のとり方によらず  $\gamma$  well-defined. 準同型

$$c : Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathbb{F}') \rightarrow Wh_G(X, \mathbb{F})$$

を  $c([V_1, X], [V_2, X]) = [V_1 \cup_X V_2, X]$  により与える. 定義

より  $(a_+ \oplus b_+) \circ c = 1$

は明らか.  $c \circ (a_+ + b_+) = 1$

は定理 1.4 より得られる. よって直和分解

$$Wh_G(X, \mathbb{F}) \cong Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathbb{F}')$$

が得られた.  $\mathbb{F}$  は有限かつ  $\mathbb{F}'$  は  $\mathbb{F}$  に  $\mathbb{F}'$  について同じ論法をくりかえし,  $\mathbb{F}$  が有限かつ  $\mathbb{F}'$  の直和分解

$$Wh_G(X, \mathbb{F}) \cong \coprod_{(H) \in \mathcal{C}\mathcal{F}} Wh_G(X, (H))$$

が得られる. 上の証明の逆略より, 2つの右から左への対応は

$$\coprod_i (V_i, X) \mapsto (\bigcup_X V_i, X)$$

で与えられることを示す.

一般の場合は  $\mathbb{F}$  に含まれる有限族  $\mathbb{F}_\alpha$  をすべて考え, 包含によって  $\mathbb{F} = \text{colim}_\alpha \mathbb{F}_\alpha$  となっている. よって直和

分解と colim との可換性より ~~一般~~ 一般の場合の直和分解が得られる。

注意 一般の場合  $\tau$  を右側から左側への写像は

$$\coprod_{\alpha} [V_{\alpha}, X] \mapsto [\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}, X]$$

になっている。ただし、 $\{[V_{\alpha}, X]\}$  は有限個を除き 0 であり、 $\tau$  は代表元を  $[X, X]$  におきかえたと  $(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}, X)$  が well-defined  $\tau$ ,  $X$  のようにになっている。  $X$  についての自然性は  $\tau$  の対応から明らかである。

上の証明のあり方は Hauschild [H] の  $\alpha$  のと本なり置る。 Hauschild の証明は、あまり簡単に書きすぎていると理解しにくい。

$H$  を  $G$  の コーバクト部分群とし、 $NH$  を  $H$  の  $G$  における normalizer とすると、 $NH$  は  $G$  の部分群になり、 $X^H$  は proper  $NH$ -空間になる。  $H$  は  $X^H$  上に自明に作用するから、 $WH = NH/H$  となり、 $X^H$  は proper  $WH$ -空間になる。

定理 2.2 (Hauschild).  $X$  についての自然な同型

$$Wh_G(X, (H)) \cong Wh_{WH}(X^H, (1))$$

が成立する。

対応は、左から右へは " $[V, X] \mapsto [V^H, X^H]$ ", 右から左へは " $[W, X^H] \mapsto \langle G \times_{NH} W \cup_f X, X \rangle$ ",  $f = G \times_{NH} X^H \rightarrow G \cdot X^H \subset X$ ,  $\tau$  によって決まる。  $X$  についての自然性もすぐ

わかる。

この注意すべきことは、 $X$  が proper 有限  $G$ -CW 複体として  $E_G(X, (H)) \rightarrow \text{object}(V, X)$  が proper 有限  $G$ -CW 複体と部分複体の対 (Illman 流のやり方) として、 $V-X$  の  $G$ -cells と  $V^H-X^H$  の  $G$ -cells は 1:1 に対応するから  $V^H-X^H$  の有限性は保障されるが、 $X^H$  は有限  $WH$ -CW 複体には必ずしもならない。相対  $G$ -CW 複体で定義することの利便が proper 作用の同変単純性をもとに理論が初めてあらわれたと云えるかも知れない。

次に  $Wh_{WH}(X^H, (1))$  を更に分解する。

定義 proper  $G$ -空間  $X$  が 局所  $G$ -0-連結 とは、 $G \triangleright^v H$ ,  $\Gamma$  2コンパクト部分群, に対し  $X^H$  が局所弧状連結であること。更に 局所  $G$ -1-連結 とは, i)  $X$  は局所  $G$ -0-連結, ii)  $G \triangleright^v H$ ,  $\Gamma$  2コンパクト部分群, に対して  $X^H$  の各弧状連結成分が半局所 1-連結 (普遍被覆空間をもつ条件) であること。

