

# Perron-Ishii method for viscosity solutions

Shigeaki Koike (Saitama University)

小池茂昭 (埼玉大学)

## 1 序

粘性解は非発散型 2 階楕円型・放物型偏微分方程式の「適切な」弱解として 1980 年代初頭に M. G. Crandall と P.-L. Lions によって導入された概念である。現在も応用の範囲を広げ、様々な研究がなされている。

ここで言う「適切な」の意味は幾つかあるが、一つには一意性が示し易いという点が挙げられる。また、退化した係数を持つ 2 階の方程式も扱えるという利点もある。例えば、光学に現れるアイコナル方程式

$$|Du| = 1 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

は、1 階の方程式であるが退化した 2 階の方程式と見なせる。ここで  $Du$  は、 $u$  の勾配ベクトルである。

(1) のディリクレ条件  $u(x) = 0$  ( $x \in \partial\Omega$ ) 下での期待される解  $u$  は、境界  $\partial\Omega$  からの距離関数  $u(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$  であるが、 $C^1$  級にならないことが知られている。つまり、“古典解” は存在しない。そこで、殆ど全ての点で (1) を満たす関数を“弱解”と呼ぶことにしてみる。すると、例えば 1 次元で  $\Omega = (-1, 1)$  の場合、 $u'(x) = \pm 1$

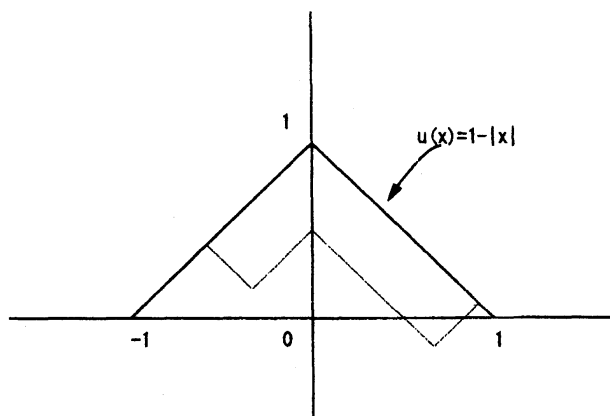


図 1: アイコナル方程式の粘性解

で、 $u(\pm 1) = 0$  となるぎざぎざの折れ線は全て弱解になってしまうので、この意味では一意性がない。

一方、この例の場合には  $u(x) = -|x| + 1$  が期待される解である。後で述べる粘性解の定義に従うと、この  $u$  が唯一の粘性解となっており、粘性解の定義が正当化される典型的な例として知られている。ところで、粘性解という名前は、1 階の偏微分方程式に対して、“粘性消滅法” による近似解の一致収束極限関数が満たす性質を定義としたことが由来である。例えば、(1) に対しては

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + |Du_\varepsilon| = 1 & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\varepsilon > 0)$$

が、粘性消滅法による近似方程式であり、 $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u_\varepsilon(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$  となることが分かり、これが (1) の粘性解になることが示される。

もし、 $\varepsilon < 0$  として極限を取ると  $\lim_{\varepsilon \uparrow 0} u_\varepsilon(x) = -\text{dist}(x, \partial\Omega)$  となり、 $-|Du| = -1$  の粘性解になることに注意しておく。

偏微分方程式論において一意性の問題と並んで重要なものに「解の存在」がある。上述のような粘性消滅法で構成した近似解のアプリオリ評価をすることで極限の存在を示し、それが一致収束極限になっているとき、粘性解になっているので、これが粘性解の存在定理の一つである。しかし、多くの場合、近似解のアプリオリ評価は易しくない所以他の存在定理が必要になる。

粘性解理論においては、粘性消滅法以外に 2 種類の存在定理がある。一つは、具体的に係数などが与えられている方程式の場合に、対応する最適制御問題 (例 5)・微分ゲーム (例 6) があるので、そちらの理論を用いて具体的に解を「値関数」として書き表すという方法である。これは、線形の場合の特性曲線の方法に相当する。この方面の研究は古くからあり、値関数が方程式の微分階数と同じだけ微分可能であれば、その偏微分方程式を満たすことが知られていた。しかし、微分可能性の知られていない値関数でも、動的計画原理を用いて、(十分に一般的な条件下で) 元の偏微分方程式の粘性解になることが示される。これも粘性解が適切な弱解であることを裏付けている。

偏微分方程式が具体的に表せていない、もしくは具体的に表せても値関数を計算すると複雑な場合や、抽象的に扱いたい場合には、粘性解の存在定理として石井仁司氏による「Perron の方法」[6] がある。ここでは、ポテンシャル論における Perron-Wiener-Brelot の方法と区別するために、Perron-Ishii の方法と呼ぶことにする。

## 2 扱える方程式の例

以降、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を開集合とし、次の一般的な方程式を考える。

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は未知関数で、 $D^2u(x)$  をヘッセ行列とする (通常、 $F$  中の最初の  $x$  以外の  $x$  は略すことが多い)。また、 $S^n$  を  $n \times n$  実対称行列全体とし、 $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbf{R}$  と  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は与えられた関数とする。右辺の  $f$  を左辺に組み込んでもいいが、後の都合上、このような方程式を扱うことにする。 $f$  は非斉次項に対応するので

$$F(x, 0, 0, O) = 0 \quad (\forall x \in \Omega)$$

を仮定する。

《例 1》  $F(x, r, q, X) = -\text{trace}(X)$  の時、(2) はポアッソン方程式となる。ただし、マイナス符号をつけるのは粘性解の流儀なので本質的ではない。

