

トレース不等式から見た不確定性関係 II

柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)

城西大学理学部 (Faculty of Science, Josai University)

1 Introduction

量子力学で有名な不確定性関係は, Heisenberg や Schrödinger によって発見された. それらはほとんど Schwarz's inequality を使う関係で積型のものであった. 最近和型の不確定性関係が多く出されてきている. ([1],[2],[11] など). 今まではエントロピーについての和型不確定性関係が得られていたのみで, 他には全くと言っていいほど積型以外のものはなかった.

Proposition 1.1 物理量 A, B が次のスペクトル分解をもつとする.

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad B = \sum_{j=1}^n \mu_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|.$$

任意の量子状態 $|\varphi\rangle$ に対して, 次の2つの確率分布を定義する.

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad Q = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

ただし

$$p_i = |\langle \phi_i | \varphi \rangle|^2, \quad q_j = |\langle \psi_j | \varphi \rangle|^2.$$

それらの *Shannon entropy* を $H(P), H(Q)$ とする.

$$H(P) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad H(Q) = - \sum_{i=1}^n q_i \log q_i,$$

このとき次の和型不確定性関係が成り立つ.

$$H(P) + H(Q) \geq -2 \log c,$$

ただし $c = \max_{i,j} |\langle \phi_i | \psi_j \rangle|$ である.

Definition 1.1 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ の *Fourie 変換* を

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

で定義する. また $Q(\mathbb{R})$ を次のように定義する.

$$Q(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

このとき次が成り立つ.

Proposition 1.2 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\|^2 = 1$ で $\psi, \hat{\psi} \in Q(\mathbb{R})$ が成り立つならば

$$S(\psi) + S(\hat{\psi}) \geq \log \frac{e}{2}$$

が成り立つ. ただし

$$S(\psi) = - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \log |\psi(t)|^2 dt, \quad S(\hat{\psi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 \log |\hat{\psi}(t)|^2 dt.$$

Definition 1.2 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列全体, $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ エルミート行列全体, $M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 正定値複素行列全体, $M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 密度行列全体とする. また $M_n(\mathbb{C})$ 上の *Hilbert-Schmidt inner product* は次のように定義される.

$$(A, B)_{HS} = \text{Tr}(A^* B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}} b_{ij},$$

ただし $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して *left multiplicative operator* と *right multiplicative operator* を次のように定義する.

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA, \quad (X \in M_n(\mathbb{C})).$$

Definition 1.3 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は次の条件を満たすとき, 作用素単調関数 (*operator monotone function*) という.

$$A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C}), \quad 0 \leq A \leq B \implies 0 \leq f(A) \leq f(B)$$

作用素単調関数 f は $f(x) = x f(x^{-1})$ を満たすとき対称 (*symmetric*), $f(1) = 1$ を満たすとき *normalized* という. また *symmetric normalized operator monotone function* の全体を $\mathcal{F}_{op}$ とする.

Example 1.1

$$\begin{aligned}
f_{RLD}(x) &= \frac{2x}{x+1}, & f_{SLD}(x) &= \frac{x+1}{2}, \\
f_{BKM}(x) &= \frac{x-1}{\log x}, & f_{WY}(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2} \right)^2, \\
f_{WYD}(x) &= \alpha(1-\alpha) \frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)}, & \alpha &\in (0,1).
\end{aligned}$$

$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対しては $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ とおく. regular function と non-regular function はそれぞれ次のように定義される.

$$\mathcal{F}_{op}^r = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\}, \quad \mathcal{F}_{op}^n = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}.$$

Definition 1.4 ([4],[7]) $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left\{ (x+1) - (x-1)^2 \frac{f(0)}{f(x)} \right\}, \quad x > 0.$$

と定義する.

Example 1.2

$$\tilde{f}_{WY}(x) = \sqrt{x}, \quad \tilde{f}_{WYD}(x) = \frac{x^\alpha + x^{1-\alpha}}{2}, \quad \tilde{f}_{SLD}(x) = \frac{2x}{x+1}.$$

Proposition 1.3 ([4],[5]) $f \rightarrow \tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^r$ と $\mathcal{F}_{op}^n$ の間の 1 対 1 対応を与える.

Kubo-Ando 理論 ([10]) より, matrix mean m_f は operator monotone function と次の関係で結びつけられる.

$f \in \mathcal{F}$ に対して

$$m_f(A, B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$

ただし $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$. そこで monotone metrics を次のように定義することができる.

