

## カルマン渦列の発生 of 物理と数理

同志社大学工学研究科 武本幸生 (Yukio Takemoto)  
同志社大学工学研究科 大橋俊介 (Syunsuke Ohashi)  
同志社大学工学研究科 赤嶺博史 (Hiroshi Akamine)  
同志社大学理工学部 水島二郎 (Jiro Mizushima)

Department of Mechanical Engineering,  
Doshisha University

### 1 はじめに

ハンガリーの航空工学者であるカルマン (Theodore von Kármán, 1881-1963) が柱状物体後流にきれいな渦列が生じる理由を説明したのは 1911 年であり、今年はそのちょうど 100 年目にあたる [1]。現在ではこの渦列はカルマン渦列あるいはカルマンよりも 3 年早く実験的にこの渦列を調べたベナール (Bénard) [2] にちなんでベナール・カルマン渦列と呼ばれている。カルマンの研究は非粘性流における渦の配置の安定性を調べたもので、その研究方法は非常に洗練されたものであり、その後のカルマン渦列に関する研究に大きな影響を与えた。この 100 年間に、カルマン渦列について多くの研究がなされてきたが、その多くは物体後流の安定性を調べて渦が生じるときの臨界条件である臨界レイノルズ数およびそのときの攪乱の波数と振動数を求めようとする研究であった。その中で、現在においても議論の中心となっている話題の一つにカルマン渦列を生み出している振動源の特定の問題がある。非粘性流体を仮定したカルマンの研究は、現実には比較的低いレイノルズ数で観測されるカルマン渦に対して誤解を与えている。カルマン渦列はほぼ減衰することなく下流遠方まで流されていく印象を与えるが、低いレイノルズ数においては渦度の減衰が大きく、カルマン渦列が下流へ流れていくためには渦を駆動する機構が必要である。この報告ではカルマン渦列の振動源 (振動を維持する機構) と渦を駆動する機構について詳しく考えていく。

物体後部直後に渦が生じるのは流れの不安定性によるためであることは多くの研究者によって予想されていたが、実際に後流を 2 次元平行流として近似し、オア・ゾンマーフェルト方程式を解いて、後流が不安定となることを示したのは McKoen [3] である。しかし、McKoen はレイノルズ数が大きいうという近似を用いており、小さなレイノルズ数で不安定性が生じるこの流れの臨界条件を求めるには至らなかった。臨界条件を求めたのは Taneda [4] であり、Taneda はオア・ゾンマーフェルト方程式を解き、後流が不安定となる臨界レイノルズ数  $Re_d = 3.2$  を求めた。しかし、この当時の実験から得られていた振動流へ遷移する臨界レイノルズ数は  $Re_d = 30$  程度であったため、実験と Taneda の計算結果の間には明らかな相違が存在した。今日、円柱を過ぎる流れが振動流へ遷移するのは  $Re_d = 47$  程度であるという認識が一般的であり、オア・ゾンマーフェルト方程式による線形安定性理論は非常に小さい臨界レイノルズ数を与えることとなる。この相違が生じる原因の一つには平行流近似がある。なぜなら、円柱や角柱の後流は比較的小さいレイノルズ数で不安定性が発生するため、流れ場は非平行性が強く、平行流近似が成り立たないからである。しかし、もっと重要な要因が理由であることは、後に対流不安定性と絶対不安定性という概念の導入によって明らかとなる。

平行流近似を用いることなく流れ場の全体安定性を調べるという概念を理解するのは比較的容易であり、実際に調べたのは Jackson [5] である。Jackson は全体安定性を数値的に調べることで、カルマン渦列が生じる臨界レイノルズ数は  $Re_d = 46.184$  であるという結果を得た。Jackson が求めた臨界レイノルズ数は実験結果と良く一致するが、この結果だけでは流れが定常流から振動流へ遷移する物理的な機構は明らかではなく、平行流近似による Taneda などの計算結果と全体不安定性との間の関係は不明である。

McKoen や Taneda が行ったように、非一様な流れにおける局所的な速度分布を用いて平行流近似し、オア・ゾンマーフェルトを解くことにより安定性を調べるとき、その流れの安定性は局所安定性と呼ばれる。このような局所安定性と全体安定性の関係について調べるための概念として、流れの局所安定性は絶対不安

定性と対流不安定性に分類できることがプラズマ物理学における研究から明らかになった (Briggs(1964)[6], 山田(1991)[7] 参照). 外部から局所的に加えられたパルス状攪乱が, 流れ場中のある静止した一点で観測しているときに成長する場合, 流れは(局所)絶対不安定であり, 攪乱とともに動く座標系で観測すると攪乱は成長するが, 流れ場中のある固定した一点で観測すれば攪乱が減衰する場合, 流れは(局所)対流不安定である. 1本の円柱を過ぎる流れの場合には円柱より上流においては流れは安定であると考えられる. したがって, 円柱後方のごく近傍に振動源がない限り, カルマン渦列は発生しないことになり, 持続して円柱近傍から渦放出が行われるためには, 円柱近傍に振動源が必要である. しかし, もし流れ場人為的に振動が与えられれば, 対流不安定な流れ場中で攪乱が成長することができる. 平行流近似を行って得られるオア・ゾンマーフェルト方程式の解は無限に長く広がる単色波の攪乱を表しているため, 対流不安定であっても流れ去ることがないため, オア・ゾンマーフェルト方程式から得られた臨界レイノルズ数は対流不安定性の臨界値に対応する. 円柱後流に渦が発生するメカニズムについて, 円柱を過ぎる流れの安定性を平行流近似することにより, その対流不安定性と絶対不安定性が詳しく調べられた [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. その結果, 円柱後流が絶対不安定となるのはおよそ  $Re_d \sim 25$  であり [12], 円柱後方にできる絶対不安定領域の大きさが  $3.5d$  程度になると全体的不安定が生じて, 流れが持続的に振動する. 振動を維持している機構についてはまだ明らかにはなっていなかったが, 絶対的不安定領域の後端と円柱との間でなんらかの共鳴が生じていると考えられていた [16]. しかし, 最近 Takemoto and Mizushima[17] はこれとは異なる機構を提案した. この報告の最初の部分で, Takemoto and Mizushima の研究結果についてその概略を紹介する.

柱状物体を過ぎる流れ場中に発生するカルマン渦列は円柱直径の 100 倍程度下流へ行くと渦は減衰し, 後流は渦の形をもたない剪断流へと変化する. また, さらに下流でカルマン渦列が再生成される. このような物体から遠く離れた後流の振る舞いを調べたのは Taneda[18] である. この現象はカルマン渦列の消滅と再配列(再生成)と呼ばれ, 渦列の消滅および再生成されるメカニズムについて, これまでに多くの研究が行われてきた [19, 20, 21, 22].

それらの研究の中でも, Durgin and Karlsson[21] は渦列を生じる円柱の後方にそれと直交するように大きな円柱を置くことにより, 渦列の移流速度を人為的に遅くする詳細な実験を行い, 第 1 渦列の消滅と生成を定量的に調べた. また, 第 1 渦列の消滅について非粘性渦モデルを考え, 渦領域の変形を調べた結果, 2 列に並ぶ渦列における流れ方向渦間隔を  $h$  とし, 流れと垂直方向の間隔を  $a$  とすると,  $a/h > 0.366$  のときには渦の配置は不安定となり, 各渦は他の渦との相互作用によって流れ方向に引き延ばされた楕円形渦となり, 引き延ばされた楕円渦が自己誘起速度で回転し合体することにより, 渦列は消滅してほぼ一様な剪断速度場になるという結論を得た. さらに, 彼らは平板を過ぎる流れの線形安定性を調べた Sato and Kuriki[22] の論文を引用し, 平板を過ぎる後流の速度場(ウェイク)と渦列が消滅することによってできる速度場とを比較し, 第 2 渦列はこの一様剪断速度場の不安定性によるものであると予想した.

