

空間一次元粘性流体の自由境界問題の数値計算

京大 理 西田 孝明 (Takaaki Nishida)

山口大 工 岡田 真理 (Mari Okada)

圧縮性粘性流体の運動で、自由境界を持つ場合、特に“真空”と接する自由境界問題を考察する。流体が空間方向に一次元で、barotropic な気体である場合には、Euler 座標 (τ, ξ) を用いて、次の様に記述される。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u^2 + p) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \rho g, \end{cases}$$

$\tau \geq 0, 0 \leq \xi < y(\tau)$ 。ここで、 ρ, u はそれぞれ流体の密度と速度を表わし、 p は圧力 (barotropic: $p = a \rho^\gamma$, a は正定数、比熱比 γ は 1 より大きい正定数)、 μ は粘性係数 (正定数)、 $g = 0$ 又は正定数 (重力に対応) である。 $\xi = 0$ は固定境界で、 $y(\tau)$ は気体と“真空”との境界 (自由境界) を表わし、次を満たすものである。

$$(2) \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau} = u(\tau, y(\tau)), \quad \rho(\tau, y(\tau)) = 0.$$

この自由境界の未知性は、方程式の記述を Lagrange 質量座標 (t, x) (下記の (3)) を用いることで解消できる。

$$(3) \quad \begin{cases} x = \int_0^{\xi} \rho(t, \zeta) d\zeta, & t = \tau \quad \text{i.e.} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \rho u \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial \xi} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

これを用いた方程式系は、次の形をしていて、

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) - g, \end{cases}$$

更に、 $\int_0^{y(0)} \rho(0, \zeta) d\zeta = 1$ を仮定すれば、上記方程式系は、 $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ で考えればよい。

境界条件については、 $x=0$ は固定境界：

$$(5) \quad u(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

$x=1$ は自由境界：

$$(6) \quad \rho(t, 1) = 0, \quad t \geq 0,$$

を考える。

初期条件としては、

$$(7) \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

ここで、 $\rho_0(x)$, $u_0(x)$ は $[0, 1]$ 上 Hölder 連続, $(0, 1]$ で滑らか、そして $(0, 1]$ では $\rho_0(x) > 0$ とする。更に妥当な適合条件を満たしているとする。

以上、初期値境界値問題(4)-(7)について考察するわけだが、方程式は非線型であり、Lagrange座標に移したため、粘性項に $\rho = 0$ の縮退が現われて、既知の理論をそのまま適用するわけにはいかない。

問題(4)-(7)の t に対する大域解については、

$$(8) \quad \begin{cases} \rho_0(x) \geq C_0(1-x)^\sigma, & 0 < \sigma < 1 \\ \left| \frac{d}{dx} \rho_0(x) \right| \leq C_1(1-x)^{1-\sigma}, & C_0, C_1 \text{ は正定数,} \\ u_0(x) \text{ が } [0, 1] \text{ で滑らか,} \end{cases}$$

なる条件の下で、存在する。ただし、解の $\rho(t, x)$ は $x=1$ で初期値に対応する特異性を持つ。

証明は、空間方向の差分化による常微分方程式系の極限として示される。即ち、 $[0, 1]$ 区間を $\Delta x = \frac{1}{N+1/2}$ の格子に分け、その格子点上の値を、 $\rho_{2n-1}(t)$, $u_{2n}(t)$, $n=1, 2, \dots, N$ とし、常微分方程式系 ($n=1, 2, \dots, N$)

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_{2n-1} + \rho_{2n-1}^2 \frac{u_{2n} - u_{2n-2}}{\Delta x} = 0, \\ \frac{d}{dt} u_{2n} + \frac{p(\rho_{2n+1}) - p(\rho_{2n-1})}{\Delta x} \\ = \frac{\mu \rho_{2n+1} \frac{u_{2n+2} - u_{2n}}{\Delta x} - \mu \rho_{2n-1} \frac{u_{2n} - u_{2n-2}}{\Delta x}}{\Delta x} - q, \end{cases}$$

(ここで、 $p(\rho_{2n+1}) = a \rho_{2n+1}^\gamma$) を考え、境界条件に対応して、次を補う。

$$(10) \quad u_0(t) = 0, \quad \rho_{2N+1}(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

初期条件は、次である。

$$(11) \quad \rho_{2n-1}(0) = \rho(0, (n - \frac{1}{2})\Delta x), \quad u_{2n}(0) = (0, n\Delta x).$$

条件(8)の下では、(9)–(11)は時間大域解を持ち、 $N \rightarrow \infty$ とすると、(4)–(7)の任意の t に対し、一般化された解に収束することが、エネルギー評価、解の表示等により証明できる([1], [2]参照)。更に、解の性質、特に漸近挙動、即ち、(4)–(7)の時間大域解 $(\rho, u)(t, x)$ が $t \rightarrow \infty$ の時、(4)–(7)の定常解 $(\rho, u) = (\{\frac{q}{a}(1-x)\}^{1/2}, 0)$ に、 $[0, 1]$ で一様に収束することも得られている([2]参照)。

解の挙動を見るためには、常微分方程式系(9)の次の差分化による数値計算が有用である。

$$\rho_{2n-1}^k = \rho(k\Delta t, (n - \frac{1}{2})\Delta x)$$

$$u_{2n}^k = u(k\Delta t, n\Delta x)$$

を時・空の格子点上の値として、

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_{2n-1}^{k+1} - \rho_{2n-1}^k}{\Delta t} + \rho_{2n-1}^{k+1} \rho_{2n-1}^k \frac{u_{2n}^{k+1} - u_{2n-2}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \\ & \frac{u_{2n}^{k+1} - u_{2n}^k}{\Delta t} + \frac{p(\rho_{2n+1}^k) - p(\rho_{2n-1}^k)}{\Delta x} \\ & = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ \mu \rho_{2n+1}^k (u_{2n+2}^k - u_{2n}^k) - \mu \rho_{2n-1}^k (u_{2n}^k - u_{2n-2}^k) \} \\ & \quad - q. \end{aligned} \right.$$

この差分法が元の問題の解へ収束するかどうかの証明は出

来ていないが、いくつかの妥当と思われる数値計算例が見られる。しかしながら、粘性係数 μ が密度に依存する場合の解析は、未だであるが、上記差分法を用いて計算すると、分割巾 Δx があまり小さくない(0.01程度)場合と同様の、方程式の解としては妥当でない振動が現われる。

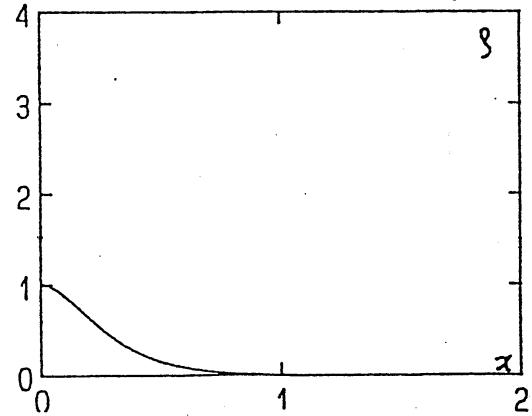
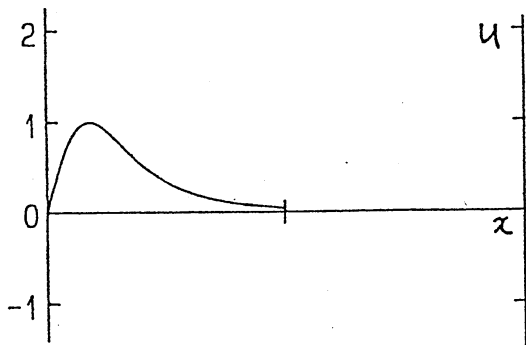
以下に示す、速度 u 、密度 ρ 、自由境界のグラフの x 軸は、Euler座標に変換して表わしたものである。