$X$  は局所  $G$ -0-連結であるとする。  $X^H$  を弧状連結成分に分解し,  $\gamma$  の  $WH$ -orbits をまとめると,

$$X^H = \coprod_{\alpha} WH \cdot X_{\alpha}^H \quad (X_{\alpha}^H \text{ はある弧状連結成分})$$

と proper  $WH$ -部分空間の位相和に分解される。各  $WH \cdot X_{\alpha}^H$  を  $X^H$  の  $WH$ -成分 といいよう。

定理 2.3.  $X$  が局所  $G$ -0-連結のとき, 直和分解

$$Wh_{WH}(X^H, (1)) \cong \coprod_{\alpha} Wh_{WH}(WH \cdot X_{\alpha}^H, (1))$$

が成立つ。

この分解は  $[V, X^H] \in \text{Wh}_{WH}(X^H, (1))$  に対し,  $\gamma: V \rightarrow X^H$   
 を WH-retraction とし,  $V_\alpha = \gamma^{-1}(\text{WH} \cdot X_\alpha^H)$  とおき, 対応

$$[V, X^H] \mapsto \coprod_\alpha [V_\alpha, \text{WH} \cdot X_\alpha^H]$$

により得られる。

上の定理の  $X$  に関する naturality に関することは,  $f: X \rightarrow Y$   
 が局所 G-0-連結 proper G-空間の G-写像で,  $f^H: X^H \rightarrow Y^H$  の  
 弧状連結成分の bijection (従って WH-成分の bijection) を与え  
 るものとして, 次の diagram が可換であるとき  $f$  naturality  
 が成立つ

$$\text{Wh}_{WH}(X^H, (1)) \cong \coprod_\alpha \text{Wh}_{WH}(\text{WH} \cdot X_\alpha^H, (1))$$

$$\downarrow f^H$$

$$\downarrow \coprod_\alpha \bar{f}_\alpha^H$$

$$\text{Wh}_{WH}(Y^H, (1)) \cong \coprod_\alpha \text{Wh}_{WH}(\text{WH} \cdot Y_\alpha^H, (1)).$$

但し,  $f^H(X_\alpha^H) \subset Y_\alpha^H$  (と),  $\bar{f}_\alpha^H: \text{WH} \cdot X_\alpha^H \rightarrow \text{WH} \cdot Y_\alpha^H$  ( $f^H$  の制  
 限で得られる WH-写像) とする。

次に  $\text{Wh}_{WH}(\text{WH} \cdot X_\alpha^H, (1))$  を reduce する。  $\text{WH} \cdot X_\alpha^H$  の一つの  
 連結成分  $X_\alpha^H$  を選ぶ

$$W_\alpha H = \{w \in WH \mid w \cdot X_\alpha^H \subset X_\alpha^H\}$$

とおく。明らかに

$$W_\alpha H \supset (WH)_0, \quad WH \text{ の } 1\text{-成分}$$

よって  $WH/W_\alpha H$  は discrete, 即ち  $W_\alpha H$  は  $WH$  の閉部分群。よって

$WH \cdot X_\alpha^H$ ,  $X_\alpha^H$  は proper  $W_\alpha H$ -空間になる.

定理 2.4. 次の同型が成立.

$$Wh_{WH}(WH \cdot X_\alpha^H, (1)) \cong Wh_{W_\alpha H}(X_\alpha^H, (1)).$$

この同型は,  $G$ -写像  $f: X \rightarrow Y$  が定理 2.3 の下の naturality 条件をみたすものに對して natural である.

上の定理の対応は " $[V, WH \cdot X_\alpha^H] \mapsto [V_\alpha, X_\alpha^H]$ ", 但し  $V_\alpha$  は  $V$  の  $X_\alpha^H$  を含む連結成分, によって得られる.

次に,  $X$  が  $G$ -1-連結とする.  $\bar{X}_\alpha^H$  は  $X_\alpha^H$  の普遍被覆空間とする.  $\bar{X}_\alpha^H$  は 局所コンパクト, Hausdorff 空間である.