円柱を過ぎる流れにおける第 2 渦列の発生は円柱から非常に離れた位置(円柱直径の 100 倍以上後方)で生じるため, 実験的研究においても数値シミュレーションにおいても精度の低下という問題が伴う. ところが, 最近, Inasawa, Nakano and Asai [26] は角柱を過ぎる流れから生じる音の伝播について, 圧縮性流れの数値シミュレーションを行い, 角柱後流においてもカルマン渦列の消滅と再生が起こることを確かめた. さらに彼らの計算では, 角柱の流れ方向の辺長を  $w$ , 流れと垂直な辺長を  $d$  とするとき, 角柱のアスペクト比  $A = w/d$  が 1 では彼らの計算範囲においては渦列の消滅は観測されず,  $A = 0.4$  のときは渦列の消滅と再生を観測できるという結果を報告している. したがって, アスペクト比  $A$  の値が 0.5 程度であれば, 第 2 渦列の発生は角柱の比較的近傍で生じ, 第 1 渦列および第 2 渦列の強さが大きく減衰しないために数値シミュレーションでも実験でも精度の低下を小さくすることができると考えられる.

これまでの研究報告から, 現在では第 1 渦列の消滅はその配置の不安定性によって起こり, 第 2 渦列はその結果としてできた剪断流の不安定性によって生じるという結論が支配的である. しかし, それらの論拠はまだ十分ではない. この報告の後半では, 計算精度の低下および計算領域の拡大を抑えるために, アスペクト比 0.2 の角柱を過ぎる流れを調べる. この流れにおいて渦が消滅する機構と渦が再生成する機構について数値シミュレーションおよび線形安定性解析によって明らかにすることが 2 つ目の目標である.

## 2 カルマン渦列発生の変動源

この節では、円柱を過ぎる流れが不安定となって振動流へ遷移する機構と、振動流中でカルマン渦列が持続して発生するために必要な振動源について調べた Takemoto and Mizushima[17] の研究結果を簡単に紹介する。Takemoto and Mizushima はこれまで平行流近似のもとで用いられてきた対流不安定性と絶対不安定性の概念を非平行な流れに拡張し、パッシブモード不安定性とアクティブモード不安定性という概念を導入した。すなわち、その安定性を調べようとする定常流にパルス攪乱を加え、生じた波束状の攪乱を波束の群速度と共に動く座標系からみて波束攪乱の振幅が増幅するときパッシブモード不安定性と定義し、そのときの増幅率をパッシブモード増幅率と呼んだ。また、流れ場の各点で攪乱の増幅率を評価し、振幅が増幅するとき、アクティブモード不安定性と定義し、その増幅率をアクティブモード増幅率と呼んだ。

### 2.1 問題の説明

一様流速  $U$  の流れの中におかれた直径  $d$  の円柱を過ぎる流れを考える。円柱の中心を原点  $O$  として、流れ方向に  $x$  軸をとり、 $x$  軸と垂直に  $y$  軸をとる。流れは非圧縮 2 次元流と仮定し、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を導入する。流れを支配する基礎方程式は  $\psi$  と  $\omega$  についての渦度輸送方程式とポアソン方程式である。流れを特徴付けるパラメータであるレイノルズ数は  $Re \equiv Ud/\nu$  で定義する。ここで  $\nu$  は動粘度である。

レイノルズ数が小さいとき、流れ場は円柱の中心を通り流れに平行な中心線に対して対称である。この対称な流れは、レイノルズ数に依らず基礎方程式である渦度輸送方程式とポアソン方程式の定常解となっている。この対称定常解を  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  とする。この対称定常解がこれから安定性解析を行う対象である主流であり、その対称性は  $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$  および  $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$  と表される。図 1(a) は対称定常解の例であり、この図では  $Re = 50$  のときの流れ場の流線が  $-5 \leq x \leq 16$  および  $-5 \leq y \leq 5$  の範囲だけ描かれているが、数値計算の領域はこれよりも十分に大きくとってある。このレイノルズ数 ( $Re = 50$ ) では円柱後方の双子渦の長さはおよそ  $3.0d$  である。

円柱後流が振動するときの振動維持機構と攪乱の伝播および成長を数値シミュレーションにより調べるため、定常対称流中のある位置  $(x, y) = (30, 0)$  に短時間の衝撃力を与える。衝撃力によって流れ場中に攪乱  $\hat{\psi}$  が生じたとする。生じた攪乱は位置  $(x, y) = (30, 0)$  において時間  $t = [0, 1 \times 10^{-3}]$  の間のみ  $\hat{\psi} = 1 \times 10^{-3}$  の値をもち、その他の点では  $t = 0$  では  $\hat{\psi} = 0$  であり、攪乱は加えられていないとする。攪乱  $\hat{\psi}$  は当然  $\hat{\omega}$  を誘起することになる。したがって、流れ関数と渦度はそれぞれ、 $\omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$  および  $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}$  のように表される。これらの式  $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}$  および  $\omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$  を基礎方程式 (1) と (2) に代入し、定常対称流  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  の式を引き、 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  についての非線形項を無視すると、攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  についての線形方程式が得られる。この線形方程式を数値的に解くことにより、速度攪乱の空間的・時間的変化を観察する。

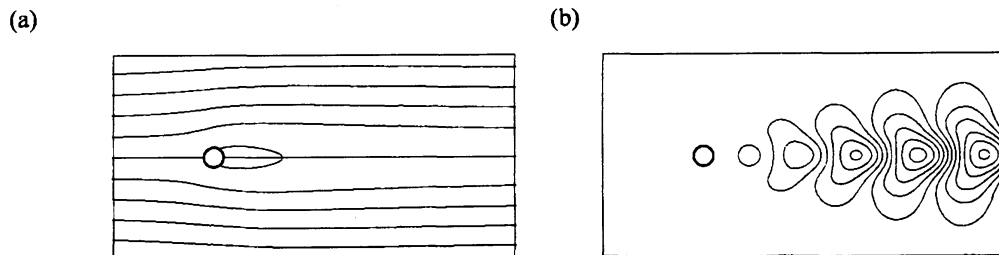


図 1: 流れ場 (流線).  $Re = 50$ . (a) 対称定常流. (b) 攪乱 (実部).  $t = 83$ .