例1 $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 0.5$, $\mu = 0.01$

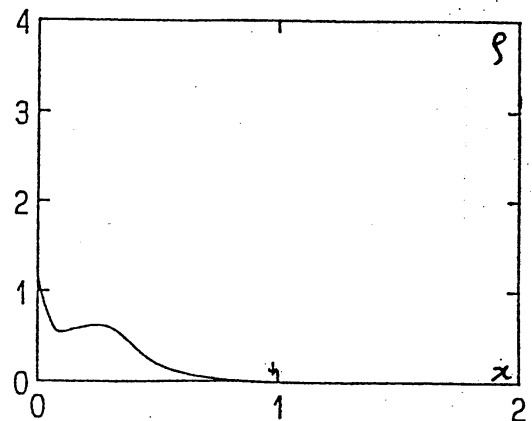
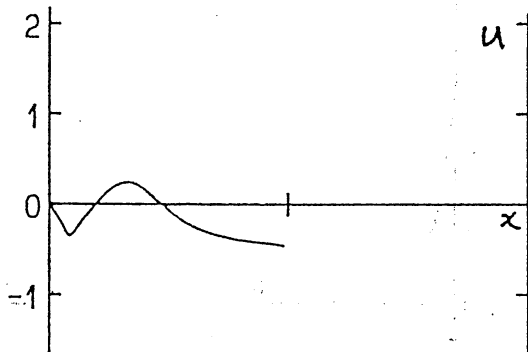
$$\rho_{2n-1}(0) = \cos(n - \frac{1}{2})\pi \Delta x$$

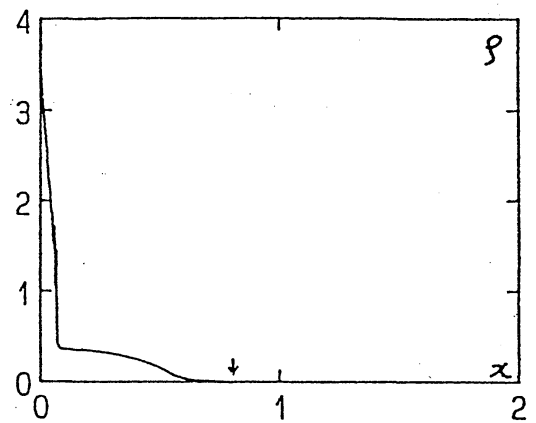
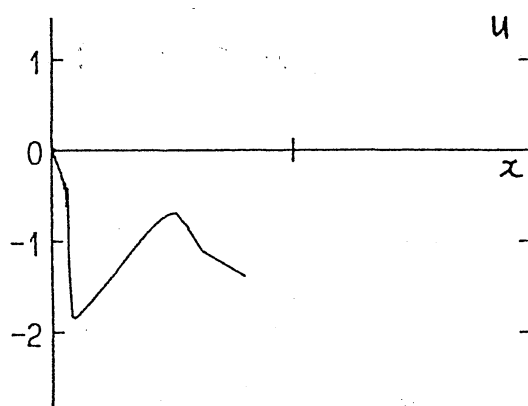
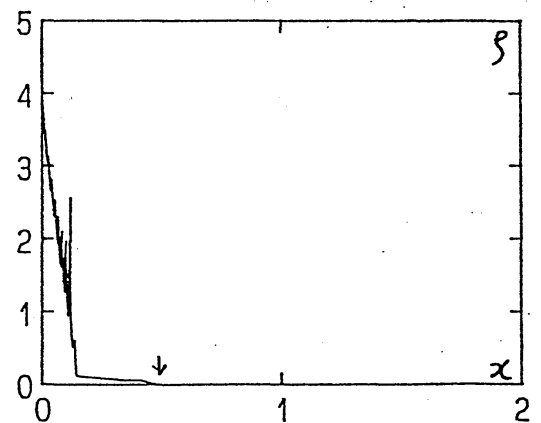
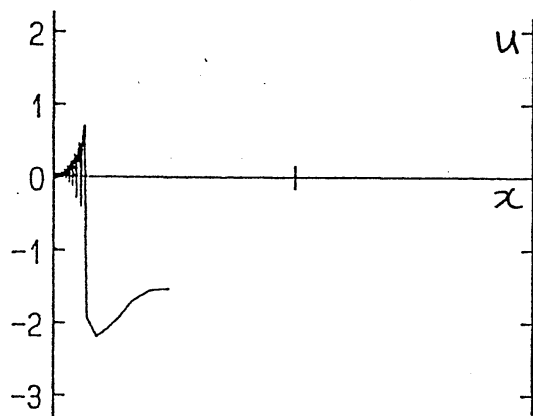
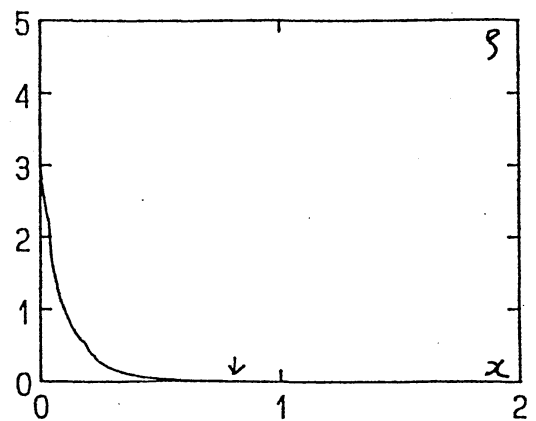
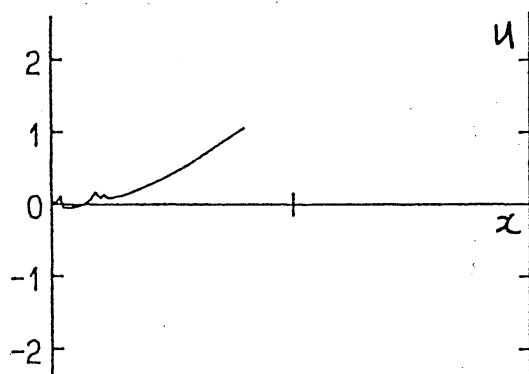
$$u_{2n}(0) = \sin n\pi \Delta x, \quad n = 1, 2, \dots, 64$$