粘性解が有効なのは、特に非発散型方程式であり、典型例を挙げておく。

《例 2》 一様楕円性定数  $0 < \lambda \leq \Lambda$  に対し、

$$F(x, r, q, X) = P_{\lambda, \Lambda}^+(X) := \max\{-\text{trace}(AX) \mid A \in S^n, \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$$

とおく。これは Pucci 作用素と呼ばれる。また、

$$P_{\lambda, \Lambda}^-(X) := \min\{-\text{trace}(AX) \mid A \in S^n, \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$$

も、もう一つの Pucci 作用素である。これらは、後述する一様楕円型条件を満たす。

以上は、 $F$  が  $X \in S^n$  だけに依存する場合だが、次の二つの例は  $q \in \mathbf{R}^n$  にも依存する例である。以降、 $q \in \mathbf{R}^n$  の第  $i$  成分を  $q_i$ 、 $X$  の  $i$  行  $j$  列成分を  $X_{ij}$  等と表す。

《例 3》  $F(x, r, q, X) := -\sum_{i,j=1}^n q_i q_j X_{ij}$  は無限大ラプラス作用素と呼ばれる。これは、退化楕円型作用素である。いわゆる  $p$ -ラプラシアンを形式的に  $p \rightarrow \infty$  とした時の極限作用素で、リプシッツ・ノルム最小化問題等に現れる。

《例 4》  $F(x, r, q, X) := -\text{trace}(X) + \sum_{i,j=1}^n q_i q_j X_{ij} |q|^{-2}$  は、平均曲率流の研究に用いられる退化楕円型作用素である。

以上の例は  $(x, r)$  変数がない場合であり、全ての変数がある最適制御や微分ゲームに現れる偏微分方程式の例を挙げる。ただし、(2) の形で書くと不自然なので、応用に現れる形で述べる。

《例 5》 古くから研究されてきた確率最適制御問題におけるベルマン方程式とは次のような方程式である。( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^n$  の通常の内積とする。)

$$\max_{\alpha \in A} \{-\text{trace}(A_\alpha(x)X) + \langle b_\alpha(x), q \rangle + c_\alpha(x)r - f_\alpha(x)\} = 0$$

ここで、 $A_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, f_\alpha$  は与えられた関数であり、 $A_\alpha \geq 0$  (退化楕円性) を仮定する。また、制御集合  $A$  の元  $\alpha \in A$  は、制御パラメータと呼ばれる。右辺は、変数  $(q, X)$  に関して凸であることに注意する。 $\max$  を  $\min$  に置き換えた方程式もベルマン方程式と呼ばれ、その時は変数  $(q, X)$  に関して凹になる。

《例6》 更に、もう一つパラメータを増やしたアイザックス方程式があり (記号の説明は略す)、微分ゲームで扱われる。これは  $(q, X)$  に関して凸にも凹にもならないので、完全非線形と呼ばれる。

$$\max_{\alpha \in A} \min_{\beta \in B} \{-\text{trace}(A_{\alpha, \beta}(x)X) + \langle b_{\alpha, \beta}(x), q \rangle + c_{\alpha, \beta}(x)r - f_{\alpha, \beta}(x)\} = 0$$

### 3 粘性解の定義

(2) の粘性解の定義を与えておこう。簡単のため、

$F$  と  $f$  は連続

を仮定する。

定義  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  が (2) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) とは、任意の  $\psi \in C^2(\Omega)$  に対し、 $u^* - \psi$  (resp.,  $u_* - \psi$ ) が  $x \in \Omega$  で最大値 (resp., 最小値) を取るならば、

$$F(x, u^*(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \leq f(x) \quad (\text{resp., } F(x, u_*(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) \geq f(x))$$

を満たすこととする。

$u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  が (2) の粘性解とは、粘性劣解かつ粘性優解のことを言う。

【注意】 ここで、 $u^*$  や  $u_*$  は、それぞれ上半連続包、下半連続包とする (定義は、[5] や [7] を参照)。

不等式の向きを忘れないために、(2) の粘性劣解 (resp., 優解) を  $F(x, u, Du, D^2u) \leq f$  (resp.,  $\geq f$ ) の粘性劣解 (resp., 優解) ということがある。

粘性優解の定義の幾何的イメージ 定義の不等式の  $F$  の中の  $r$  変数のところには、 $u^*(x)$  が入っていることに気をつけると、“テスト関数  $\psi$ ” は定数を足しても構わない事が分かる。つまり、 $u^* - \psi$  が  $x$  で最大値を取れば、 $\psi(\cdot)$  の代わりに  $\psi(\cdot) + u^*(x) - \psi(x)$  を新たな  $\psi$  とすることで、