## 2.2 計算結果

円柱後方の位置  $(x, y) = (30, 0)$  に与えられた攪乱は、瞬時に円柱の後方の領域全体に伝わり、レイノルズ数が全体不安定性の臨界値  $Re_g$  より大きいと、やがて成長して平衡振幅に達する。そのときの  $Re = 50$  における攪乱実部の流れ場が図 1(b) である。これは Jackson[5] の安定性解析における固有関数と良く一致していることはいふまでもない。

攪乱は十分長い時間の後に図 1(b) のように平衡状態に達するが、攪乱が加えられてから平衡状態に達するまでの伝播と成長を詳しく観察するために、 $x$  軸上における攪乱の空間分布のみに注目する。図 2(a) は、 $R = 35$  の場合の  $t = 0$  および  $t = 60$  での  $x$  軸上での  $\hat{\psi}$  の空間的な分布である。 $x = 30$  付近にある細い鉛直線は  $t = 0$  でインパルス攪乱として与えられた初期攪乱である。時刻  $t = 60$  では、攪乱の振幅は太線で包まれた細線によって表され、太線はその包絡線である。初期にパルス状であった攪乱は、 $t = 60$  になると  $0 \leq x \leq 100$  の範囲まで広がり、包絡線は A で示される固有部と B で示される余剰部に分かれる。余剰部 B に囲まれた波はすぐに下流へ流れ去るので重要ではなく、固有部 A 囲まれた波束状の攪乱が全体不安定性を引き起こす原因となるので、今後はこの A の波束に注目して、詳しく調べる。

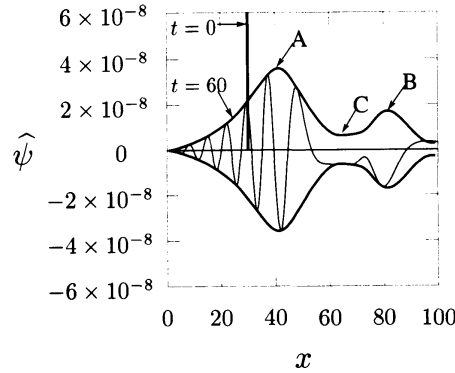
レイノルズ数  $Re = 35 (< R_g)$  のときの攪乱の伝播と成長を詳しく見ると、図 2(b) のようになる。この図では、 $20 \leq t \leq 100$  の時刻での攪乱の包絡線が  $t = 20$  ごとに描かれており、亜臨界レイノルズ数である。 $Re = 35$  では、攪乱の波束は下流へ流れ去り、 $x$  軸上のどの位置で観察してもその振幅が減衰している。しかし、波束の伝播する速さと同じ速さで動く系から観察するとき攪乱の大きさは成長している。一方、 $Re = 50$  (図 2(c)) では、波束は  $t \leq 60$  までの間は下流へ移流するが、それ以降は円柱後方の  $x = 25$  近傍に波束のピークが留まっている。

## 2.3 パッシブ増幅率とアクティブ増幅率

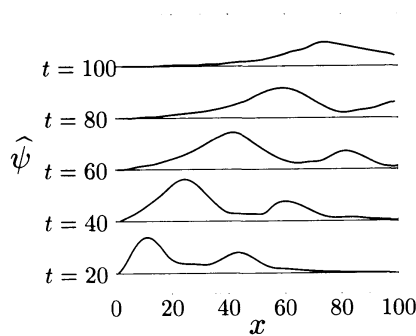
アクティブ増幅率  $\sigma_a$  を各位置  $x$  における攪乱の振幅の時間的な増幅率として定義する。さまざまなレイノルズ数において  $\sigma_a$  を評価した。その結果、攪乱を与えてから十分に時間がたつと増幅率  $\sigma_a$  は  $x$  には独立であり、円柱の後流全体で一意的に決まることが分かった。図 3(a) はこうして求めたアクティブ増幅率  $\sigma_a$  である。臨界レイノルズ数をこの図から評価すると、 $Re_a = 48.1$  となった。ここでの取り扱いでは、全体不安定性増幅率とアクティブ不安定性増幅率は平行流近似に基づいているかどうかを除けば同じ定義である。したがって、アクティブ不安定性の臨界値  $Re_a$  は全体不安定性の臨界値  $Re_g$  と一致する。ここで得られた臨界値  $Re_a = Re_g = 48.1$  は、流れの全体安定性の固有値問題から Jackson[5] によって計算された値  $Re_g = 46.184$  と 4% 以内の誤差で一致している。

パッシブ増幅率は、攪乱の波束と共に動く座標系から観察された各位置  $x$  での攪乱のピークの時間的な増幅率として定義される。亜臨界レイノルズ数と超臨界レイノルズ数の 2 つの場合について  $x$  軸上の各位置でパッシブ増幅率を計算すると図 3(b) のようになった。図 3(b) からわかるようにパッシブ増幅率  $\sigma_p$  は、アクティブ増幅率  $\sigma_a$  とは異なり円柱の後流全体で一意的には決まらない。 $Re = 35$  のとき流れは  $x = 24$  までパッシブ不安定であり、それより下流においてはパッシブ安定である。しかし、円柱の後流はすべての領域でアクティブ安定であることが図 3(a) からわかる。 $Re_g \leq Re = 50$  のときの流れ場ではパッシブ不安定領域は円柱の後流全体に広がっている。このとき攪乱の波束のピークは  $x = 25$  まで流れていくが、それよりも下流へは流れることなくその場にとどまるので  $x \geq 25$  のすべての位置で、アクティブ増幅率  $\sigma_a$  とパッシブ増幅率  $\sigma_p$  は一致する。したがって、 $Re = 50$  の流れ場において  $x \geq 25$  の範囲でパッシブ増幅率は一定であり、 $Re_g \leq Re$  における流れ場ではアクティブ不安定な領域が円柱すぐ後ろの領域だけでなく、円柱の後流全体に広がる。亜臨界レイノルズ数  $Re < Re_g$  における流れでは、すべての領域でアクティブ安定でありレイノルズ数が臨界値  $Re = Re_g$  に達すると、円柱後流の流れ場全体で同時にアクティブ不安定になることがわかった。

(a)



(b)



(c)

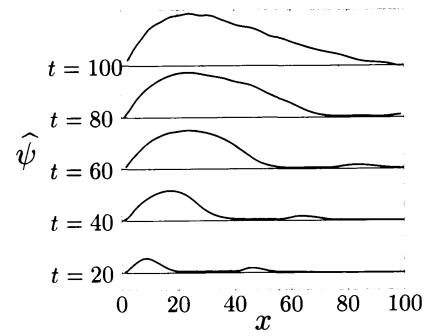


図 2: 攪乱の過渡的变化.  $x$  軸上における攪乱  $\hat{\psi}$  の分布. (a)  $Re = 35$ . (b) 波束攪乱の包絡線.  $Re = 35$ . (c) 波束攪乱の包絡線.  $Re = 50$ .

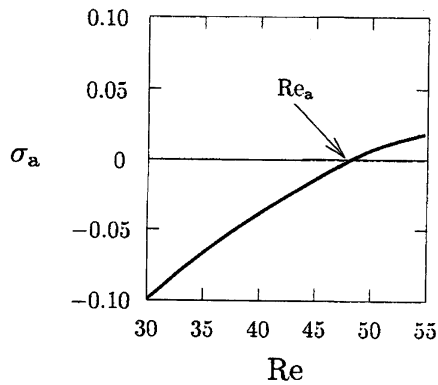
## 2.4 波束の位置と範囲

流れが定常流から振動流へと遷移する過程を詳しく見るために,  $Re = 35$  における攪乱の搬送波と波束のピークの伝播をグラフに描くと図 4(a) のようになる. 時間とともに攪乱の搬送波と波束のピーク  $x_p$  が下流へと流れている様子がわかる. また, 同様の図を  $Re = 50$  に対して描くと図 4(b) のようになる. この図からも  $Re = 50$  では攪乱のピークが  $x = 25$  より下流には流れていかないことがわかる. 図 4(a) から, 亜臨界レイノルズ数 ( $Re = 35$ ) では攪乱の後端は下流へ流れていっているが, 図 4(b) の超臨界レイノルズ数 ( $Re = 50$ ) においては波束の後端は下流へ流されることなく, 円柱のすぐ後ろにとどまっている. 一方で, 波束の前端はレイノルズ数に関係なく下流へと流れ去っていく.