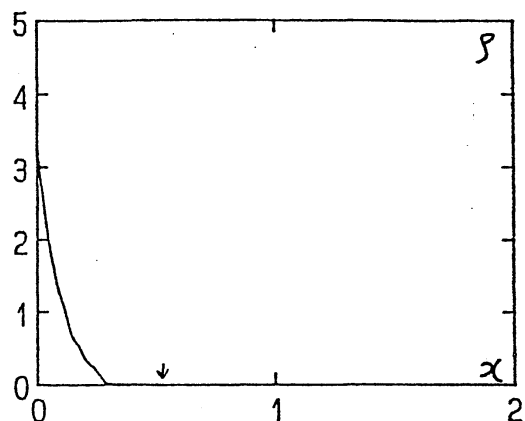
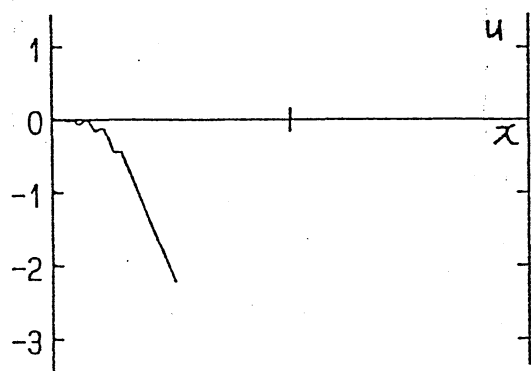
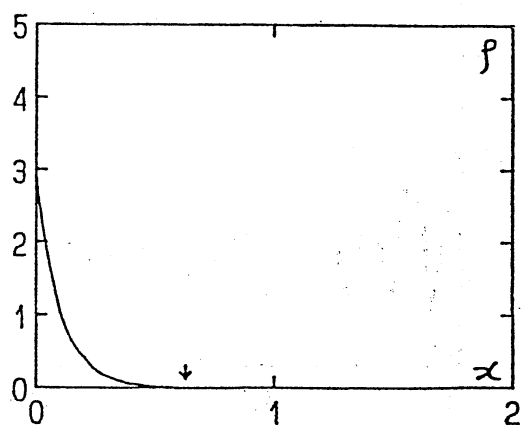
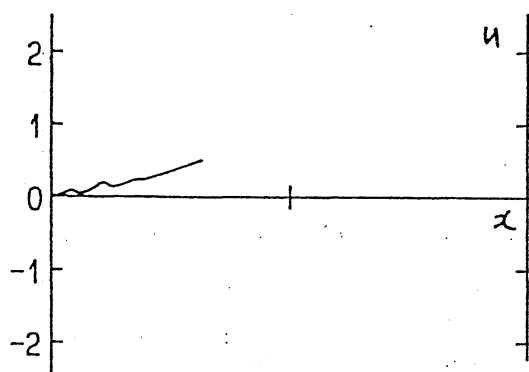
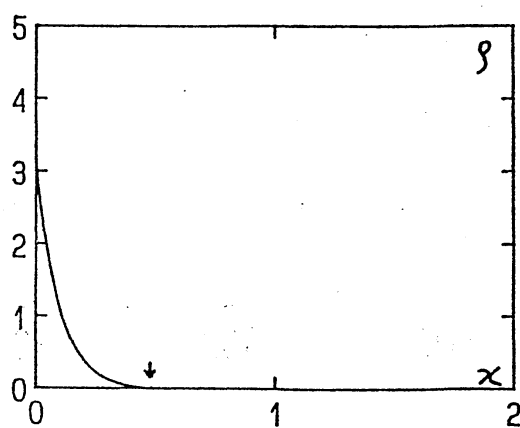
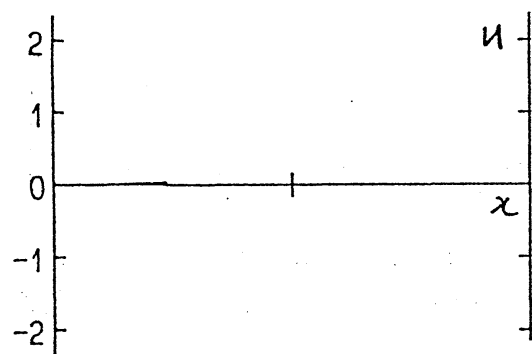
$t = 0$



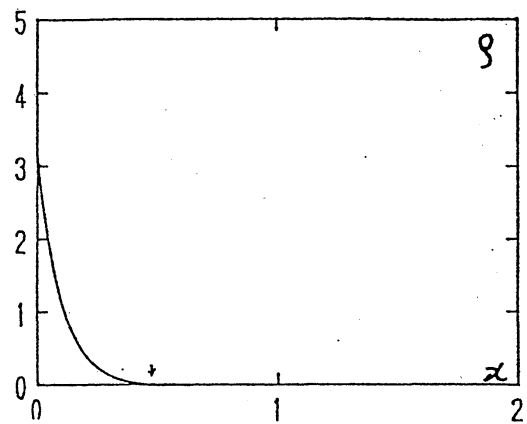
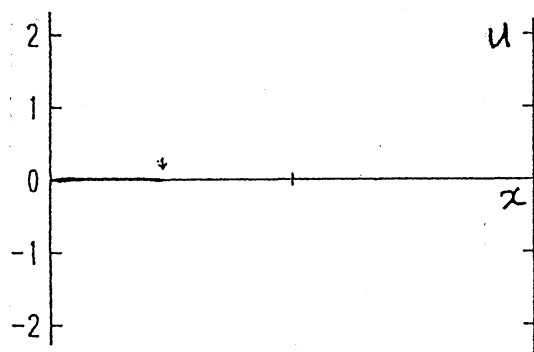
$t = 2$



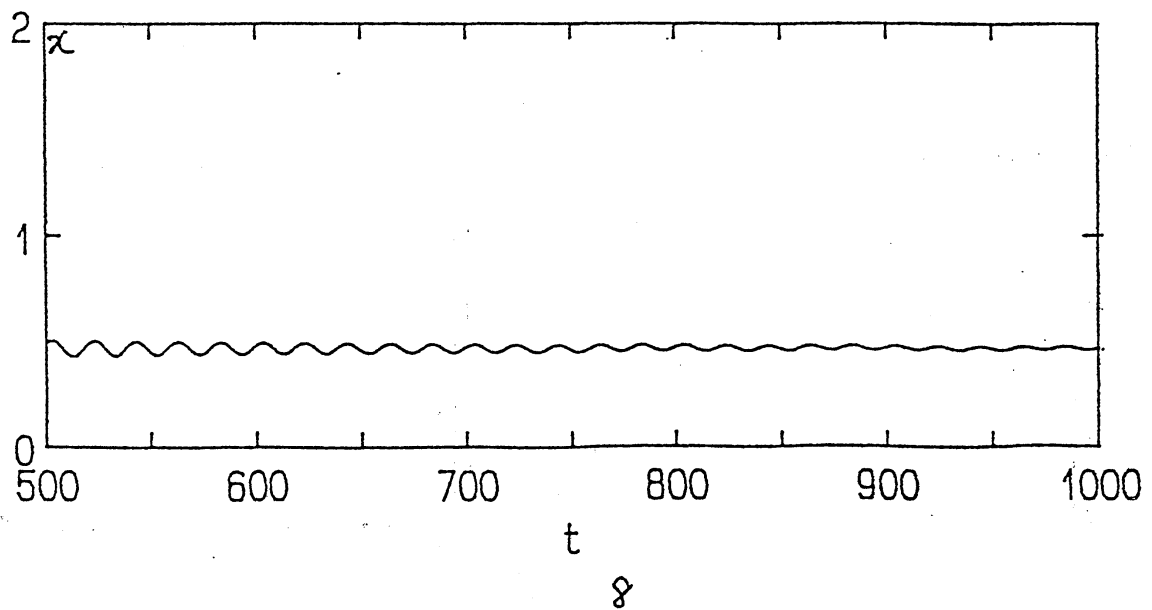
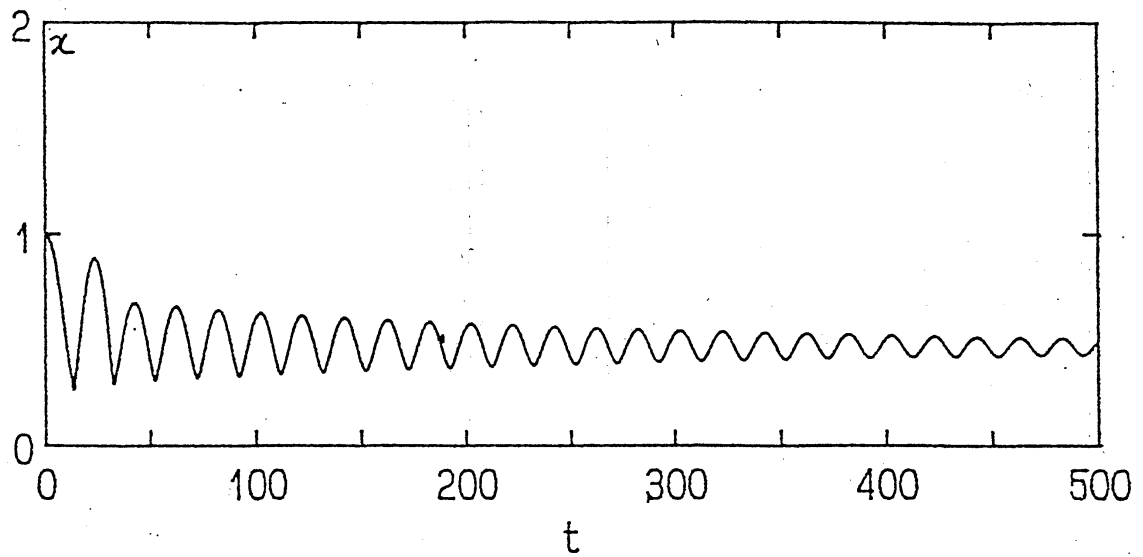
$t = 6$  $t = 10$  $t = 20$ 