$$u^*(x) - \psi(x) = 0 \geq u^*(y) - \psi(y) \quad (\forall y \in \Omega)$$

と仮定して一般性を失わない。つまり、 $u^*$  のグラフに上から、 $x$  で“接する”関数  $\psi$  の微分を方程式に代入していることになる。

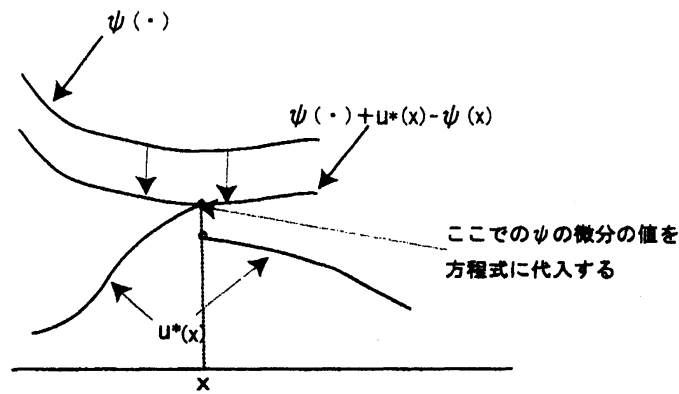


図 2: 粘性優解の定義の幾何学的イメージ

超関数の意味での弱解は部分積分を通して定義されるが、粘性解は“部分微分”を通して定義されると標語的に言うこともできる。

第 1 章の方程式 (1) を 1 次元で考えた場合、 $u(x) = |x| - 1$  もディリクレ条件  $u(\pm 1) = 0$  を満たすが、 $\psi(x) \equiv -1$  と取ると、 $u - \psi$  は  $x = 0$  で最小値を取るが、 $|\psi'(0)| \geq 1$  を満たしていないので、(1) の粘性優解ではないので粘性解ではない。(粘性劣解であることは簡単に示せる。実際、危険な点は  $x = 0$  であるが、 $|x| - 1 - \psi(x)$  が  $x = 0$  で最大値を取るような  $C^1$  関数  $\psi$  は存在しないので、粘性劣解の不等式  $|\psi'(0)| \leq 1$  を示す必要がないからである。)

## 4 Perron-Ishii の方法

Perron-Ishii の方法 [6] の修正版 ([8]) を述べる。 $USC(\Omega)$  と  $LSC(\Omega)$  をそれぞれ、 $\Omega$  上の上半連続関数全体、下半連続関数全体とする。また、 $F$  に楕円性の条件が必要になる。

**定義**  $F : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbf{R}$  が楕円型であるとは、任意の  $X \geq Y$  を満たす  $X, Y \in S^n$  に対し、

$$F(x, r, q, X) \leq F(x, r, q, Y) \quad (\forall (x, r, q) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$$

が成り立つこととする。

**【注意】**  $F$  が楕円型ならば、(2) の古典劣解 (resp., 古典優解) は、粘性劣解 (resp., 粘性優解) になる。実際、 $u \in C^2(\Omega)$  が (2) の古典劣解、すなわち

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq f(x) \quad (\forall x \in \Omega)$$

が成り立つとする。任意の  $\psi \in C^2(\Omega)$  に対し、 $u - \psi$  が最大値を  $x \in \Omega$  で取れば、 $Du(x) = D\psi(x)$  と  $D^2u(x) \leq D^2\psi(x)$  が成り立つので、楕円性より  $Du(x)$  と  $D^2u(x)$  をそれぞれ  $D\psi(x)$  と  $D^2\psi(x)$  で置き換えた不等式が成立する。

定理 1  $F$  と  $f$  は連続とし、 $F$  は楕円型であるとする。

(2) の粘性劣解  $\xi \in USC(\Omega)$  と粘性優解  $\eta \in LSC(\Omega)$  が存在し、

$$S := \{v \in C(\Omega) \mid v \text{ は (2) の粘性劣解で } \xi(x) \leq v(x) \leq \eta(x) \ (\forall x \in \Omega) \text{ を満たす}\}$$

とおき、 $S \neq \emptyset$  を仮定する。 $u(x) := \sup\{v(x) \mid v \in S\}$  とおくと、 $u$  は (2) の粘性解である。

【注意】 オリジナル論文 [6] では、 $S$  の元  $v$  に連続性は仮定していない。

《証明の概略》 ポテンシャル論流 ([1]) に言えば、 $S$  が「飽和」性 ([1]) を満たすことに相当する。

(I)  $u$  が粘性劣解であること  $\psi \in C^2(\Omega)$  が  $x \in \Omega$  で  $u^*$  に上から接しているとする。もし、

$$u^*(x) = v(x) (= \psi(x)) \text{ となる } v \in S \text{ が存在すれば、}$$

$\psi$  は  $v$  に上から接しているので  $v$  が粘性劣解であることの定義より簡単に分かる。

しかしながら、下線部は一般に成り立たないので、正確な証明が必要だがここでは省略する ([5] や [7] を参照)。

(II)  $u$  が粘性優解であること (I) では、 $F$  の楕円性は用いなかったが、ここでは用いる。

証明は背理法による。 $u$  が粘性優解でないとすると、次を満たす  $\psi \in C^2(\Omega)$ ,  $x \in \Omega$  と  $\theta > 0$  が存在する。(粘性優解の場合、テスト関数が下から接していることに注意)

$$\begin{aligned} 0 &= u_*(x) - \psi(x) \leq u_*(y) - \psi(y) \quad (\forall y \in \Omega), \\ F(x, \psi(x), D\psi(x), D^2\psi(x)) &\leq f(x) - 2\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

$F$  と  $f$  の連続性から、小さい  $\delta > 0$  で次を満たすものがある。

$$F(y, \psi(y), D\psi(y), D^2\psi(y)) \leq f(y) - \theta \quad (\forall y \in B_\delta(x))$$