全体不安定性が生じるよりも小さなレイノルズ数では流れ場は絶対安定であり, 全体不安定性の発生と共に流れ場全体が絶対不安定になることが分かったが, 絶対不安定性が生じたときにその振動を維持するメカニズムは不明である. このメカニズムを明らかにするため, 時刻  $t$  における波束の前端・ピーク・後端の位置をそれぞれ  $x_f(t)$ ,  $x_p(t)$ ,  $x_t(t)$  とし, 波束の広がりの特徴づける. これらの位置を時間の関数として,  $x-t$  平面に描くと図 5(a) のようになる. この図から分かることは, 前端  $x_f(t)$  の進行速度は全てのレイノルズ数で一定であり, レイノルズ数に依らず下流へ移流していくことである. 波束のピーク  $x_p(t)$  と後端  $x_t(t)$  は, レイノルズ数  $Re$  が臨界値  $Re_g$  に近づくにつれて, 進行速度が小さくなり, 共に  $x = 0$  すなわち, 円柱の後端に近づいていく. したがって, 超臨界状態  $Re > Re_g$  では, 後端では攪乱を与えた後も円柱後方に攪乱はとどまり, 移流しないことになる.

波束の前端・ピーク・後端のこの振る舞いは図 5(b) に示すように,  $x_f$ ,  $x_p$  と  $x_t$  の伝播速度から容易に

(a)



(b)

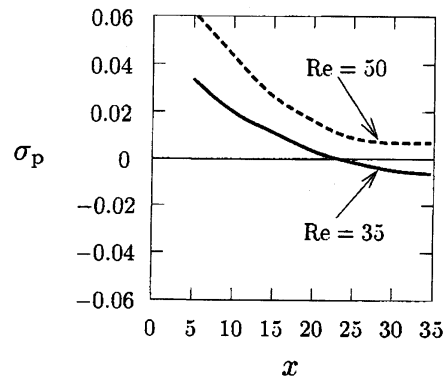
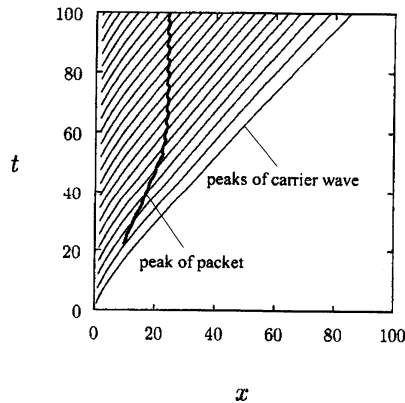


図 3: アクティブモード増幅率とパッシブモード増幅率. (a) アクティブモード増幅率  $\sigma_a$ . (b) パッシブモード増幅率  $\sigma_c$ .

(a)



(b)

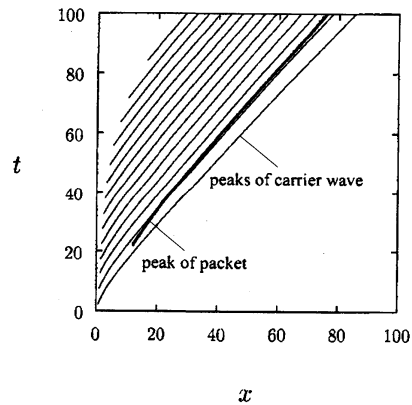


図 4: 波束攪乱の搬送波と波束のピークの軌跡, (a)  $Re = 35$ , (b)  $Re = 50$ .

分かる. 図 5(b) は, それぞれの速度がほぼ一定値となる  $80 < t < 100$  の区間で評価を行った. この図からも, 波束の前端の位置  $x_f$  は基本流の速さとほぼ同じ(約 0.9 倍)であることが観察できる. すなわち, 波束の前端はレイノルズ数に依らず速度一定で移流する. ピーク  $x_p$  の伝播速度は  $R_g$  に近づくにつれて次第に 0 に近づいていく. 一方, 波束の後端位置  $x_t$  は臨界レイノルズ数  $Re_g$  で突然 0 となる. この結果は, 流れの振動維持メカニズムを説明する上で最も重要な結果である. なぜなら, 流れの中での振動が維持される機構は, 波束の後端の伝播速度が 0 となることが最も重要であり, 波束はレイノルズ数に依らず常に下流へ移流しているが, その後端は移流効果による減衰よりも線形増幅による振幅の成長が卓越することにより, 円柱の後端に常に存在し, そのことが流れの振動源となっているからである. これが Takemoto and Mizushima の 2 つ目の結論である.

### 3 角柱後流におけるカルマン渦列の消滅と再生成

この節ではカルマン渦列の消滅と再生成の機構を考えるために, 角柱を過ぎる流れについて調べる.

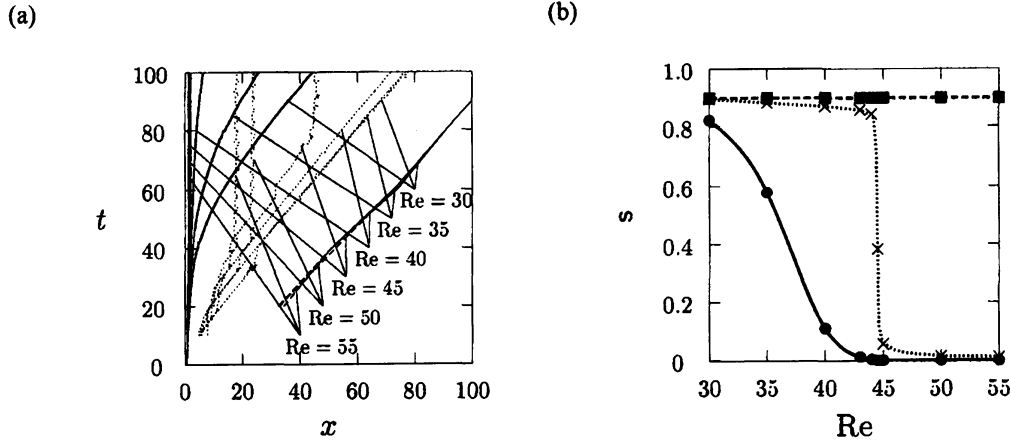


図 5: 波束攪乱の前縁  $v_f$ , ピーク  $v_p$ , 後端  $v_r$  の軌跡とその伝播速度. 太線: 後端. 点線: ピーク. 破線: 前縁.  
(a) 波束攪乱の前縁  $v_f$ , ピーク  $v_p$ , 後端  $v_r$  の軌跡. (b) 波束攪乱の前縁  $v_f$ , ピーク  $v_p$ , 後端  $v_r$  の伝播速度.

### 3.1 問題の定式化と数値計算の方法

#### 3.1.1 基礎方程式と境界条件

流速  $U$  の一様流中におかれた角柱を過ぎる流れを考える. 角柱の流れ方向の辺長を  $w$ , 流れと垂直な辺長を  $d$  として, 角柱のアスペクト比を  $A = w/d$  で定義する. 角柱の後端中央を原点  $O$  として, 流れ方向に  $x$  軸をとり, それと垂直に  $y$  軸をとる (図 6). 流れは非圧縮性 2 次元流であると仮定し, 流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を導入する. 流れを支配する基礎方程式は  $\psi$  と  $\omega$  についての渦度輸送方程式とポアソン方程式であり, 角柱の辺長  $d$  を代表長さにとり, 一様速度  $U$  を代表速度にとって無次元化すると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (2)$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

と表せる. ここで,  $Re \equiv Ud/\nu$  はレイノルズ数であり,  $\nu$  は流体の動粘性係数である.