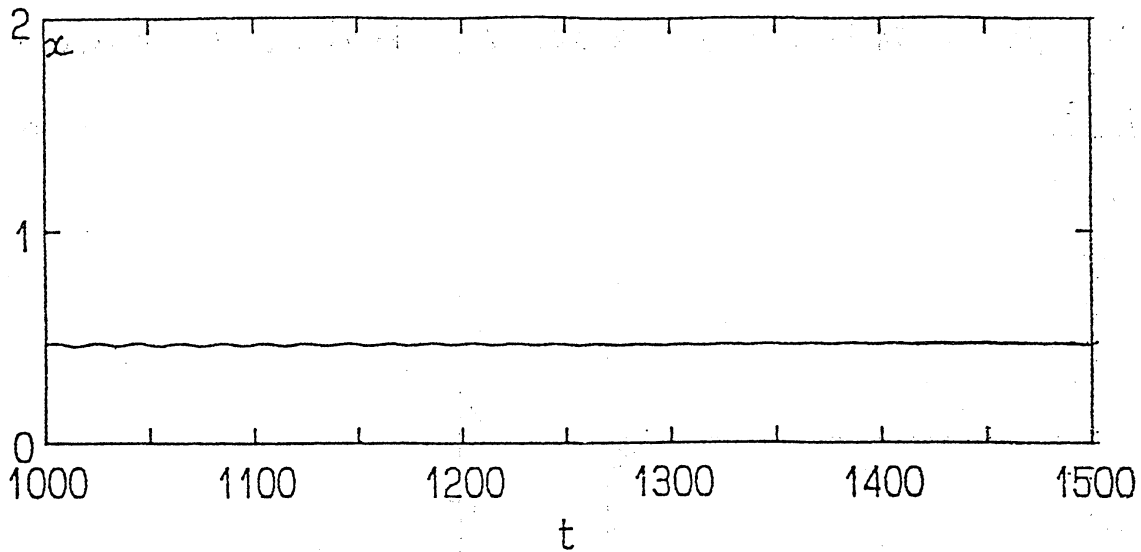
$t = 30$  $t = 60$  $t = 1000$ 

Stationary Solution.



自由境界の挙動





以上の図からわかるとおり、特に $t = 10$ の時に、顕著に振動が現われている。この振動は、 $x = 0$ での $\rho = 0$ の縮退の影響であり、 $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ に対応した所でのみ発生している。このことから考えて、振動を解消する為には、 $\frac{u_{2n} - u_{2n-2}}{\Delta x} < 0$ の時のみ作用する、Neumann-Richtmyer 擬粘性項

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon \Delta x \frac{\rho_{2n+1} - \rho_{2n-1}}{\Delta x}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ \rho_{2n+1} = \rho_{2n+1} \frac{|u_{2n+2} - u_{2n}| - (u_{2n+2} - u_{2n})}{2} \cdot \frac{u_{2n+2} - u_{2n}}{\Delta x} \end{cases}$$

を更に t 方向に差分化した次式

$$(14) \quad \begin{cases} \varepsilon \Delta x \frac{\rho_{2n+1}^k - \rho_{2n-1}^k}{\Delta x}, \\ \rho_{2n+1}^k = \rho_{2n+1}^k \frac{|u_{2n+2}^k - u_{2n}^k| - (u_{2n+2}^k - u_{2n}^k)}{2} \cdot \frac{u_{2n+2}^k - u_{2n}^k}{\Delta x} \end{cases}$$

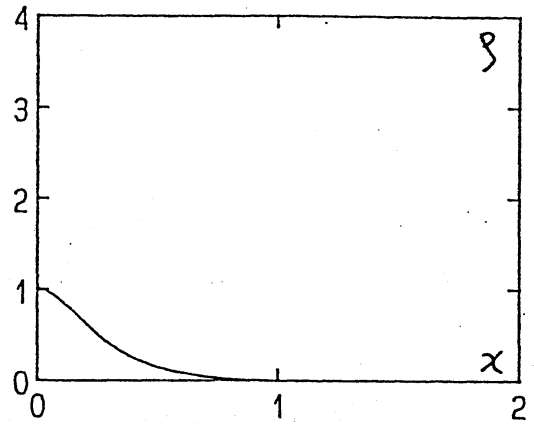
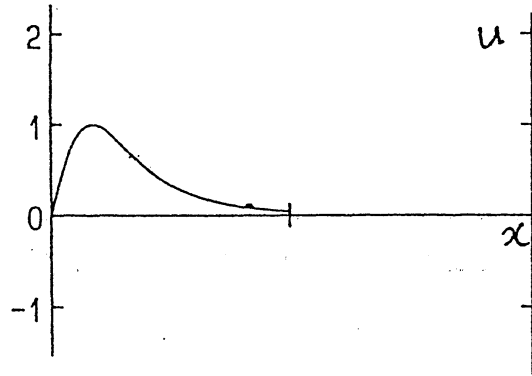
を、差分式(12)の第2式の右辺に加えればよい。

以下に、例1の場合で、(14)を加えて計算した結果を示す

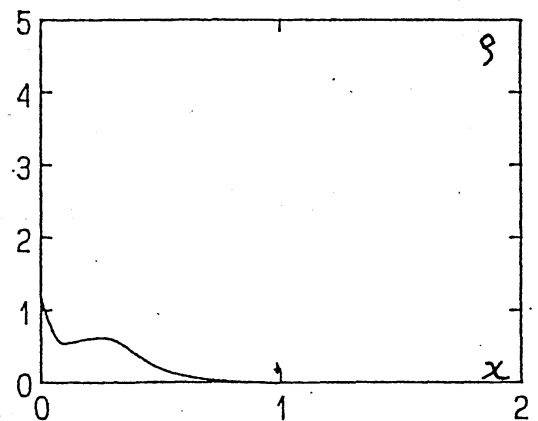
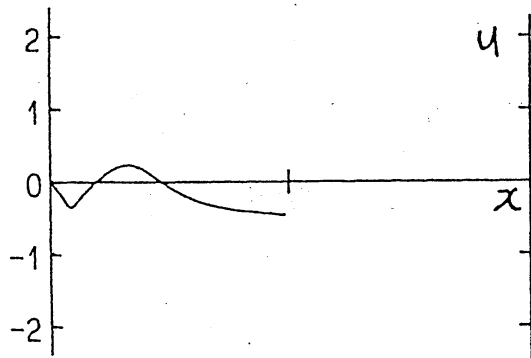
が、振動が消えていることば、よくわかる。(ε = 4.0)

例 2 定常解 $\varphi = (1-x)\varphi$, $u=0$ に収束している。

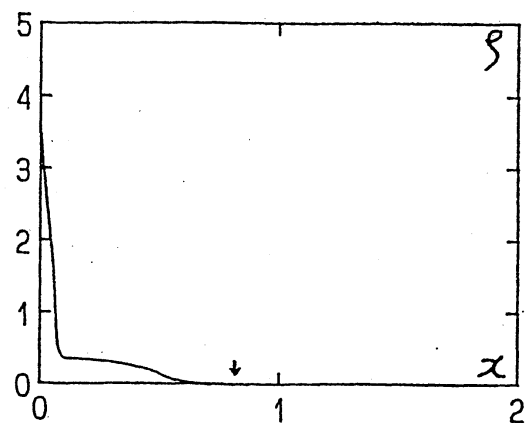
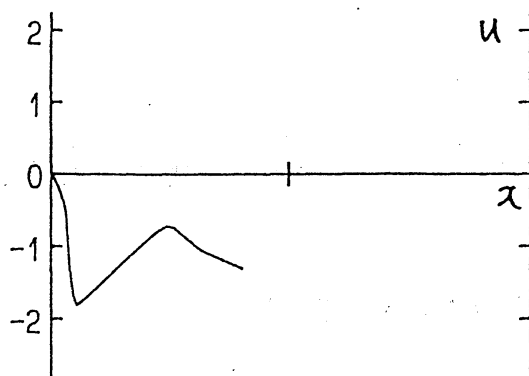
$t=0$