$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \in M_{n,+1}(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle X, Y \rangle_f = \text{Tr}[X^* m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} Y], \quad X, Y \in M_n(\mathbb{C}),$$

ただし

$$m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} = \sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \lambda_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle \langle \phi_i|} R_{|\phi_j\rangle \langle \phi_j|}$$

と表されることに注意する.

2 Generalized Quasi-metric adjusted skew information

$g, f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の条件 (A) を与える.

$$g(x) \geq k \frac{(x-1)^2}{f(x)}, \text{ for some } k > 0.$$

このとき

$$\Delta_g^f(x) = g(x) - k \frac{(x-1)^2}{f(x)} \in \mathcal{F}_{op}.$$

とおく. さらに次の条件 (B) も考える.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

Definition 2.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する.

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y) &= k \langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y \rangle_f \\ &= k \text{Tr}[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\ &= \text{Tr}[X^*m_g(L_A, R_B)Y] - \text{Tr}[X^*m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y], \end{aligned}$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, X),$$

$$\Psi_{A,B}^{(g,f)}(X, Y) = \text{Tr}[X^*m_g(L_A, R_B)Y] + \text{Tr}[X^*m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],$$

$$J_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Psi_{A,B}^{(g,f)}(X, X),$$

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X) = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot J_{A,B}^{(g,f)}(X)},$$

ただし

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad B = \sum_{j=1}^n \mu_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

に対して

$$m_f(L_A, R_B)^{-1} = \sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \mu_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}$$

と表されることに注意する.

次の結果が得られている.

Theorem 2.1 ([20]) 条件 (A) の下で次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の積型不確定性関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) &\geq |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2 \\ &\geq \frac{1}{16} (I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2. \end{aligned}$$

(2) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対してもし条件 (B) が成り立てば次の積型不確定性関係が成り立つ.

$$(a) \ U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq k\ell |Tr[X^*|L_A - R_B|Y]|^2.$$

$$(b) \ U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2.$$

Proof (1) 第 1 の不等式は [19] で示しているでの、第 2 の不等式のみ示す.

$$\begin{aligned} I_{A,B}^{(g,f)}(X \pm Y) \\ = Tr[(X^* \pm Y^*)m_g(L_A, R_B)(X \pm Y)] - Tr[(X^* \pm Y^*)m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)(X \pm Y)]. \end{aligned}$$

よって次を得る.

$$\begin{aligned} &I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y) \\ &= 2Tr[X^*m_g(L_A, R_B)Y] + 2TrY^*m_g(L_A, R_B)X \\ &\quad - 2Tr[X^*m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y] - 2Tr[Y^*m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)X] \\ &= 2\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y) + 2\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(Y, X) \\ &= 4Re\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)\}. \end{aligned}$$

同様にして

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) + I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y) = 2(I_{A,B}^{(g,f)}(X) + I_{A,B}^{(g,f)}(Y)).$$

よって次を得る.

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y) &= Re\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)\} + iIm\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)\} \\ &= \frac{1}{4} (I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y)) + iIm\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)\}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2 &= \frac{1}{16} (I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2 + (Im\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)\})^2 \\ &\geq \frac{1}{16} (I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2, \end{aligned}$$

(2) (a) は [19] で示されているので (b) のみ示す. [3] の Lemma 3.3 と Lemma 3.4 より

$$m_g(x, y)^2 - m_{\Delta_g^f}(x, y)^2 \geq k\ell(x - y)^2 \geq k\ell \frac{f(0)^2}{k^2} (m_g(x, y) - m_{\Delta_g^f}(x, y))^2.$$

よって

$$m_g(x, y) + m_{\Delta_g^f}(x, y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k} (m_g(x, y) - m_{\Delta_g^f}(x, y)).$$

したがって

$$\begin{aligned} J_{A,B}^{(g,f)}(Y) &= \sum_{i,j} \{m_g(\lambda_i, \mu_j) + m_{\Delta_g^f}(\lambda_i, \mu_j)\} |\langle \phi_i | Y | \psi_j \rangle|^2 \\ &\geq \frac{f(0)^2\ell}{k} \sum_{i,j} \{m_g(\lambda_i, \mu_j) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_i, \mu_j)\} |\langle \phi_i | Y | \psi_j \rangle|^2 \\ &= \frac{f(0)^2\ell}{k} I_{A,B}^{(g,f)}(Y). \end{aligned}$$

(1) の第 1 の不等式より

$$|\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2 \leq I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \leq I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot \frac{k}{f(0)^2\ell} J_{A,B}^{(g,f)}(Y).$$