流れの境界条件として, 角柱の柱状物体表面では滑りなし条件

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

を課す. 角柱表面における  $\psi$  の値を決めるためには, 圧力  $p$  の一価条件を用いる. すなわち, 角柱を内部に含む曲線  $C$  に沿って圧力の勾配  $\partial p / \partial s$  の積分が 0 となること,  $\oint_C \partial p / \partial s ds = 0$  を用いる. 上流側と流れに垂直方向の十分遠方では流速  $U$  の一様流を仮定し, 角柱を過ぎる流れの下流での流出条件には,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

を用い, 円柱を過ぎる流れにおける下流での流出条件にはゾンマーフェルト放射条件,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

を用いる. ここで, 位相速度  $c$  には下流境界における時間平均流速  $\langle u \rangle$  を採用する.

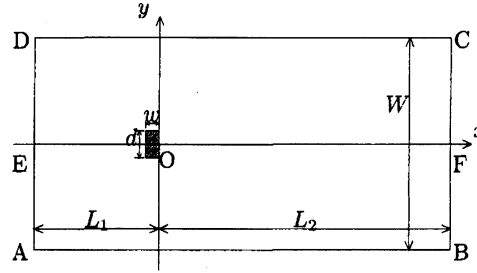


図 6: 角柱の配置と座標系.

### 3.1.2 対称定常解

レイノルズ数が小さいとき、流れ場は定常で角柱の中心を通り流れに平行な中心線 ( $x$  軸) に対して対称である。この対称流は、レイノルズ数に依らず、基礎方程式である渦度輸送方程式とポアソン方程式の定常解となっているが、レイノルズ数がある臨界よりも大きいときは対称流は不安定となり、実験でも数値シミュレーションでも実現されない。この対称定常解を  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  とする。対称性  $\bar{\psi}(x, -y) = -\bar{\psi}(x, y)$  および  $\bar{\omega}(x, -y) = -\bar{\omega}(x, y)$  を課すことにより、不安定な定常解をも数値シミュレーションにより計算で求めることができる。あるいは、(1) の時間微分項を省略して得られる定常方程式

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\omega} = 0, \quad (6)$$

$$\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega} \quad (7)$$

を解くことによって対称定常解を求めることができる

### 3.1.3 時間平均流

流れ場はレイノルズ数がある臨界値より大きくなると振動流へ遷移し、第 1 渦列と第 2 渦列を形成する。この第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできたほぼ一様な剪断速度場の不安定性によるものであるという考えが支配的である [21]。剪断速度場の不安定性を調べるために、流れ場の時間平均流  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  を求める。  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  を求めるためには、第 1 渦列と第 2 渦列の特徴を表す代表点  $P_1 ((x, y) = (20, 0))$  および  $P_2 ((x, y) = (100, 0))$  のそれぞれの点における速度の振動周期から第 1 渦列の振動周期  $T_1$  と第 2 渦列の振動周期  $T_2$  を評価する。それらは必ずしも有理数比とはならないが、  $T_1$  と  $T_2$  の最小公倍数周期  $T$  の近似値を求め、その 5 倍周期にわたる時間平均を  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  とする。

### 3.1.4 攪乱方程式と境界条件

攪乱  $\omega'$  および  $\psi'$  に関する方程式を求めるために、流れ関数と渦度をそれぞれ、  $\omega = \bar{\omega} + \omega'$  および  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$  と表す。これらの式を基礎方程式 (1) と (2) に代入し、対称定常流  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  の式 (6) と (7) を引き、  $(\psi', \omega')$  についての非線形項を無視すると、攪乱  $(\psi', \omega')$  についての線形方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = J(\psi', \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \omega') + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega', \quad (8)$$

$$\Delta \psi' = -\omega' \quad (9)$$

が得られる。この線形攪乱方程式を初期値・境界値問題として数値的に解くことにより、速度攪乱の空間的・時間的変化を観察することができる。時間平均流の安定性解析では、  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  の代わりに  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  を用いる。

あるいは、主流の線形安定性を固有値問題として定式化することも可能である。そのときは、攪乱の時間依存性を指数関数と仮定して  $\psi' = \hat{\psi}(x, y) \exp(\lambda t)$ ,  $\omega' = \hat{\omega}(x, y) \exp(\lambda t)$  と表す。ここで、 $\lambda$  は複素線形増幅率と呼ばれ、一般に複素数であり、その実部  $\lambda_r$  と虚部  $\lambda_i$  はそれぞれ攪乱の増幅率と角速度(振動数)を表している。これらを線形攪乱方程式(8)と(9)に代入すると、 $\hat{\psi}(x, y)$  と  $\hat{\omega}(x, y)$  に対する方程式

$$\lambda \hat{\omega} = J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \hat{\omega}, \quad (10)$$

$$\Delta \hat{\psi} = -\hat{\omega} \quad (11)$$

が得られ、これらの方程式(10)と(11)を境界条件の下で解き、固有値および固有関数を求める。

攪乱  $(\psi', \omega')$  あるいは  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  の境界条件として、角柱表面では次の滑りなし条件:

$$u = \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

を用い、上流と流れに垂直方向に十分に離れた計算領域側面境界では  $\psi' = \omega' = 0$  を課し、下流での流出条件には、

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

を用いる。ただし、 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  の境界条件については式(12)および(13)で、 $(\psi', \omega')$  を  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  で置き換える。ここでも、時間平均流の安定性解析では、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  の代わりに  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  を用いる。

### 3.1.5 数値シミュレーション

数値シミュレーションでは、差分法を用い初期値・境界値問題として基礎方程式(1)と(2)を数値的に解く。計算領域を  $x$  座標および  $y$  座標について、等間隔  $\delta x$  および  $\delta y$  の正方格子 ( $\delta x = \delta y$ ) に分割し、渦度輸送方程式(1)の時間微分を1次精度の前進オイラー法で近似し、粘性項および非線形項の空間微分を2次精度の差分で近似する。また、ポアソン方程式(2)は空間微分を2次精度の差分を用いて近似し、SOR法(Successive Over Relaxation Method)を用いて逐次代入法により解を求める。このとき、収束判定は各格子点  $(i\delta x, j\delta y)$  における時刻  $n\delta t$  での流れ関数  $\psi(i\delta x, j\delta y, n\delta t)$  の  $k-1$  回目の逐次解  $\psi_{i,j}^{n(k-1)}$  と  $k$  回目の値  $\psi_{i,j}^{n(k)}$  の絶対誤差の最大値が  $10^{-6}$  より小さくなったときに解は収束したとみなす。

時間刻みは主に  $\delta t = 0.001$  を用い、空間刻みを  $\delta x = \delta y = 0.1$  とした。これらの値をさらに小さくして計算を行ったが、 $\delta x = \delta y = 0.05$  の場合との流速の誤差は最大で2%であり、計算精度はこれらの値で十分である確認している。

線形攪乱方程式(8)と(9)の数値シミュレーションも式(1)と(2)の場合と同様に行う。ただし、初期条件には式(1)と(2)の数値シミュレーションの結果  $(\psi, \omega)$  から対称定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  を引いた解を用い、上流および計算領域側面での境界条件には  $\psi' = 0$  および  $\omega' = 0$  を適用する。