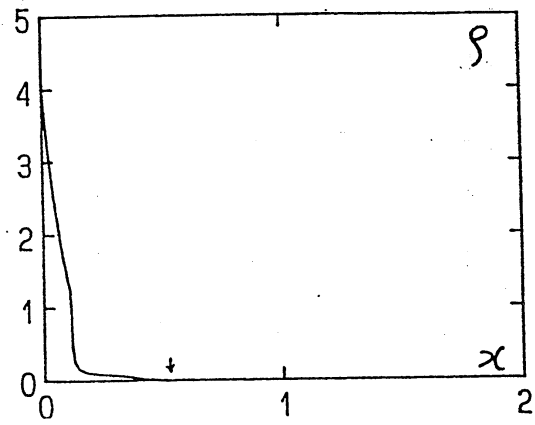
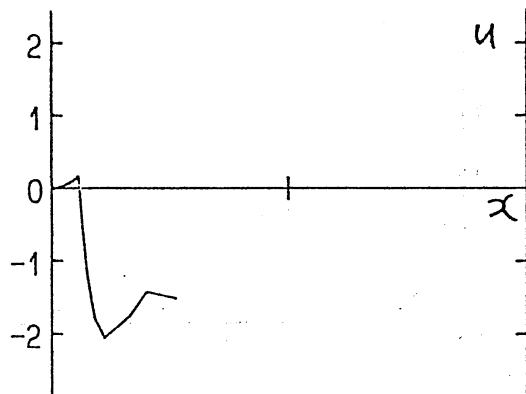
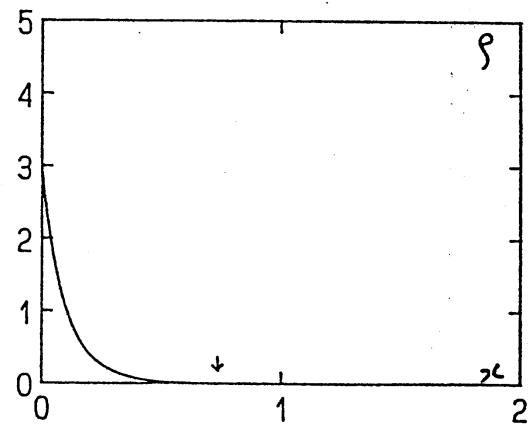
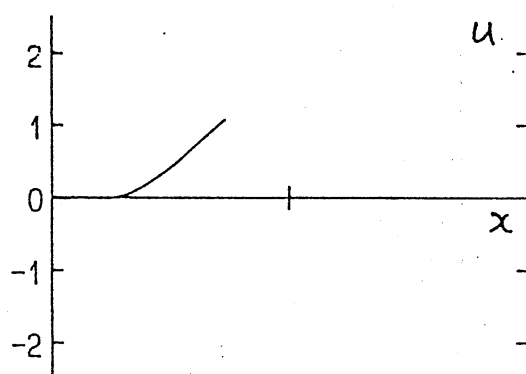
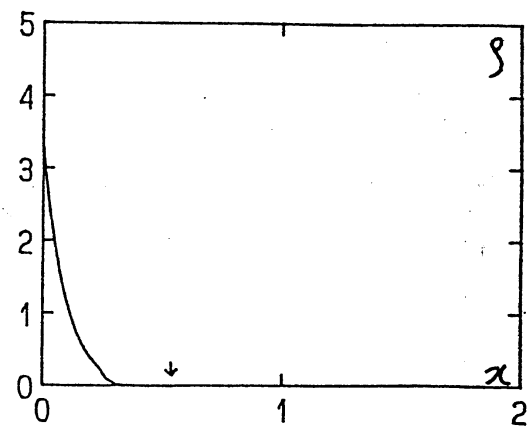
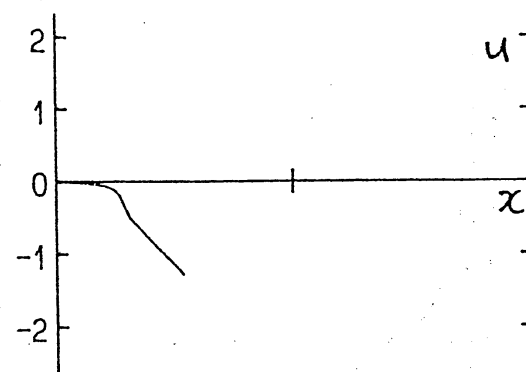


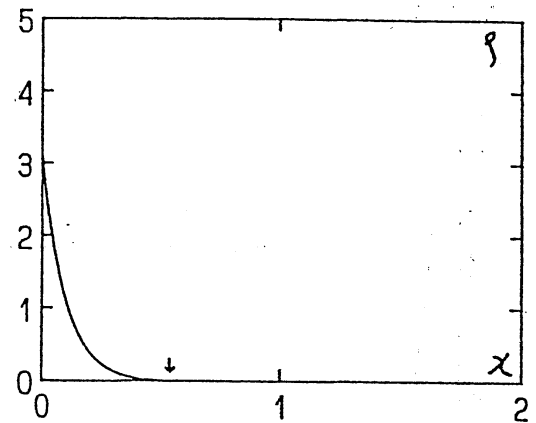
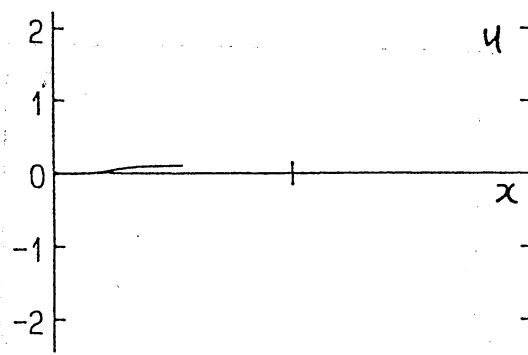
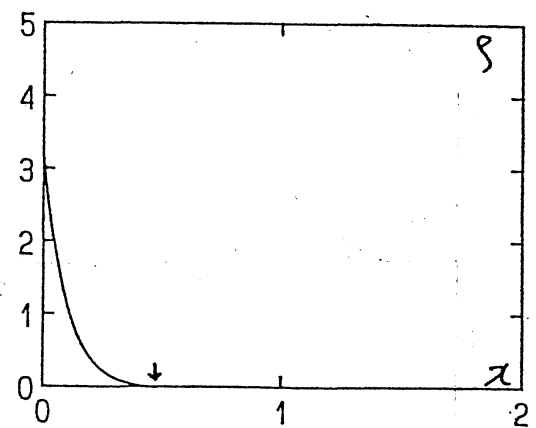
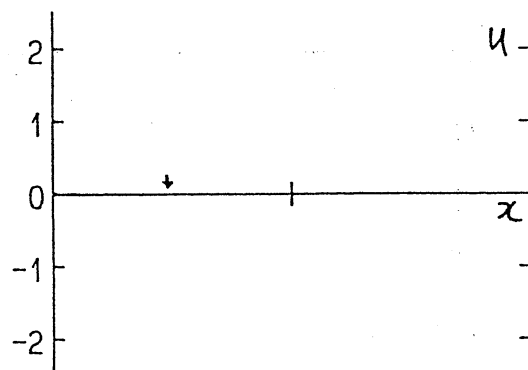
$t=2$



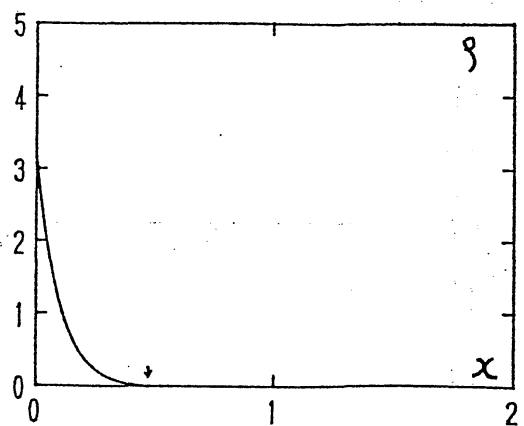
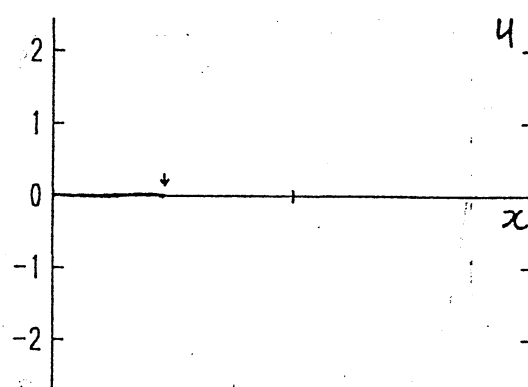
$t=6$