以下、 $B_\delta(x) := \{y \in \mathbf{R}^n \mid |x - y| < \delta\}$  とおく。

$\psi(x) < \eta(x)$  が成り立つ。なぜなら、もし  $\psi(x) = \eta(x)$  とすると、 $\psi \leq \eta$  だから、 $\eta$  が粘性優解であることから (3) に矛盾してしまう。

よって、 $x$  の近傍でも  $\psi < \eta$  が成り立ち、十分小さい  $\tau > 0$  をとると、

$$F(y, \psi(y) + \tau, D\psi(y), D^2\psi(y)) \leq f(y) \quad (\forall y \in B_\delta(x))$$

となる。さらに、 $\xi(y) \leq \psi(y) + \tau \leq \eta(y) \ (\forall y \in B_\delta(x))$  となるように  $\delta$  を調節しておく。

つまり、 $\psi(\cdot) + \tau$  は、 $B_\delta(x)$  では、(2) の古典劣解になるから、楕円性より粘性劣解にもなる。

ここで、 $\hat{u}$  を次のようにおく。

$$\hat{u}(y) = \begin{cases} \psi(y) + \tau & (y \in B_\delta(x)), \\ u(y) & (y \in \Omega \setminus B_\delta(x)) \end{cases}$$

$\hat{u} \in S$  が示せれば、 $\hat{u}(x) > u_*(x)$  より、 $u$  の構成法から矛盾が起こりそうである。しかしながら、二つ問題点がある。

一つは、 $y \in \partial B_\delta(x)$  で  $\psi(\cdot) + \tau$  が粘性劣解になっているかどうか分からない点である。つまり、 $\varphi \in C^2(\Omega)$  に対し、 $\hat{u} - \varphi$  が  $y \in \partial B_\delta(x)$  で最大値を取ったときに、 $F(y, \hat{u}(y), D\varphi(y), D^2\varphi(y)) \leq 0$  が示せない。

もう一つは、 $\hat{u} \in C(\Omega)$  を示せない点である。これは、 $S \subset C(\Omega)$  としたために起きる困難である。

これら为了避免のために、最初の  $\psi$  の代わりに  $\psi(y) - \varepsilon|x - y|^2$  ( $\varepsilon > 0$ ) として、 $u(y) > \psi(y) + \tau$  ( $y \in \partial B_\delta(x)$ ) となるようにあらかじめ取っておく。さらに、各  $y \in \partial B_\delta(x)$  に対し、 $v_y \in S$  と  $\delta(y) > 0$  で、 $v_y(z) > \psi(z) + \tau$  ( $\forall z \in B_{\delta(y)}(y)$ ) となるものを選び、 $\partial B_\delta(x)$  のコンパクト性から  $\partial B_\delta(x) \subset \bigcup_{k=1}^m B_{\delta(y_k)}(y_k)$  となる  $y_k \in \partial B_\delta(x)$  が見つかる。そこで、

$$\hat{u}(y) = \begin{cases} \psi(y) + \tau & (y \in B_\delta(x)), \\ \max_{k=1,2,\dots,m} v_{y_k}(y) & (y \in \Omega \setminus B_\delta(x)) \end{cases}$$

と置き直すことで解決できる。

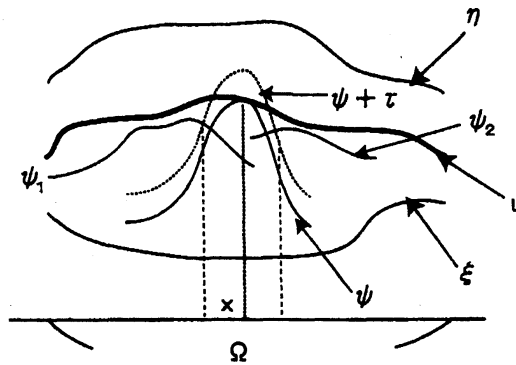


図 3: 粘性優解であることの証明のイメージ

## 5 応用 — Hölder 連続性 —

修正版 Perron-Ishii の方法の利点を一つあげる。次のような単純な線形の方程式を考える。

$$-\text{trace}(A(x)D^2u) = f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

ここで、 $A : \Omega \rightarrow S^n$  は、連続をは仮定しないが一様楕円性を満たすとする。つまり、

$$\lambda I \leq A(x) \leq \Lambda I \quad (\forall x \in \Omega)$$

となる  $0 < \lambda \leq \Lambda$  があるとする。

一様楕円型であって  $A(\cdot)$  が可測係数の場合、一般には粘性解の一意性が成り立たない反例がある ([9], [10])。ただし、可測係数の場合、各点での  $A(\cdot)$  の値は意味がないので、3章の粘性解の定義は使えず、 $L^p$  粘性解の概念を導入する必要があるが本稿では割愛する。

通常の粘性解理論では、一意性を導くための比較原理から連続性が導かれる。しかしながら、一意性の反例があるので比較原理は期待できないので、 $A(\cdot)$  が連続でない場合は粘性解の連続性は自明ではない。この章では、前章の“修正版”Perron-Ishii の方法で構成した粘性解は局所ヘルダー連続性であることを示す。このために、次の弱 Harnack 不等式を示せば充分である。以下、平行移動と縮尺を考えることで、原点を中心とした  $n$ -次元立方体上で (4) を考える。 $Q_r$  を原点中心、一辺の長さ  $r$  の  $n$ -次元立方体とする。また、十分大きな  $R > 0$  に対し、 $Q_R \subset \Omega$  を仮定しておく。ただし、以下の議論は局所的なので  $R > 0$  が大きいという仮定は実は必要ない。