### 3.1.6 対称定常流の数値計算と対称定常流および時間平均流の線形安定性

定常流の数値計算と線形安定性についても数値シミュレーションと同様に差分法を用いる。方程式(6)と(7)における空間微分をすべて2次精度の差分で近似し、これらをSOR法による反復法で解くことにより対称定常解を求める。SOR法における解の収束判定は数値シミュレーションの場合とほぼ同様であるが、収束条件として、 $k-1$  回目の逐次解  $\psi_{i,j}^{(k-1)}$  と  $k$  回目の値  $\psi_{i,j}^{(k)}$  の絶対誤差の最大値が  $10^{-8}$  より小さくなったときに解は収束したとみなした。

## 3.2 計算結果

### 3.2.1 流れパターン

角柱を過ぎる圧縮性流れにおいては、角柱のアスペクト比が  $A = 0.5$  程度よりも小さいときに第1渦列の消滅が比較的上流で生じることが Inasawa, Nakano and Asai[26] により報告されているので、ここでは  $A = 0.2$  における流れの数値シミュレーションを行い、第1渦列の消滅と第2渦列の発生について詳しく調べる。

アスペクト比  $A = 0.2$  の角柱を過ぎる流れ場を  $Re = 30$  から 120 まで間のいくつかのレイノルズ数について、数値シミュレーションにより求めた。その代表的な流れ場は図7のようになる。図7(a)はレイノルズ数  $Re = 30$  のときの流れ場であり、孤立した渦は存在せず、剪断層が見られるのみである。 $Re = 40$  では流れは対称性を失い、角柱後方で振動が生じており、カルマン渦列は後流の広範囲において確認できる。レイノルズ数が大きくなるにしたがって、角柱後方のある位置より下流で振動が小さくなり、レイノルズ数が  $Re = 80$  (図7(c)) では、角柱の約  $30d$  下流 ( $x = 30$ ) で、カルマン渦列はほぼ消滅しており、単純な剪断層へと変化している。したがって、カルマン渦列の消滅は  $Re = 40$  と  $80$  の間で起こることになる。さらにレイノルズ数が大きくなり  $Re = 100$  になると、カルマン渦列の消滅していた領域の下流側で第2渦列が形成される (図7(d))。

次に、カルマン渦列を形成する渦の形状を見ていこう。レイノルズ数  $Re = 40$  (図7(b)) では、角柱から下流の  $75d$  までは、流れと垂直方向に長い楕円形の渦であるが、 $75d$  より下流へ流れるにつれて徐々に渦は流れ方向に長い楕円形渦へ近づく。レイノルズ数が  $80$  (図7(c)) になると、渦の形状は角柱直後で流れと垂直方向に長い楕円形渦であるが、 $20d \sim 25d$  で流れ方向に長くなり、 $30d$  あたりで横 ( $x$  方向) に伸びた前後の渦が合体し、帯状の剪断流が現れる。 $Re = 100$  では、第1渦列内の渦は  $Re = 80$  のときとあまり変化はないが、第2渦列の渦は第1渦列の渦より大きく、それらの間隔も広い。これらの結果は Durgin and Karlsson[21] の説明や Karasudani and Funakoshi [24] の実験および計算結果と定性的に一致している。

数値シミュレーションにおいて、第1渦列と第2渦列が観測された領域を図示すると、図8のようになる。第1渦列が生じるのは臨界レイノルズ数  $Re_c \sim 35$  より大きなレイノルズ数であり、 $Re \sim 35$  ではおよそ  $x = 100$  までは観測されているが、レイノルズ数が大きくなると観測される領域の下流端が上流側へ移動しその長さが短くなる。第2渦列は  $Re \sim 90$  程度から現れ、その上流端はレイノルズ数が大きくなるにつれて上流へ移動する。

### 3.2.2 分岐図

数値シミュレーションから、渦列の発生と消滅と再生成が生じるおよそのレイノルズ数がわかったが、この節では第1渦列と第2渦列の発生および渦列の消滅が生じるレイノルズ数を詳しく調べる。2つの渦列が発生する臨界レイノルズ数を調べるために、角柱後方の流れの振動の大きさを表す代表的な物理量として、角柱後方の  $x$  軸上  $x_1 = 20$  と  $x_2 = 100$  における  $y$  方向速度  $v_1$  および  $v_2$  の最大振動振幅  $a_1$  と  $a_2$  に着目する。観測点  $x_1$  は、第1渦列の振動振幅が大きくなる点であり、測定点  $x_2$  は第2渦列による振動が支配的となる点である。

振動振幅  $a_1$  と  $a_2$  をレイノルズ数  $Re$  の関数として描くと、図9のようになる。この図で、実線は観測点  $x_1 = 20$  での  $v_1$  の振動振幅  $a_1$ 、破線は  $x_2 = 100$  での  $v_2$  の振幅  $a_2$  を表している。実線は  $a_1 \propto (Re - Re_c)^{1/2}$ , ( $Re_c = 35.5$ ) の関係を満たしており、この図は解のホップ分岐を表している。すなわち、位置  $x_1$  でも  $x_2$  においても、 $Re_c$  までは  $y$  方向流速は0であり、対称な定常流であるが、レイノルズ数が  $Re_c$  よりも大きくなると、 $y$  方向流速が振動することから、対称性が破れ振動流へ遷移する。すなわち第1渦列が生じる。位置  $x_2$  で観測する  $v_2$  の最大振動振幅  $a_2$  は、第1渦列が生じる臨界レイノルズ数  $Re_c$  で生じるホップ分岐により、 $Re > Re_c$  で有限の値となる。最大振動振幅  $a_2$  は  $Re$  の増加に伴って急激に小さくなり、 $Re \sim 60$  程

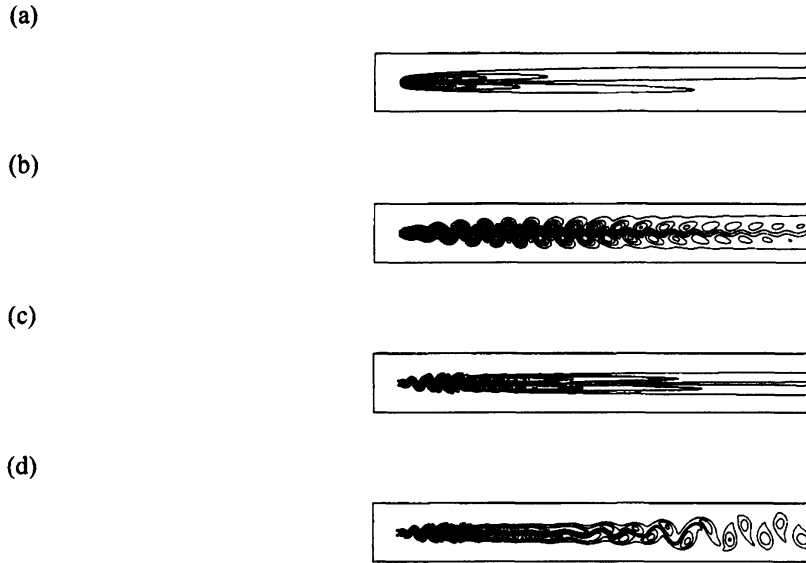


図 7: 流れ場. 渦度場 (渦度の等高線).  $A = 0.2$ . (a)  $Re = 30$ . (b)  $Re = 40$ . (c)  $Re = 80$ . (d)  $Re = 100$ .