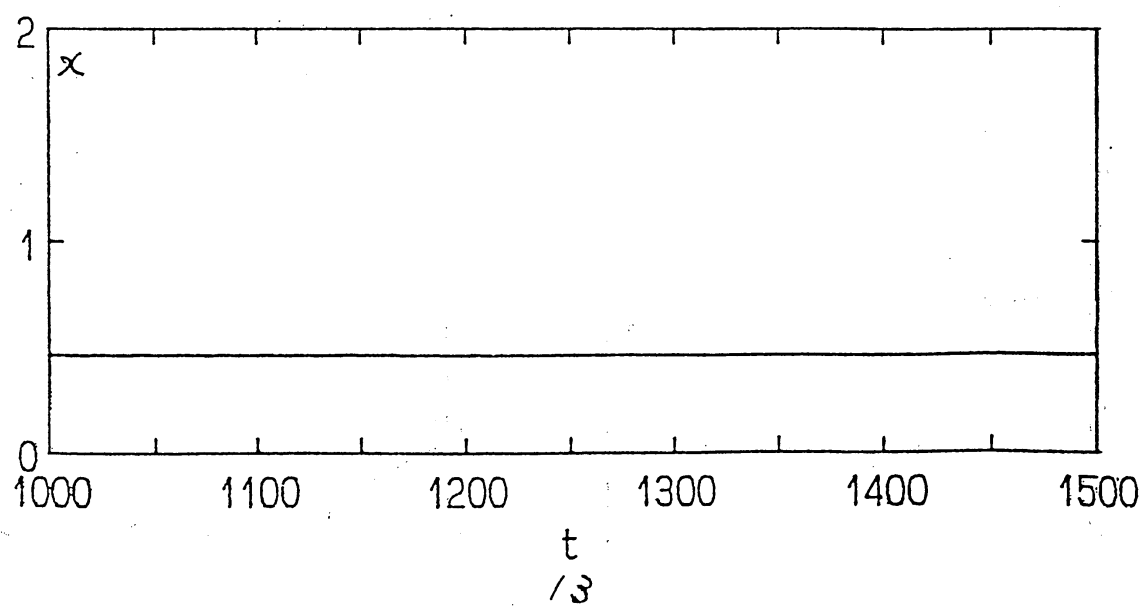
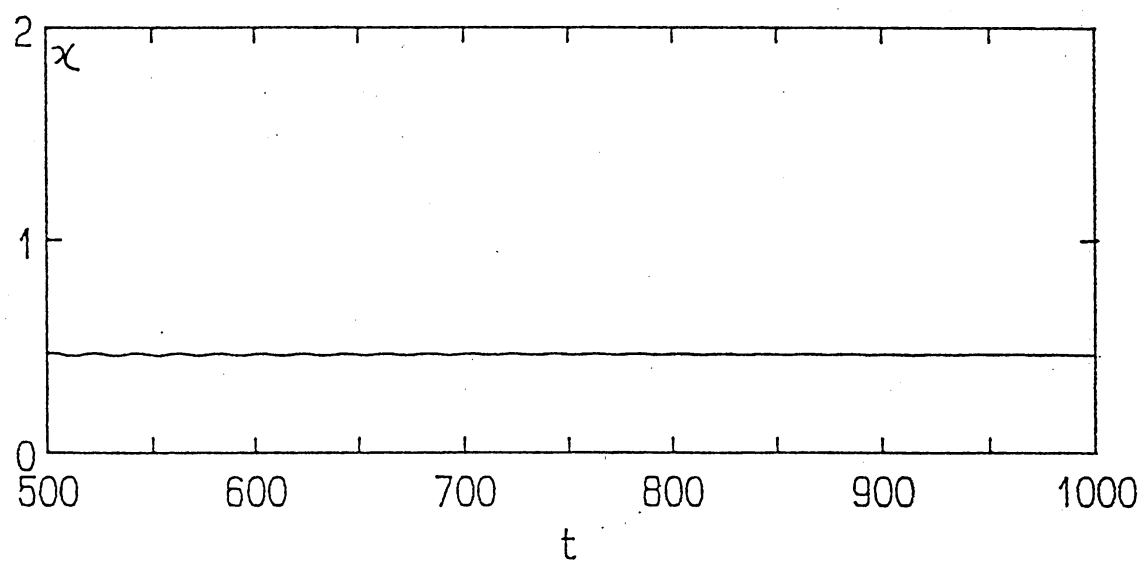
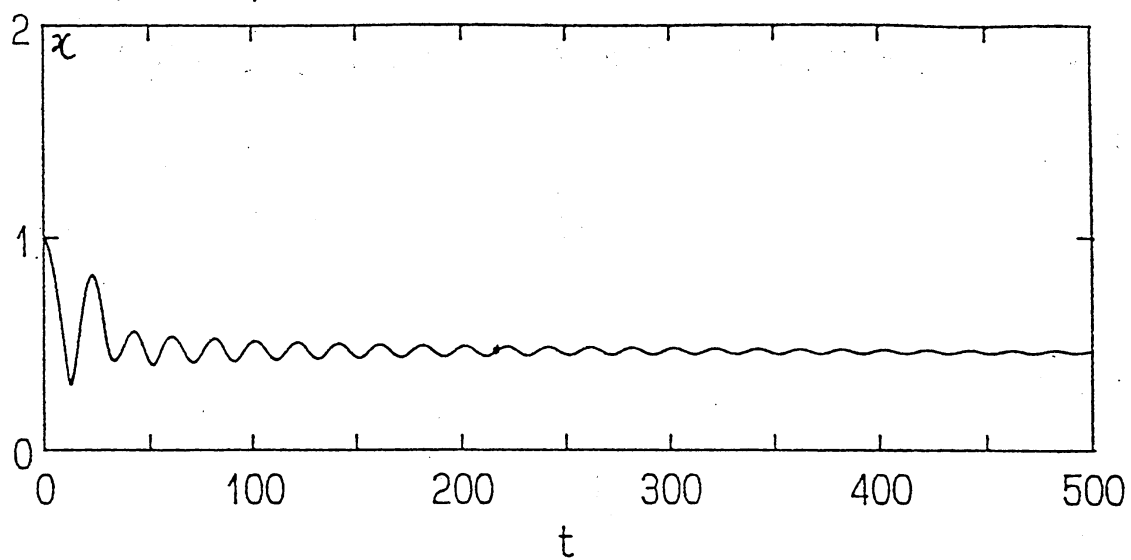
$t = 10$  $t = 20$  $t = 30$ 

$t = 60$  $t = 1000$ 

Stationary Solution



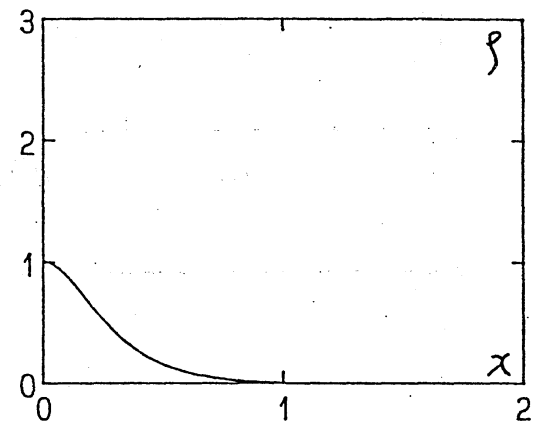
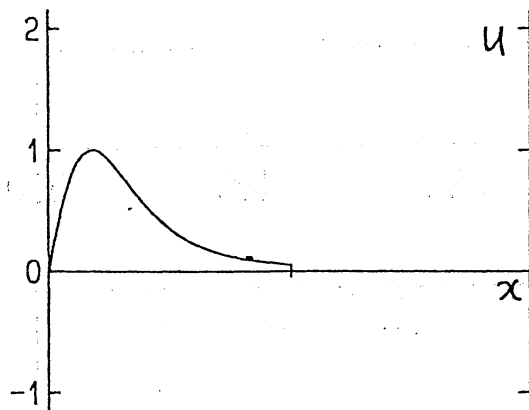
自由境界の挙動