Illman [I2] に従い,  $\bar{X}_\alpha^H$  には次の Lie 群  $\underbrace{W_\alpha H}_\Gamma$  が proper に作用する. 2段階に分けて構成する.

i)  $W_\alpha H$  が  $X_\alpha^H$  に effective に作用しているとき.

$$\text{Homeo}(\bar{X}_\alpha^H) \supset \Gamma_{H,\alpha} = \{f: \bar{X}_\alpha^H \rightarrow \bar{X}_\alpha^H, f \text{ は } W_\alpha H \text{ の 作用を cover している}\}.$$

$$\text{Pps. } \exists w \in W_\alpha H, \bar{X}_\alpha^H \xrightarrow{f} \bar{X}_\alpha^H \text{ が不変.}$$

$$\begin{array}{ccc} m \downarrow & & \downarrow m \\ X_\alpha^H & \xrightarrow{w} & X_\alpha^H \end{array}$$

$\pi_{H,\alpha} = \pi_1(X_\alpha^H)$  は  $\bar{X}_\alpha^H$  上に被覆変換群として作用させると,

短完全列

$$\{1\} \rightarrow \pi_{H,\alpha} \rightarrow \Gamma_{H,\alpha} \rightarrow W_\alpha H \rightarrow \{1\}$$

が得られる. 特に, Lie 群  $W_\alpha H$  の discrete 部分群  $\pi_{H,\alpha}$  による

拡大して,  $\Gamma_{H,2}$  は Lie 群である. したがって,  $\Gamma_{H,2}$  は  $\hat{X}_2^H$  上の作用が proper であることがわかる.

ii)  $W_2H$  の  $X_2^H$  上の作用が effective であるとき,

$X_2^H$  は free elementary  $W_2H$ -expansion  $\varepsilon \rightarrow \text{attach}$  であり,  $\varepsilon$  上の  $W_2H$  の作用は effective である.  $\varepsilon$  上に  $\Gamma_{H,2}$  を構成し,  $\varepsilon$  を  $\hat{X}_2^H$  上に制限する. この action は free elementary  $W_2H$ -expansion  $\alpha \text{ attach}$  の仕方によらないことが示される.

このようにして一般に  $\hat{X}_2^H$  は proper  $\Gamma_{H,2}$ -空間にできる.

定理 2.5.  $X$  が局所  $G$ -1-連結のとき, 同型

$$Wh_{W_2H}(X^H, (1)) \cong Wh_{\Gamma_{H,2}}(\hat{X}_2^H, (1))$$

が成立つ. この同型は次の意味で natural である. 局所  $G$ -1-連結な proper  $G$ -空間  $X$  の  $G$ -写像  $f: X \rightarrow Y$  が  $G \triangleright \nabla H$ , compact, に対して  $f^H: X^H \rightarrow Y^H$  が連結成分の bijection  $\varepsilon$  を与え, 更に各成分について  $\pi_1$  の同型を与えているとき,

$$Wh_{W_2H}(X_2^H, (1)) \cong Wh_{\Gamma_{H,2}}(\hat{X}_2^H, (1))$$

$$\downarrow f_2^H$$

$$\downarrow f_2^H$$

$$Wh_{W_2H}(Y_2^H, (1)) \cong Wh_{\Gamma_{H,2}}(\hat{Y}_2^H, (1))$$

が可換.

最後に.

定理 2.6.  $X$  が局所  $G$ -1-連結のとき, 同型

$$Wh_{\Gamma_{H,2}}(X^H_{\alpha}, (1)) \cong Wh(\pi_0(\Gamma_{H,2}))$$

が成り立つ。この同型の右辺は discrete 群  $\pi_0(\Gamma_{H,2})$  の代数包を Whitehead 群。更に定理 2.5 の naturality の条件の下で

$$\begin{array}{ccc} Wh_{\Gamma_{H,2}}(X^H_{\alpha}, (1)) & \cong & Wh(\pi_0(\Gamma_{H,2})) \\ \downarrow f^H_{\alpha+} & & \\ Wh_{\Gamma_{H,2}}(\tilde{X}^H_{\alpha}, (1)) & \cong & \end{array}$$

が可換になる。

上の定理の同型は [I 2] の証明と同様に行えばよい。

定理 2.6, 定理 2.5, 定理 2.4, 定理 2.3, 定理 2.2 の naturality を逆にたどると次の定理を得る。

定理 2.7.  $f: X \rightarrow Y$  を proper  $G$ -空間間の  $G$ -写像とし、 $X, Y$  は局所  $G$ -1-連結で、 $f^H: X^H \rightarrow Y^H$  が連結成分の bijection と、各連結成分  $\gamma$  の  $\pi_1$  の同型を定めて、

$$f_{\gamma}: Wh_G(X, (H)) \cong Wh_G(Y, (H)), \text{ 同型.}$$

この定理は同変  $S$ -コホモロジー定理の証明に利用される。

### 3. 同変 $S$ -コホモロジー定理

この節では  $G$  はコンパクト Lie 群とする。  $(W, X, Y)$  が  $G$ - $C^\infty$ -コホモロジー定理 であるというのは、 $W$  はコンパクト  $C^\infty$ - $G$ -多様体で  $W = X \sqcup Y$  と 2 つの成分に分かれ、更に包含  $i_X: X \subset W, i_Y: Y \subset W$  が  $G$ -ホモトピー同値になっているとき。

$W$  にあらわゆる isotropy 群  $H, K$  に対し, 夫々  $H$ -,  $K$ -不動点多様体を

$$W^H = \coprod_{\lambda} W_{\lambda}^H, \quad W^K = \coprod_{\mu} W_{\mu}^K$$

と連結成分に分解する. 次の 2 つの条件を考へる.