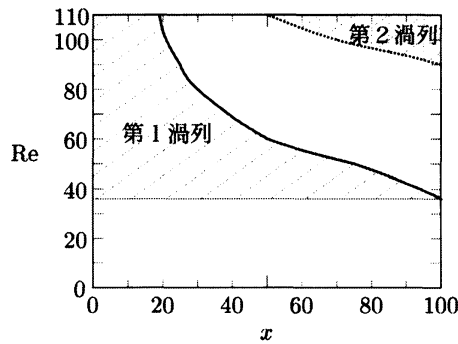


図 8: 第 1 渦列の存在範囲と第 2 渦列の存在範囲.  $A = 0.2$

度になると  $a_2$  はほぼ 0 となる. すなわち, 位置  $x_2 = 100$  ではカルマン渦列は消滅することになる. さらに, レイノルズ数が  $Re \sim 90$  程度になると,  $a_2$  は再び有限の値をもち, 第 2 渦列が生じていることがわかる. 図 9 より, 流れ場は  $Re_c = 35.5$  で対称定常解の不安定性により解のホップ分岐を生じ, 角柱後方全体にカルマン渦列が形成されることがわかった. また, レイノルズ数が大きくなるにしたがって下流からカルマン渦列が消滅し,  $Re = 90$  を超えると, 第 2 渦列が生じることがわかったが, 第 2 渦列がどのようなメカニズムで生み出されるのか不明である.

考えられる可能性としては, 対称定常解の第 2 不安定モードとして第 2 渦列が生じる可能性と, ホップ分岐により生じた第 1 渦列を含む振動流解が再び不安定となって第 2 渦列を含む振動流が生み出される可能性と, カルマン渦列の消滅領域の時間平均流が不安定となって第 2 渦列が生じる可能性である.

### 3.2.3 定常解の線形安定性解析

数値シミュレーションによって得られた流れ場と分岐図から, アスペクト比  $A = 0.2$  の角柱を過ぎる流れでは  $Re_c = 35.6$  で第 1 渦列が形成され,  $Re \sim 90$  で第 2 渦列が形成されることがわかった. この節では,

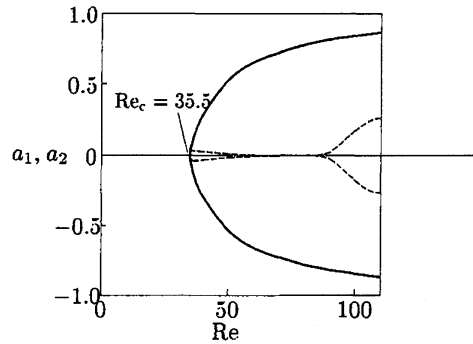


図 9: 振動振幅  $a_1$  と  $a_2$  (分岐図).  $A = 0.2$ . 実線:  $a_1 (x_1 = 20)$ . 破線:  $a_2 (x_2 = 100)$ .

第 1 渦列の消滅する原因と第 2 渦列が生じる理由を突きとめるため対称定常流の線形安定性解析を行う. レイノルズ数が大きくなるにつれて下流でカルマン渦列が消滅し, 第 2 渦列が形成されることから, 対称定常流の線形不安定モードとして, 第 1 固有モードが第 1 渦列を誘起し, 第 2 固有モードが第 2 渦列を誘起する可能性もある. これより, それぞれの渦列が発生するレイノルズ数付近での対称定常流に対する線形安定性を調べる.

流れの線形安定性を調べるため, 方程式 (6) と (7) を数値的に解き, 対称定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  を求め, 方程式 (10) と (11) および境界条件 (12) と (13) および上流と計算領域側面での境界条件からなる固有値問題を解く. 得られた固有値  $\lambda$  の実部  $\lambda_r$  は線形増幅率, 虚部  $\lambda_i$  は振動数を表す. 各レイノルズ数について固有値を計算すると,  $\lambda_r$  はレイノルズ数の関数として図 10 のようになる.  $\lambda_r > 0$  ならば対称定常流は不安定であり,  $\lambda_r < 0$  であれば安定である. また,  $\lambda_r = 0$  となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数  $Re_c$  であり, 図 10 より, 臨界レイノルズ数は  $Re_c = 35.6$  となった. この値は数値シミュレーションによって得られた第 1 回目のホップ分岐点  $Re_c = 35.5$  と一致している.

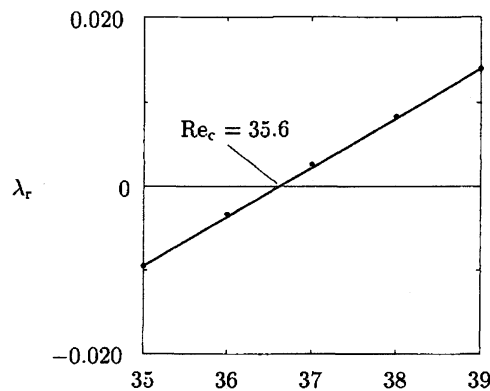


図 10: 線形増幅率  $\lambda_r$ .  $A = 0.2$ .

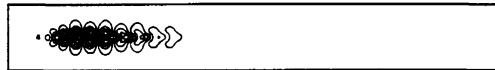
固有値問題の数値計算により得られる固有関数  $\hat{\omega}$  は  $x$  軸上の点  $P_1 ((x, y) = (20, 0))$  において,  $\hat{\omega}_r = 1$  となるように正規化する. このとき, 固有関数  $\hat{\psi}_r$  の実部  $\hat{\psi}_r$  は図 11 のようになる. 図 11(a) は  $Re = 40$  における流れ場 (流線) を表す固有関数であり, 渦は計算領域のほぼ全体にわたって観測される. ところが,  $Re = 80$  では図 11(b) のように, 攪乱は角柱の後方のある位置 ( $x \sim 50$ ) から下流で消えている. レイノルズ数が  $Re = 100$  においては第 2 渦列が形成しているにも関わらず, 第 1 渦列の存在範囲のみに一致した攪乱領域を形成している. レイノルズ数が大きくなると渦列の存在範囲は短くなるが, 攪乱の存在範囲も短くなり, 攪乱の存在範囲と第 1 渦列の存在範囲が一致するため, 第 1 渦列の消滅は攪乱の非線形相互作用に

依らずとも、既に線形不安定性の段階で生じていると結論される。この結論と Durgin and Karlsson[21] の渦モデル (非線形相互作用) との関係は未だ不明である。また、数値シミュレーションにより得られた第2渦列の関数形を初期条件として、第2固有モードを計算しても収束解が得られないことより、第2渦列生成の物理的メカニズムとしてこれまで考えられてきたように、第1渦列ができた後の振動流の時間平均流が不安定となって第2渦列が生じるという可能性が有力となった。その安定性解析の結果は3.5項で説明する。

(a)



(b)



(c)

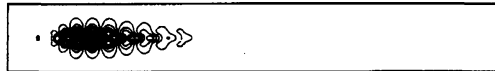


図 11: 線形固有関数(流れ場, 流線). 攪乱の実部  $\hat{\psi}_r$  (虚部もほぼ同じ). (a)  $Re = 40$ . (b)  $Re = 80$ . (c)  $Re = 100$

### 3.2.4 振動数

第1渦列と第2渦列の関係を調べるため、それぞれの渦列中での流れの振動数を評価する。各レイノルズ数について、第1渦列および第2渦列中での流れの振動数  $f_1$  および  $f_2$  を評価し、レイノルズ数の関係としてグラフに描くと図12のようになる。観測点  $P_1(x_1 = 20)$  と  $P_2(x_2 = 100)$  はそれぞれ第1渦列および第2渦列内の代表点である。図12で黒四角は観測点  $P_1$  における振動数、十字は  $P_2$  での振動数である。レイノルズ数がおよそ90より小さいときは観測点  $P_1$  と  $P_2$  における振動数は同じである、ただし、カルマン渦列の消滅が起こっているレイノルズ数  $Re < 90$  では、 $P_2$  での振動振幅  $a_2$  は  $P_1$  での振動振幅  $a_1$  の1000分の1のオーダーである。この結果で注目する点は、渦が消滅している領域の振動数は、非常に小さい振動振幅であるが第1渦列の振動数と一致するという点である。