第2章の《例2》に現れた Pucci 作用素  $\mathcal{P}_{\lambda, \Lambda}^{\pm}$  を  $0 < \lambda \leq \Lambda$  を固定して、簡単に  $\mathcal{P}^{\pm}$  と書く。以降、 $\pm$  は複合同順で述べていく。

**弱 Harnack 原理** 次の『…』を満たす  $q > 0$  と  $C > 0$  が存在する。『 $v \in LSC(\Omega)$  が

$$\mathcal{P}^+(D^2v) \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

の非負粘性優解ならば、

$$\|v\|_{L^q(Q_1)} \leq C \inf_{Q_1} v$$

が成り立つ。』

《弱 Harnack 原理を仮定して、局所ヘルダー連続性が成り立つこと》

(I)  $f \equiv 0$  の場合  $M_r := \sup_{Q_r} u$ 、 $m_r := \inf_{Q_r} u$  とおく。 $U := M_2 - u$ 、 $V := u - m_2$  とおくと、どちらも  $Q_2$  上で非負である。また、どちらも  $\mathcal{P}^-(D^2u) \geq 0$  の粘性優解になる。よって、弱 Harnack 原理より

$$\|M_2 - u^*\|_{L^q(Q_1)} \leq C \inf_{Q_1} (M_2 - u^*) \leq C(M_2 - M_1) \quad (6)$$



と

$$\|u_* - m_2\|_{L^q(Q_1)} \leq C \inf_{Q_1} (u_* - m_2) \leq C(m_1 - m_2) \quad (7)$$

が成り立つ。 $q > 0$  は 1 より大きいことは示せないので  $\|\cdot\|_{L^q(Q_1)}$  はノルムとは限らないが、 $0 < q < 1$  の時には三角不等式の代わりに

$$\|g + h\|_{L^q(Q_1)} \leq 2^{1/q} (\|g\|_{L^q(Q_1)} + \|h\|_{L^q(Q_1)})$$

は成り立つ。よって、

$$\|M_2 - u^* + u_* - m_2\|_{L^q(Q_1)} \leq 2^{1/q} C(M_2 - M_1 + m_1 - m_2) \quad (8)$$

が導かれるが、これでは  $u^* \geq u_*$  しか分からないので、左辺の  $\|\dots\|$  の中の  $-u^*$  と  $u_*$  がキャンセルできるかどうか分からない。

そこで、 $u(x) := \sup\{v(x) \mid v \in S\}$  と定義したことを思い出す。任意の  $v \in S$  は (4) の粘性劣解だから、 $M_2 - v$  は (5) の非負粘性優解になる。よって、 $u^*$  の代わりに  $v$  で (6) の代わりに

$$\|M_2 - v\|_{L^q(Q_1)} \leq C(M_2 - \sup_{Q_1} v)$$

が成り立つ。ところで、 $u \geq v$  で、 $v$  は連続だから  $u_* \geq v$  が成り立つので (8) に対応する式は

$$M_2 - m_2 \leq \|M_2 - v + u_* - m_2\|_{L^q(Q_1)} \leq 2^{1/q} C \left( M_2 - \sup_{Q_1} v + m_1 - m_2 \right)$$

となり、 $v \in S$  の任意性から上式右辺の  $\sup_{Q_1} v$  は  $M_1$  に置き換えられる。それを變形して

$$M_1 - m_1 \leq \theta(M_2 - m_2) \quad (\exists \theta \in (0, 1))$$

を得る。縮尺法、つまり  $w(x) := u(rx)$  ( $r > 0$ ) とおいて、同じ議論を繰り返すことで

$$M_r - m_r \leq \theta(M_{2r} - m_{2r})$$

が導かれ、後は標準的な方法でヘルダー連続性が示せる。

(II)  $f \equiv 0$  でない場合  $f \in L^n(Q_2)$  に対して、 $w^\pm \in C(\overline{Q_2}) \cap W_{loc}^{2,n}(Q_2)$  で、次を満たす関数が存在することが知られている (cf. [7])。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-(D^2 w^\pm) \geq \mp f & \text{a.e. in } Q_2, \\ w^\pm = 0 & \text{on } \partial Q_2 \end{cases}$$

実際、この事実を示すためには  $f$  を滑らかな関数  $f_\varepsilon$  で近似して、近似方程式の解のアプリオリ評価をするわけだが、後述する最大値の原理から、近似解  $w_\varepsilon^\pm$  の  $L^\infty$

評価が得られるので、その極限関数  $w^\pm$  も  $\sup_{Q_2} |w^\pm| \leq C_0 \|f\|_{L^n(Q_2)}$  を満たすことが分かる。ここで、 $L_r := C_0 \|f\|_{L^n(Q_r)}$  とおく。