(\*1) すべて組  $(K, H), (\mu, \lambda)$  について

$$W_{\mu}^K \not\supset W_{\lambda}^H \Rightarrow \dim W_{\mu}^K - \dim W_{\lambda}^H \geq \dim G + 3.$$

(\*2)  $H$  が極大 isotropy 群のとき, すべて  $\lambda$  について

$$\dim W_{\lambda}^H \geq \dim G + 6.$$

同変  $S$ -コホモロジー定理 次の形で成立つ.

定理 3.1. (松本-川久保)  $G$ - $G$ -コホモロジー  $(W, X, Y)$

が次の条件を満たすとする.

$$(i) \tau_G(i_X) = [W, X] = 0 \quad (Wh_G(X) \text{ において})$$

(ii)  $(W, X, Y)$  は条件 (\*1), (\*2) を満たす.

$$\Rightarrow (W, X) \cong (X \times I, X \times \{0\}) : G\text{-微分同相 rel } X.$$

この定理の証明には松本-塩田 [MS] のコンパクト  $G$ -微分多様体に対する同変 Whitehead torsion の well-definedness を利用し, 上の定理 2.7 及び川久保 [K] の論法を用いる. 松本-塩田の論法は, 実解析的  $G$ -多様体に帰着するもので, かつ  $G$ -CW-分割ではないから, それを用いる証明にはかなりの注意を要する.

最近, 青木-加藤は上の条件 (\*1), (\*2) を次の形に変え

ていふ

(\*)3) すべての組  $(K, H), (\mu, \lambda)$  について

$$W_{\mu}^K \not\subset W_{\lambda}^H \Rightarrow \dim W_{\mu}^K - \dim (W_{\mu}^K \cap G \cdot W_{\lambda}^H) \geq 3,$$

(\*)4)  $H$  が極大 isotropy 群のとき, すべての  $\lambda$  に対して

$$\dim (W_{\lambda} H \setminus W_{\lambda}^H) \geq 6.$$

よって, 上の定理 3.1 の条件 (ii) を次の条件

(ii')  $(W, X, Y)$  は条件 (\*3), (\*4) を満たす

でおきかえ, この形での定理 3.1 と同じ結論が得られること  
ていふ。

証明は, 荒木-川久保 [AK] と同じことであるが, この  
形の才により一般性をもちて考えられる。更に  $G$ - $\mathfrak{h}$ -コホモ  
ロロジーの 実現性定理, 一意性定理 も得られるようであ  
る。

一般の Lie 群  $G$  の proper 作用についての  $G$ - $\mathfrak{h}$ -コホモロ  
ジ  $(W, X, Y)$  を考える。このときは  $W$  がコンパクトと仮定出  
来ないが, " $G \backslash W$  が コンパクト" なる仮定を入れると, 同変  
 $S$ -コホモロジ  $\mathfrak{h}$  定理が成り立つだろうと云われていたが,  
証明があるのか, ないのか, 小生にはまだゆかでない。

(以上)

# 文 献

[A] S. Araki, Equivariant Whitehead groups and  $G$ -expansion categories, Advanced Studies in Pure Math, vol. 9 (to appear).

[AK] S. Araki - K. Kawakubo, Equivariant  $s$ -cobordism theorems (to appear).

[H] H. Hurschild, Äquivariante Whitehead torsion, Manuscripta math. 26 (1978), 63-82.

[I1] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci., Fenn., Ser. AI, 558 (1974), 1-45.

[I2] S. Illman, Actions of compact Lie groups and the equivariant Whitehead group, Osaka J. Math. (to appear).

[K] K. Kawakubo, Compact Lie group actions and fibre homotopy type, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 295-321.

[MS] T. Matsumoto and M. Shiota, Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications, Advanced Studies in Pure Math., vol. 9 (to appear).

[P] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. of Math., 73 (1961), 295-323.