レイノルズ数が90より大きくなると第2渦列が形成され、点  $P_1$  と  $P_2$  での振動数  $f_1$  と  $f_2$  は異なり、それらは有理比とはならない。これより、第2渦列は第1渦列の渦が合体して生じるものではなく、第1渦列が消えてできる流れの時間平均流が不安定となって生じるものであると予想される。このモードの発生について次項で考える。

### 3.2.5 時間平均流の線形安定性解析

対称定常解の線形安定性では、適切な初期条件を与えているにもかかわらず、第2渦列を誘起する原因の候補である第2固有モードの解を得ることはできなかった。第2渦列を誘起するもう一つの可能性として考えられるのは振動流の時間平均場が不安定となって第2渦列が生じる可能性である。

振動流を時間平均して平均流を求めるため、第1渦列の振動周期  $T_1$  と第2渦列の周期  $T_2$  の最小公倍数の周期  $T_3$  を評価し、周期  $T_3$  の5倍の時間にわたって流れ場  $(\psi, \omega)$  の時間平均を行い、これを  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  とおく。レイノルズ数が  $Re = 90$  より大きいとき第2渦列が形成されるので、 $Re = 90$  近傍での平均流の線形安定性を調べる。平均流の線形安定性は対称定常解の線形安定性を調べたのと同様に行うことも可能であるが、ここでは方程式(8)と(9)を適切な境界条件(12)と(13)および上流と計算領域の両側面での境

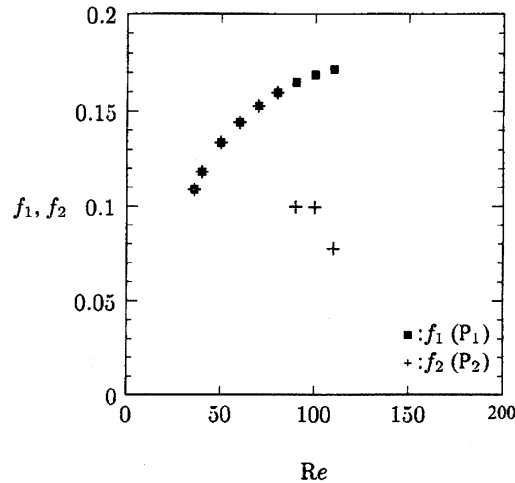
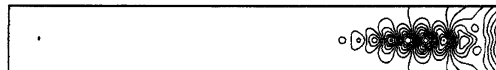


図 12: 振動数 (ストローハル数). 数値シミュレーション (点  $P_1$  での振動数  $f_1$  と点  $P_2$  での振動数  $f_2$ ). ■:  $f_1 (P_1, (x, y) = (20, 0))$ , +:  $f_2 (P_2, (x, y) = (100, 0))$ .

界条件の下で初期値・境界値問題として数値的に解くことにより求める. 攪乱  $(\psi', \omega')$  の増幅率と固有関数を求める. ここで, 初期として与える攪乱は数値シミュレーションで求めた  $(\psi, \omega)$  と時間平均流  $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  との差  $(\bar{\psi}, \bar{\omega}) - (\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$  にとる.

こうして得られたレイノルズ数  $Re = 90$  における攪乱の流線は図 13(a) のようになる. 攪乱は  $x = 110$  より下流に存在し, 同じレイノルズ数での数値シミュレーションより得られた渦度の等高線図を描くと図 13(b) のようになる. この図では  $x \sim 100$  より下流で微小な振動が生じており, レイノルズ数が大きくなるとこの領域で第 2 渦列が形成されると考えられる. また図 9 からわかるように, この微小振動は第 2 渦列の発生初段階に生じているものであり, この微小振動も第 2 渦列であることがいえる. さらに, この第 2 渦列の微小振動領域と図 13(a) の攪乱の分布はおよそ一致している. これより, 第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできた時間平均流 (剪断流) の不安定性によって誘起されると結論する. ただし, この計算については現在精度を確認中であり, また線形固有値問題の解を求めることにより確認を行っている. したがって, この結論は暫定的なものである.

(a)



(b)



図 13: 流れ場 ( $Re = 90$ ). (a) 攪乱, (b) 渦度の等高線.

## 参考文献

- [1] Von Kármán, Th., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., (1911), pp. 509-517, (1912), pp. 547-556.
- [2] Bénard, H., C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 147, (1908), pp. 839-842.

- [3] McKoen, C. H., Aeronautical Research Council, Courrent Paper, No. 303, (1956).
- [4] Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 18, (1963), pp. 288-296.
- [5] Jackson, C. P., J. Fluid Mech., Vol. 182, (1987), pp. 23-45.
- [6] R. J. Briggs, Cambridge, MIT Press ,(1964).
- [7] 山田道夫, “流れとパターン - 流れの安定性理論序論” (“パターン形成” 第3章), (朝倉書店, 1991, 東京), pp. 38-79.
- [8] Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., Chrysostomidis, C., J. Fluid Mech., Vol. 170, (1986), pp. 461-477.
- [9] Triantafyllou, G. S., Kupfer, K., Bers, A., Phys. Rev. Lett., Vol. 59, (1987), pp. 1914-1917.
- [10] Kupfer, K., Bers, A., Ram. A. K., Phys. Fluids, Vol. 30, (1987), pp. 3075-3082.
- [11] Monkewitz, P. A., Nguyen, L. N., J. Fluids Struct., Vol. 1, (1987), pp. 165-184.
- [12] Monkewitz, P. A., Phys. Fluids, Vol. 31, (1988), pp. 999-1006.
- [13] Hannemann, K., Oertel, H. Jr., J. Fluid Mech., Vol. 199, (1989), pp. 55-88.
- [14] Oertel, H. Jr., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp.539-564.
- [15] Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., Phys. Rev. Lett., Vol. 60, (1988), pp. 25-28.
- [16] Huerre, P., Monkewitz, P. A., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp. 473-537.
- [17] Takemoto, Y., Mizushima, J., Phys. Rev. E., Vol. 82, (2010), pp. 056316-1-6.
- [18] Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 14, (1959), pp. 843-848.
- [19] Okude, M., Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 24, (1981), pp. 95-105.
- [20] Okude, M., Matsui, T., Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 33, (1990), pp. 1-13.
- [21] Durgin, W. W., Karlsson, S. K. F., J. Fluid Mech., Vol. 48, (1971), pp. 507-527.
- [22] Sato, H., Kuriki, K., J. Fluid Mech., Vol. 11, (1961), pp. 321-352.
- [23] Cimbala, J. M., Nagib, H. M. Roshko, A., J. Fluid Mech., Vol. 190, (1988,) pp. 265-298.
- [24] Karasudani, T., Funakoshi, M, Fluid Dyn. Res., Vol. 14, (1994), pp. 331-352.
- [25] Matsui, T., Okude, M., In *Structure of Complex Turbulent Shear Flow*, IUTAM Symposium, Marseille (Springer, Berlin, 1983) pp. 156-164.
- [26] Inasawa, A., Nakano, T., Asai, M., Proc. Seventh Int. Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, (Ottawa, 2011), in press.