$\pm u$  が  $\mathcal{P}^+(D^2u) \geq \pm f$  の粘性優解であることと、 $\mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^-(Y) \leq \mathcal{P}^+(X+Y)$  に注意すれば、 $v^\pm := \pm u + w^\pm$  とおいたとき、 $v^\pm$  は (5) の粘性優解になる。(I) と同じ記号  $M_r, m_r$  を用いると、 $U := M_2 + L_2 + v^-$  と  $V := v^+ - L_2 - m_2$  は、(5) の非負粘性優解となることがわかる。故に、弱 Harnack 原理から

$$\|U_*\|_{L^q(Q_1)} \leq C(M_2 + 2L_2 - M_1) \quad \text{と} \quad \|V_*\|_{L^q(Q_1)} \leq C(m_1 - m_2)$$

が成立する。ここでも、(I) と同じ困難があり、両辺の和を取ったとき左辺の中身が打ち消しあわない。そこで、 $U$  中の  $u$  を任意の  $v \in S$  と置き換えれば、

$$M_2 - m_2 \leq C \left( M_2 - \sup_{Q_1} v + m_1 - m_2 \right) + 2CL_2$$

となり、(I) と同じ論法で

$$M_1 - m_1 \leq \theta(M_2 - m_2) + 2L_2 \quad (\exists \theta \in (0, 1))$$

を得る。縮尺して  $\zeta(x) := u(rx)$  ( $r > 0$ ) とおくと、 $\mathcal{P}^+(D^2\zeta(x)) \geq r^2 f(rx)$  の粘性優解になることに注意すれば、

$$M_r - m_r \leq \theta(M_{2r} - m_{2r}) + 2rL_2$$

となるので、最初の場合に比べ右辺第 2 項が加わるが、標準的な方法でヘルダー連続性が示せる。

## 6 弱 Harnack 原理の証明の概略

この証明には、次の Aleksandrov-Bakelman-Pucci (ABP と略す) の最大値原理が必要となる。 $O \subset \mathbf{R}^n$  を有界な開集合とする。

**ABP 最大値原理** 次の『…』を満たす定数  $C > 0$  が存在する。『 $u \in C(\overline{O}) \cap C^2(O)$  ならば、

$$\sup_O u \leq \sup_{\partial O} u^+ + C \| -\Delta u \|_{L^n(\Gamma[u; O] \cap O^+[u])}$$

が成り立つ。』ただし、 $v: O \rightarrow \mathbf{R}$  に対し、

$$\Gamma[v; O] := \{x \in O \mid \exists q \in \mathbf{R}^n \text{ such that } v(y) \leq v(x) + \langle p, y - x \rangle \ (\forall y \in O)\}$$

であり、 $v$  の  $O$  上の上接点集合という。また、 $O^+[v] := \{x \in O \mid v(x) > 0\}$  とおいた。

【注意】  $\Gamma[u; O]$  上で、 $u$  は凹なので、右辺第2項のノルムの中身は  $P^\pm(D^2u)$  で置き換えられる。更に、 $u$  が  $P^-(D^2u) \leq f$  の粘性劣解ならば、更に  $f$  で置き換えられることが知られている ([4])。

次に、立方体分割の補題が必要になるが、まず記号の説明をする。 $Q_1$  の一辺の長さを  $1/2$  にした立方体たちを  $\{Q_k^1\}_{k=1}^{2^n}$  とする。 $Q_1$  は各  $Q_k^1$  の“親” と呼ばれる。更に、各  $Q_k^1$  の一辺を半分、つまり  $1/2^2$  にした立方体たち  $\{Q_{k,j}^2\}_{j=1}^{2^n}$  とすると、これらの親は  $Q_k^1$  である。これを繰り返して作られた立方体たちを

$$\mathcal{Q} := \{Q_{k_1, k_2, \dots, k_m}^m \mid m = 1, 2, \dots, k_j = 1, 2, \dots, 2^n\}$$

とおく ( $m$  は、1 辺の長さが  $1/2^m$  を表す)。 $Q \in \mathcal{Q}$  に対し、その親を  $\tilde{Q}$  と書く。

また、可測集合  $U \subset \mathbf{R}^n$  に対し、 $|U|$  で  $U$  の  $n$  次元ルベグ測度を表す。

**立方体分割の補題** (Lemma 4.2 [3])  $A \subset B \subset Q_1$  を可測集合で  $\delta \in (0, 1)$  が次を満たすとする。

- $$\begin{cases} (a) & |A| \leq \delta \\ (b) & Q \in \mathcal{Q} \text{ が } |A \cap Q| > \delta |Q| \text{ を満たすならば、} \tilde{Q} \subset B \text{ となる。} \end{cases}$$

すると、 $|A| \leq \delta |B|$  が成り立つ。

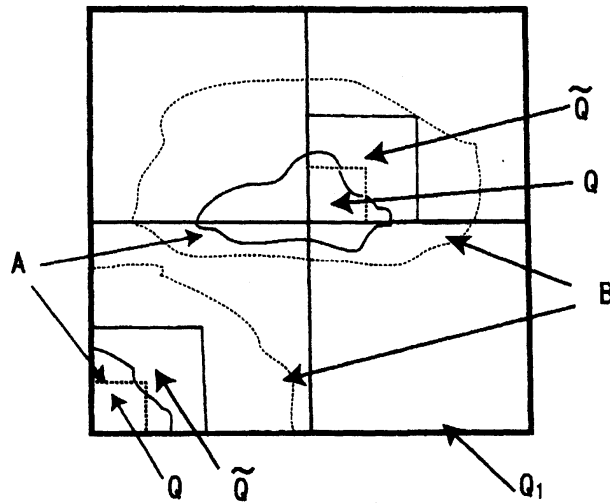


図 4: 仮定 (b) のイメージ

まず、次の命題を示す。

**命題 1** 次の「…」を満たす  $\delta \in (0, 1)$  と  $M > 1$  が存在する。「 $u \in LSC(Q_R)$  が (5) の非負粘性優解が  $\inf_{Q_3} u \leq 1$  を満たすならば、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > M\}| \leq \delta$$