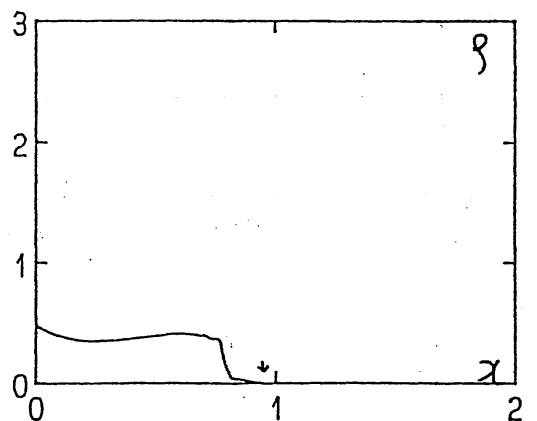
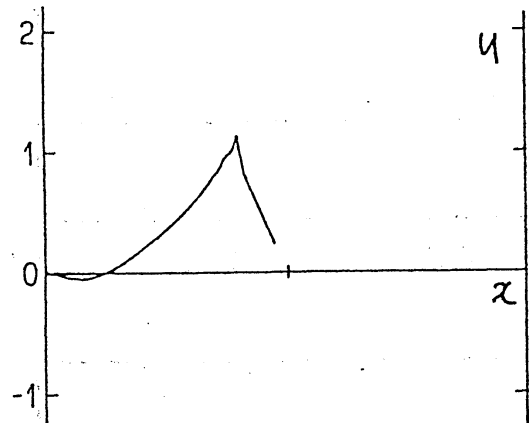
更に、粘性係数 μ が密度 ρ に依存する場合の擬粘性項(14)入りの計算結果を示す。(ただし、 $\varepsilon = 4.0$ で計算)

例3 $\gamma = 2.0$, $a = 1.0$, $g = 0.1$, $\mu = \frac{\rho}{100}$, 初期値は例1と同じで、定常解 $\rho = \{(1-x)g\}^{1/2}$, $u = 0$ に収束。

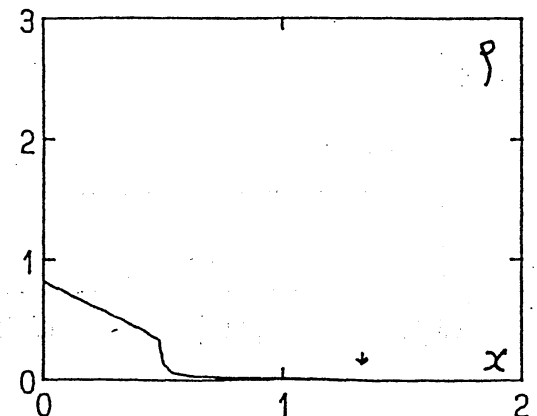
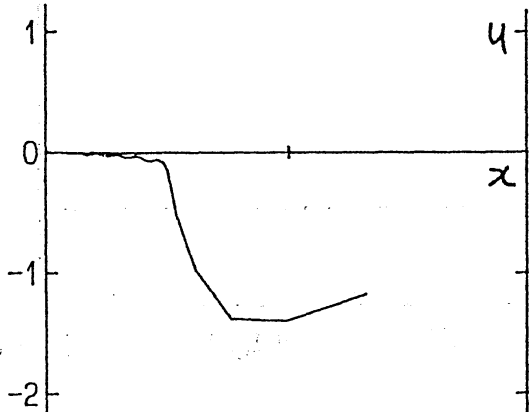
$t = 0$

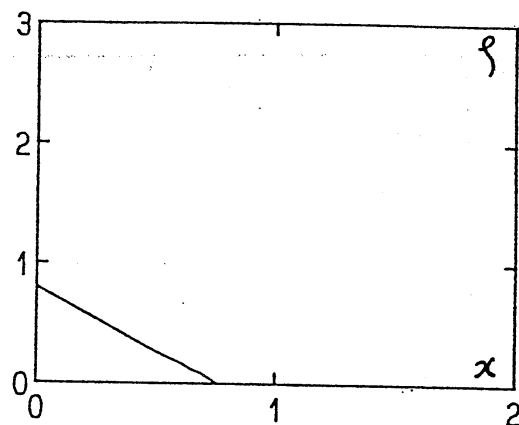
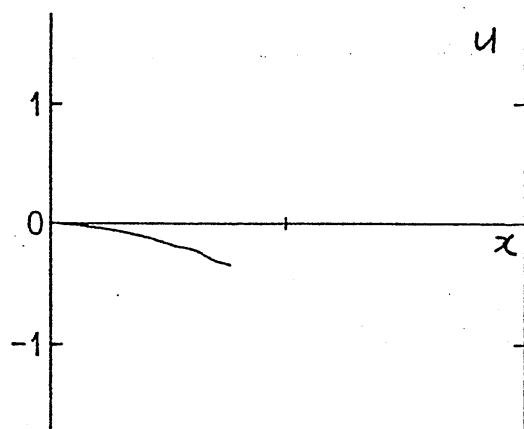
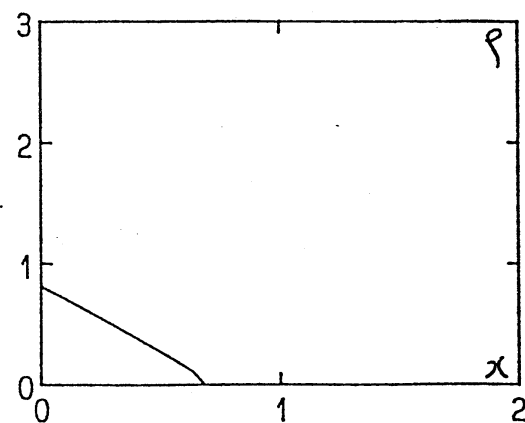
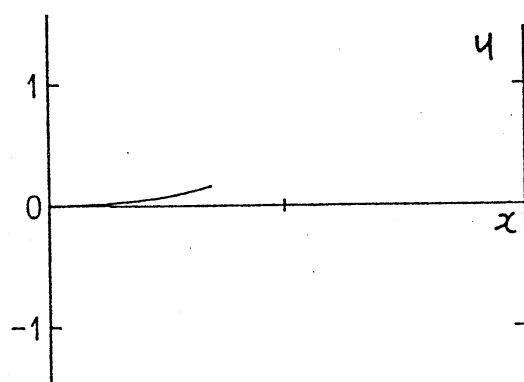


$t = 7$

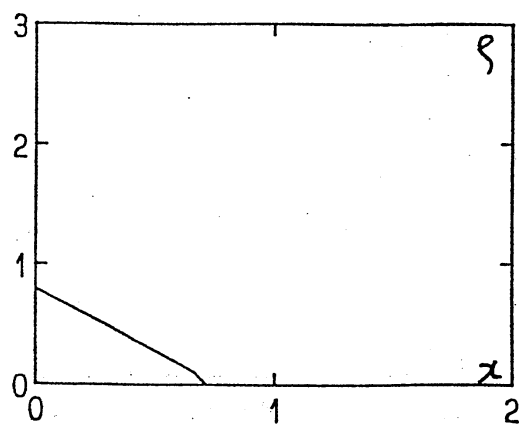
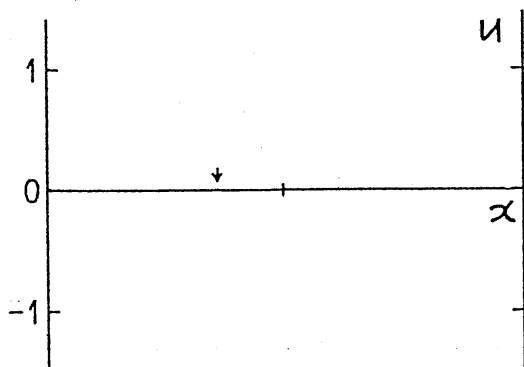