よって

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot J_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2.$$

同様にして

$$J_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y)|^2.$$

したがって結果を得る. □

3 和型不確定性関係

Theorem 3.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して, 次が成り立つ.

$$(1) \quad I_{A,B}^{(g,f)}(X) + I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{1}{2} \max\{I_{A,B}^{(g,f)}(X + Y), I_{A,B}^{(g,f)}(X - Y)\}.$$

$$(2) \quad \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)} + \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(Y)} \geq \max\{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X + Y)}, \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X - Y)}\}.$$

Proof (1) Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|X\|^2 + \|Y\|^2 &= \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}\max\{\|X+Y\|^2, \|X-Y\|^2\}.\end{aligned}$$

$I_{A,B}^{(g,f)}(X, X)$ は Hilbert-Schmidt norm の 2 乗であるので, $\|X\| = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)}$. したがって上の不等式に代入すれば結論が得られる.

(2) 一般のノルムで成り立つ三角不等式を $\|X\| = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)}$ に対して適用すればよい. $\square$

Theorem 3.2 $\{X_i\}_{i=1}^N, \{Y_j\}_{j=1}^N \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して $X_i^*|L_A - R_B|Y_j = \delta_{ij}C$ と条件 (B) が満たされるとき, 次が成り立つ.

$$(1) \left(\sum_{i=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \right) \left(\sum_{j=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j) \right) \geq Nk\ell |Tr[C]|^2.$$

$$(2) \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \right) \left(\sum_{j=1}^N \sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)} \right) \geq N\sqrt{k\ell} |Tr[C]|.$$

Proof (1) 定理 2.1(2)(a) より

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j) \geq k\ell |Tr[X_i^*|L_A - R_B|Y_j]|^2. \quad (1)$$

したがって

$$\begin{aligned}& \left(\sum_{i=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j) \right) \\ & \geq \sum_{i,j} k\ell |Tr[X_i^*|L_A - R_B|Y_j]|^2 = \sum_{i,j} k\ell |Tr[\delta_{ij}C]|^2 = \sum_{i=1}^N k\ell |Tr[C]|^2 = Nk\ell |Tr[C]|^2.\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \cdot \sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)} \geq N\sqrt{k\ell} |Tr[X_i^*|L_A - R_B|Y_j]|.$$

したがって (1) と同様にして結論が得られる. $\square$

Theorem 3.3 $\{X_i\}_{i=1}^N \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$(1) \sum_{i=1}^N I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \geq \frac{1}{N-2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j) - \frac{1}{(N-1)^2(N-2)} \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} \right)^2$$

$$(2) \sum_{i=1}^N \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \geq \frac{1}{N-2} \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} - \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)} \right) \\ \geq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} \\ \geq \max \left\{ \frac{1}{N-2} \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} - \sum_{i=1}^N \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \right), \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)} \right\},$$

$$(3) \frac{1}{N(N-1)^2} \left\{ \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} \right)^2 + \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i - X_j)} \right)^2 \right\} \\ \leq \sum_{i=1}^N I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \\ \leq \frac{1}{N} \sum_{i < j} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i - X_j) + \frac{1}{N(N-1)^2} \left(\sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i + X_j)} \right)^2$$

これらの不等式を証明するには次の Lemma を用いればよい。

Lemma 3.1 Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|$ を $M_n(\mathbb{C})$ 上の norm とすると, $\{A_i\}_{i=1}^N \subset M_n(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ。

$$(1) \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| \leq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \leq \sum_{i=1}^N \|A_i\|$$

$$(2) \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| + (N-2) \sum_{i=1}^N \|A_i\| \geq \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|$$

$$(3) \frac{1}{N-2} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| - \frac{1}{N-2} \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| \geq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|$$

$$\geq \max \left\{ \frac{1}{N-2} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| - \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N \|A_i\|, \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| \right\}$$

$$(4) \quad \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\|^2 + (N-2) \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 = \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|^2$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 \leq \frac{1}{N} \left(\sum_{i < j} \|A_i - A_j\|^2 + \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \right)^2 \right)$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 \geq \frac{1}{N} \left\{ \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \right)^2 + \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i - A_j\| \right)^2 \right\}$$

Proof (1) 一般に $\{x_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N x_i + \sum_{j=1}^N x_j \right) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i + x_j) \\ &= \frac{1}{2N} \left\{ 2 \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i \neq j} (x_i + x_j) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{1}{2N} \left\{ \sum_{i < j} (x_i + x_j) + \sum_{i > j} (x_i + x_j) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{1}{N} \sum_{i < j} (x_i + x_j). \end{aligned}$$

よって

$$\left(1 - \frac{1}{N} \right) \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i < j} (x_i + x_j).$$

したがって

$$\sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} (x_i + x_j).$$

ここで $x_i = \|A_i\|$, $i = 1, 2, \dots, N$ とすると

$$\sum_{i=1}^N \|A_i\| = \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} (\|A_i\| + \|A_j\|) \geq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|.$$

またノルムを両辺のそれぞれ全体にとると

$$\left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| = \left\| \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} (A_i + A_j) \right\| \leq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|.$$

この2式を合わせると (1) が得られる.