が成り立つ。』

【注意】 これは、 $u$  が  $Q_3$  で小さい値をとれば、狭い領域  $Q_1$  でも  $u$  の値が大きくなる点の集合の測度はある程度存在することを意味する。

《証明の概略》 上の命題を示すために、次のような滑らかな関数を考える。

$$\mathcal{P}^-(D^2\psi) \geq 0 \text{ in } Q_R, \quad \psi \leq -2 \text{ in } Q_2, \quad \psi \geq 0 \text{ on } \partial Q_R \quad (9)$$

実際には  $\psi(x) = -|x|^{-\alpha}$  ( $\exists \alpha > 0$ ) の形なので、原点で特異性を持つから、原点近傍では滑らかにつないでしまう。すると (9) の第 1 式は原点近傍では成立しないが滑らかな関数  $\xi \geq 0$  で  $\mathcal{P}^-(D^2\psi) \geq -\xi$  が原点近傍で成り立つ。  $\text{supp } \xi \subset Q_1$  としてよいことに注意する。

さて、 $w := u + \psi$  とおくと、 $\mathcal{P}^+(X+Y) \geq \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^-(Y)$  を用いると、 $w$  は

$$\mathcal{P}^+(D^2w) \geq -\xi \text{ in } Q_R$$

の粘性劣解である。よって ABP 最大値原理から、 $w(x) \geq 0$  ( $x \in \partial Q_R$ ) より

$$1 \leq \sup_{Q_3}(-w) \leq C \|\xi\|_{L^n(\Gamma[-w; Q_R] \cap Q_R^+[-w])}$$

となる。右辺は、 $C \max_{Q_1} |\xi| \times |\{x \in Q_1 \mid u(x) \leq M := \max_{Q_1}(-\psi)\}|$  で上から評価でき、 $|\{x \in Q_1 \mid u(x) \leq M\}| \geq \theta > 0$  となる  $\theta \in (0, 1)$  があるので、 $\delta = 1 - \theta$  において命題が成立する。

さらに、帰納的に上記命題の仮定の下で次が示せる。

命題 2 命題 1 の仮定の下で、各自然数  $k$  に対し、

$$|\{x \in Q \mid u(x) > M^k\}| \leq \delta^k$$

が成立する。

《証明の概要》  $B := \{x \in Q_1 \mid u(x) > M^{k-1}\}$  で命題が成立すると仮定する。つまり、 $|B| \leq \delta^{k-1}$  とする。 $A := \{x \in Q_1 \mid u(x) > M^k\}$  とおいたとき、 $|A| \leq \delta|B|$  を示せばよい。故に、立方体分割の補題の仮定 (b) が成り立つことを示せばよい。

$Q \in \mathcal{Q}$  に対し、 $|A \cap Q| > \delta|Q|$  のとき、 $\exists z \in \tilde{Q} \setminus B$  と仮定して矛盾を示す。つまり、 $u(z) \leq M^{k-1}$  とする。また、 $Q$  の一辺の長さを  $1/2^j$  とする。平行移動することで  $Q$  の中心を 0 とする。 $v(x) := u(x/2^j)/M^{k-1}$  とおくと、 $u(z) \leq M^{k-1}$  に注意すれば、 $\inf_{Q_3} v \leq 1$  なので、命題 1 を用いて  $|\{x \in Q_1 \mid v(x) \leq M\}| \geq \theta$  が示せる。 $u$  に直せば、

$$|\{x \in Q \mid u(x) \leq M^k\}| = |Q \setminus A| \geq \theta|Q|$$

となる。故に、 $|Q| = |Q \cap A| + |Q \setminus A| > (\delta + \theta)|Q| = |Q|$  となり矛盾が導かれる。

《弱 Harnack 不等式の証明の概要》 まず、(5) の非負粘性優解  $v$  に対し、任意の  $\delta > 0$  を固定して  $u(x) := v(x)/(\inf_{Q_1} v + \delta)$  とおく。つまり、 $\inf_{Q_3} u \leq 1$  もらくらく満たす。命題 2 から、 $v$  の分布関数の評価ができる。つまり、次を満たす  $C, \varepsilon > 0$  が存在する。

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > t\}| \leq Ct^{-\varepsilon} \quad (t > 0)$$

実際、 $t > 0$  が大きいところが重要なので、 $M^k < t \leq M^{k+1}$  となる自然数  $k$  があるとしてよい。すなわち、 $k \log M < \log t \leq (k+1) \log M$  となるから、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) > t\}| \leq \delta^{\log t / \log M - 1} = t^{\log \delta / \log M - 1}$$

が成り立つ。

これより、ある正数  $q > 0$  に対して、

$$\|u\|_{L^q(Q_1)} \leq C$$

となることを示すのは易しい。これを  $v$  の式に直し、 $\delta \rightarrow 0$  とすれば証明が終わる。

## 7 Perron-Wiener-Brelot の方法との比較

[1] に沿って、Perron-Wiener-Brelot の方法の粘性解版を素人の怖いもの知らずで試みる。 $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を与えられた境界条件とする。この章では簡単のため次の方程式を考える。

$$F(x, D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

但し、 $F$  はとりあえず、Laplace 作用素の一般化を考えているので

$$F(x, 0) = 0 \quad \mathcal{P}^-(X - Y) \leq F(x, X) - F(x, Y) \leq \mathcal{P}^+(X - Y) \quad (11)$$