$t = 40$

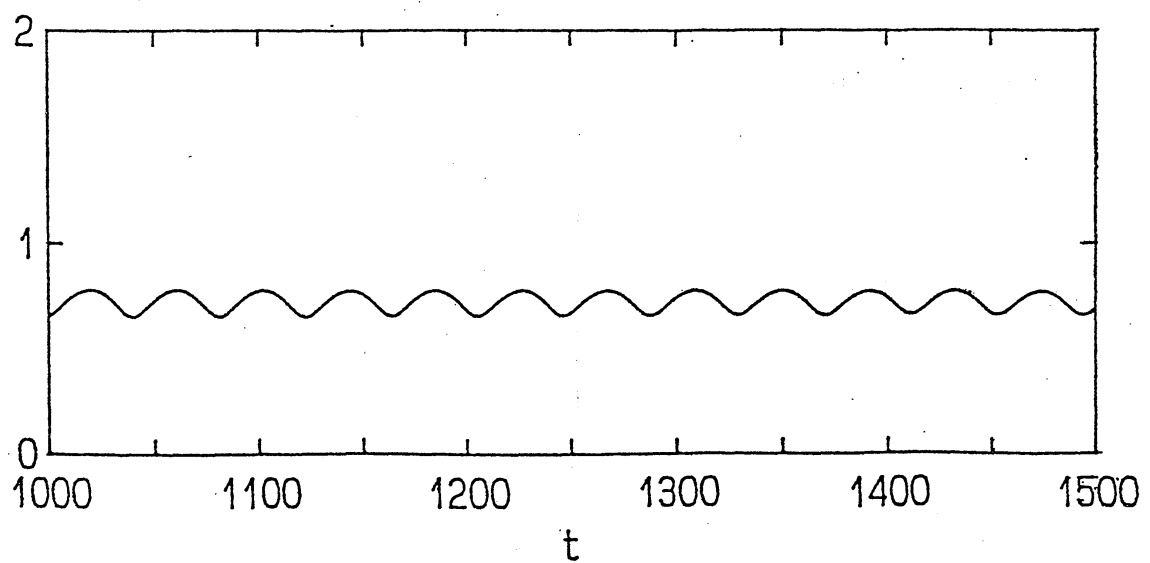
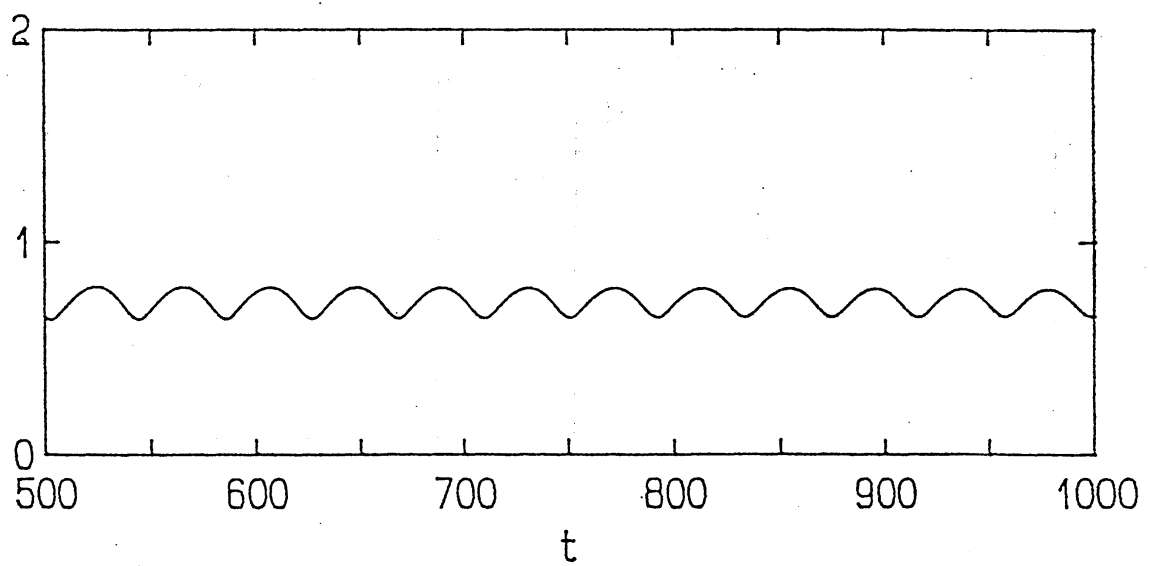
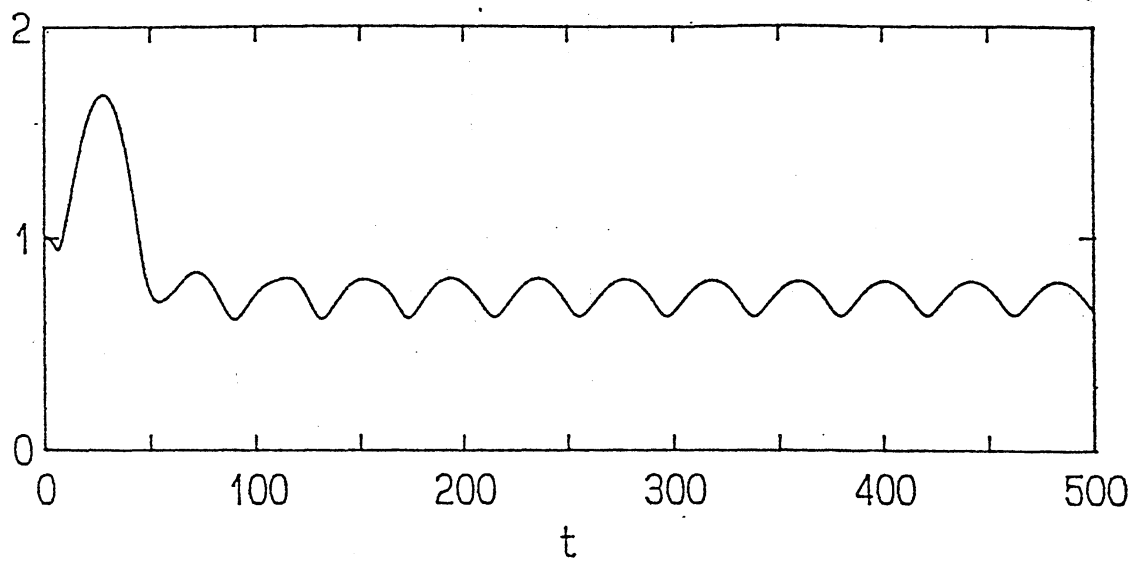


$t = 80$  $t = 1500$ 

Stationary Solution



自由境界の挙動



差分式 (12) + 擬粘性項 (14) の差分法の収束証明はできていないが、常微分方程式系 (9) - (11) に、Neumann-Richtmyer の擬粘性項 (13) を入れた系に対しては、 μ が正定数の時には、収束証明ができる。即ち、前述の (4) - (7) の大域解の存在証明の時に用いた、エネルギー評価、解の表示の求め方と同じ方法で、(9) - (11) に (13) を入れた系の解が、 $N \rightarrow \infty$ で (4) - (7) の大域解に収束することが証明できる ([3] 参照)。

参考文献

- [1] T. Nishida, Equations of Motion of Compressible Viscous Fluids, in Patterns and Waves, 97-128 (1986), ed. by Nishida-Fujii-Mimura, North Holland/Kinokuniya
- [2] M. Okada, Free boundary value problems for the equation of one-dimensional motion of viscous gas, Japan J. Appl. Math., Vol.6, No.1, 1989, 161-177
- [3] T. Nishida & M. Okada, On the Neumann-Richtmyer method for one-dimensional motion of viscous gas, (to appear in Recent Topics in Nonlinear PDE)