(2) Hlawka's inequality より明らか. ([12], [9])

(3) (1) の $\left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\| \leq \frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \leq \sum_{i=1}^N \|A_i\|$ より明らか.

(4) $\|A_i + A_j\|^2 = \langle A_i + A_j | A_i + A_j \rangle = \|A_i\|^2 + \langle A_i | A_j \rangle + \langle A_j | A_i \rangle + \|A_j\|^2$ より

$$\sum_{i,j} \|A_i + A_j\|^2 = N \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 + 2 \sum_{i,j} \langle A_i | A_j \rangle + N \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2.$$

また

$$\sum_{i,j} \|A_i + A_j\|^2 = 4 \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 + 2 \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|^2.$$

上の2つの等式より

$$\sum_{i < j} \|A_i + A_j\|^2 = (N-2) \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\|^2.$$

(5) (4) と同様な等式より

$$\sum_{i < j} \|A_i - A_j\|^2 = N \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\|^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i < j} \|A_i - A_j\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^N A_i \right\|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{N} \left(\sum_{i < j} \|A_i - A_j\|^2 + \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \right)^2 \right). \end{aligned}$$

(6) $\frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \|A_i \pm A_j\|^2 \geq \left(\frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \|A_i \pm A_j\| \right)^2$ すなわち

$$\sum_{i < j} \|A_i \pm A_j\|^2 \geq \frac{2}{N(N-1)} \left(\sum_{i < j} \|A_i \pm A_j\| \right)^2.$$

したがって

$$\sum_{i=1}^N \|A_i\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(N-1)} \left\{ \sum_{i < j} \|A_i + A_j\|^2 + \sum_{i < j} \|A_i - A_j\|^2 \right\} \\
&\geq \frac{1}{N} \left\{ \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i + A_j\| \right)^2 + \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i < j} \|A_i - A_j\| \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.4 $\{X_i\}_{i=1}^N \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\sum_{i=1}^N \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \leq \frac{\sqrt{2}}{N-1} \sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i \pm X_j)} \\
&\quad \left\{ \frac{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)}}{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)} \pm \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X_i, X_j) \right\}} \right\}^{1/2}. \\
(2) \quad &\sum_{i=1}^N I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \leq \frac{2}{N-1} \sum_{i < j} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)} \\
&\quad \left\{ \frac{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i \pm X_j)}{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)} \pm \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X_i, X_j) \right\}} - 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Proof (1) 便宜上 $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)} = \|X\|$$

と書くことにする. このとき

$$\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\| = \sqrt{2} \sqrt{1 \pm \frac{\operatorname{Re} \langle X_i, X_j \rangle}{\|X_i\| \|X_j\|}}$$

と Dunkl-Williams inequality

$$\|X_i\| + \|X_j\| \leq \frac{2\|X_i \pm X_j\|}{\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\|}$$

より

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \|X_i\| &= \frac{1}{N-1} \sum_{i<j} (\|X_i\| + \|X_j\|) \\
 &\leq \frac{2}{N-1} \sum_{i<j} \frac{\|X_i \pm X_j\|}{\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\|} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{N-1} \sum_{i<j} \frac{\|X_i \pm X_j\|}{\sqrt{1 \pm \frac{\operatorname{Re}\langle X_i, X_j \rangle}{\|X_i\| \|X_j\|}}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{N-1} \sum_{i<j} \frac{\|X_i \pm X_j\| \sqrt{\|X_i\| \|X_j\|}}{\sqrt{\|X_i\| \|X_j\| \pm \operatorname{Re}\langle X_i, X_j \rangle}}.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\|^2 = 2 \left\{ 1 \pm \frac{\operatorname{Re}\langle X_i, X_j \rangle}{\|X_i\| \|X_j\|} \right\}$$