( $x \in \Omega, X, Y \in S^n$ ) を仮定する。(4) の左辺のような線形作用素はこれを満たす。

次に、 $g$  の下クラス

$$\mathcal{L}_g := \{s \in C(\Omega) \mid s \text{ は (10) の粘性劣解で、} \limsup_{x \in \Omega \rightarrow y} u(x) \leq g(y) \ (\forall y \in \partial\Omega)\}$$

を定義し、更に

$$\mathcal{H}g(x) := \sup\{s(x) \mid s \in \mathcal{L}_g\}$$

とおく。

命題 3  $F: \Omega \times S^n \rightarrow \mathbf{R}$  は連続で (11) を満たすとする。 $g$  を有界関数とすると、 $\mathcal{H}g$  は (10) の粘性解である。

《証明の概要》  $u(x) := \mathcal{H}g$  とおく。

$u$  が有界であること。  $m := \inf_{\partial\Omega} g$  とおくと、(11) の第一の仮定から、定数関数  $m$  は  $\mathcal{L}_g$  に属することがわかる。故に、 $u(x) \geq m$  ( $\forall x \in \Omega$ ) となる。

任意の  $v \in \mathcal{L}_g$  と  $\delta > 0$  に対し、 $\varepsilon \sup_{x \in \Omega} |x|^2 \leq \delta/2$  となるように  $\varepsilon > 0$  を取る。  
 $\sup_{x \in \Omega} (v(x) - \sup_{\partial\Omega} g + \varepsilon|x|^2 - \delta) =: \theta_\delta$  とおき、 $\theta_\delta > 0$  と仮定して矛盾を導く。 $(g$  の有界性と  $\partial\Omega$  のコンパクト性から  $\theta_\delta < \infty$  は導かれる。)

もし、 $\sup$  を  $x_0 \in \Omega$  で実現すれば、粘性劣解の定義から、

$$F(x_0, -2\varepsilon I) \leq 0$$

となるが、左辺は  $\mathcal{P}^-(-2\varepsilon I)$  で下から評価されるが、これは正数なので矛盾する。故に、 $x_k \in \Omega$  で  $v(x_k) - \sup_{\partial\Omega} g + \varepsilon|x_k|^2 - \delta \rightarrow \theta_\delta$  になるように選び、更に  $x_0 \in \partial\Omega$  で  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  となるとしてよい。しかし、

$$\theta_\delta \leq \limsup_{y \in \Omega \rightarrow x_0} v(y) - \sup_{\partial\Omega} g + \varepsilon|x_0|^2 - \delta \leq -\frac{\delta}{2}$$

となり矛盾する。故に、

$$v \leq \inf_{\partial\Omega} g - \varepsilon \sup_{x \in \Omega} |x|^2 + \delta$$

となり、 $\delta \rightarrow 0$  として、 $v \leq \sup_{\partial\Omega} g$  となるので、 $u \leq \sup_{\partial\Omega} g$  も導かれる。

さて、 $u$  の有界性が出れば、 $u^*$  が粘性劣解であることは Perron-Ishii の方法と同様に示せる (詳しく書かなかったが)。 $u_*$  が粘性優解であることは、結論を否定すれば、 $\xi \in C^2(\Omega)$  で、 $u_* - \xi$  がある  $x_0 \in \Omega$  で最小値を取り、かつ

$$F(x_0, D^2\xi(x_0)) \leq -\theta < 0$$

となる、 $\theta > 0$  が存在することになる。 $F$  の連続性から、Perron-Ishii の方法同様に  $\xi$  を修正することによって、 $\xi(x_0) > u(x_0)$  となる古典劣解  $\xi \in \mathcal{L}_g$  を ( $S$  の代わりに  $\mathcal{L}_g$  を用いて) 構成できるので矛盾が得られる。

## 参考文献

- [1] 相川弘明「複雑領域上のディリクレ問題」岩波書店 (予定).
- [2] L. A. CAFFARELLI, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. Math.*, **130** (1989), 189–213.
- [3] L. A. CAFFARELLI & X. CABRÉ, Fully Nonlinear Elliptic Equations, AMS Colloquium Publications, **43**, 1996.
- [4] L. A. CAFFARELLI, M. G. CRANDALL, M. KOCAN & A. ŚWIĘCH, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49** (1996), 365–397.

- [5] M. G. CRANDALL, H. ISHII & P.-L. LIONS, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1–67.
- [6] H. ISHII, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, **55** (2), (1987), 369–384.
- [7] S. KOIKE, A Beginner's Guide to the Viscosity Solution Theory, *MSJ Memoirs* **13**, 2004.  
【注意】訂正は <http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/skoike/teisei.html> を参照。
- [8] S. KOIKE, Perron's method for  $L^p$ -viscosity solutions, *Saitama Math. J.*, **23** (2005), 9–28.
- [9] N. S. NADIRASHVILI, Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **24** (1997), 537–550.
- [10] M. V. SAFONOV, Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients, *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (4) (1999), 879–895.