と Dunkl-Williams inequality の 2 乗した不等式

$$\|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 \leq \frac{4\|X_i \pm X_j\|^2}{\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\|^2} - 2\|X_i\| \|X_j\|$$

より次を得る.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \|X_i\|^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i<j} (\|X_i\|^2 + \|X_j\|^2) \\
 &\leq \frac{1}{N-1} \sum_{i<j} \left\{ \frac{4\|X_i \pm X_j\|^2}{\left\| \frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|} \right\|^2} - 2\|X_i\| \|X_j\| \right\} \\
 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i<j} \left\{ \frac{2\|X_i \pm X_j\|^2}{1 \pm \frac{\operatorname{Re}\langle X_i, X_j \rangle}{\|X_i\| \|X_j\|}} - 2\|X_i\| \|X_j\| \right\} \\
 &= \frac{2}{N-1} \sum_{i<j} \|X_i\| \|X_j\| \left\{ \frac{\|X_i \pm X_j\|^2}{\|X_i\| \|X_j\| \pm \operatorname{Re}\langle X_i, X_j \rangle} - 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

□

Remark 3.1 Theorem 3.3 の (3), および Theorem 3.4 の (1), (2) は和型不確定性関係の逆不等式と考えることができる.

Acknowledgement

The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400119.

References

- [1] Bin Chen and Shao-Ming Fei, Sum uncertainty relations for arbitrary N incompatible observables, *Scientific Reports*, **5**(2015),14238-1-6.
- [2] Bin Chen, Shao-Ming Fei and Gui-Lu Long, Sum uncertainty relations based on Wigner-Yanase skew information, *Quantum Information Processing*, **15**(2016), 2639-2648.
- [3] Ya-Jing Fan, Huai-Xin Cao, Hui-Xian Meng and Liang Chen, An uncertainty relation in terms of generalized metric adjusted skew information and correlation measure, *Quantum Inf. Process.* DOI 10.1007/s11128-016-1419-4, (2016).
- [4] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, Uncertainty principle and quantum Fisher information, II, *J. Math. Phys.*, **48**(2007), 072109.
- [5] P.Gibilisco, F.Hansen and T.Isola, On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions, *Linear Algebra and its Applications*, **430**(2009), 2225-2232.
- [6] P.Gibilisco, F.Hiai and D.Petz, Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations, *IEEE Trans. Information Theory*, **55**(2009), 439-443.
- [7] P.Gibilisco and T.Isola, On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information, *J. Math. Anal. Appl.*, **375**(2011), 270-275.
- [8] F.Hansen, Metric adjusted skew information, *Proc. Nat Acad. Sci.*, **105**(2008), 9909-9916.
- [9] A.Honda, Y.Okazaki and Y.Takahashi, Generalizations of the Hlawka's inequality, *Bull.Kyushu. Inst. Tech., Pure Appl. Math.*, **45**(1998), 9-15.
- [10] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246**(1980), 205-224.
- [11] Lorenzo Maccone and Arun K. Pati, Stronger uncertainty relations for all incompatible observables, *Physical Review Letters*, **113**(2014), 260401-1-5.
- [12] D.S.Mitrinović, J.E.Pečarić and A.M.Fink, Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers.
- [13] D.Petz, Monotone metrics on matrix spaces, *Linear Algebra and its Applications*, **244**(1996), 81-96.

- [14] D.Petz and H.Hasegawa, On the Riemannian metric of α -entropies of density matrices, *Lett. Math. Phys.*, **38**(1996), 221-225.
- [15] H.P.Robertson, The uncertainty principle, *Phys. Rev.*, **34**(1929), 163-164.
- [16] E.Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **49**(1963), 910-918.
- [17] Yunlong Xiao, Naihuan Jing, Xianqing Li-Jost and Shao-Ming Fei, Weighted uncertainty relations, *Scientific Reports*, **6**(2016), 23201-1-9.
- [18] K.Yanagi, Non-hermitian extension of uncertainty relation, *J.Nonlinear and Convex Analysis*, **17**(2016), 17-26.
- [19] K.Yanagi, Generalized trace inequalities related to fidelity and trace distance, *Linear and Nonlinear Analysis*, **2**(2016), 263-270.
- [20] K.Yanagi, Some generalizations of non-hermitian uncertainty relation described by the generalized quasi-metric adjusted skew information, *Linear and Nonlinear Analysis*, **3**(2017), 343-348.

Department of Mathematics
 Faculty of Science
 Josai University
 Sakado, 350-0295, Japan
 e-mail:yanagi@josai.ac.jp

城西大学理学部数学科
 柳 研二郎