

代数的超函数と双対性

東大 浪川 幸彦

§ 0. 序

佐藤の超関数は純代数的構成法にその特徴がある。例えば $\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}^n$ 上の複素 n 変数正則関数の作る層とすれば、 $\mathbb{R}^n$ 上の佐藤の超函数の層 $\mathcal{B}$ は、局所コホモロジーを用いて、 $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^n(\mathcal{O})$ とかける。これが超関数と呼ばれるゆえんは、 K が $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合であるとき、位相ベクトル空間として $\mathcal{B}_K(\mathbb{C}^n)$ が、 $\mathcal{O}(K)$ の強双対であることにある。(cf. [HS]) この証明に於ては Serre の双対定理が本質的である。ところで以上の方法は、代数幾何に於ても並行して行うことができ、超函数論に類似したものを作ることができる。

つまり、体 k を固定し、 k 上の完備非特異な n 次元多様体 X をとり、 X の純余次元 d の非特異閉部分多様体 Y を考える。 X 上の n 次元有理正則微分型式の作る層を ω_X とするとき、層 $\mathcal{H}_Y^d(\omega_X)$ を、 Y 上の超函数と呼ぶ。さて、 Y 上で消える

関数全体の作る、正則函数層 $\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $\mathcal{I}_Y$ を $\mathcal{I}$ とするとき、
 $X/Y = (Y, \mathcal{O}_{X/Y} = \varprojlim_{k \geq 0} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}_Y)$ を X の Y に沿う完備化
 と呼ぶ。すると、

$H^m(Y, \mathcal{H}^d_Y(\omega_X)) \cong \text{Hom. cont.}_*(T(Y, \mathcal{O}_{X/Y}), k)$
 となる。つまり、 $\mathcal{H}^d_Y(\omega_X)$ は、形式擬型 (formal scheme)
 X/Y 上の超函数とみることが出来る。そして、この事実は、
 Serre の双対定理の代数的なものから導びかれる。

ところで、Grothendieck はこの Serre の双対定理を、非
 常に一般的な場合に拡張した。そこで、この拡張された定理
 を用いて、上の事実の拡張を証明しよう。そして、もう一つ、
 佐藤先生が、局所作用素の作る層として導入した、いわゆる
 層 $\mathcal{E}$ が、代数的な場合は、普通の微分作用素に他ならぬこと
 を証明する。

§1. 基本的概念達。

体 k 上有限型、擬コンパクト、分離的な擬型を、ここでは
 k 上の 代数多様体 (又は単に多様体) と呼ぼう。つまり、有
 限個の開アフィン被覆があって、その各々は有限次元アフィ
 ン空間の開部分擬型としてかけるものである。古典的な代数
 多様体よりは、構造層に中零元を許すだけ一般になっている。
 このとき基底位相空間はネーター的であることに注意してあ

く。以下、体 k は固定して考える。従って、どちら 体 k 上の の といわないことにする。

(体 k 上の代数的) 多様体 X が、 X を k の代数閉体 $\bar{k}$ に拡張しても非特異であるとき、 X は 絶対非特異 であるという。多様体 X 、 S 間の射 (morphism) $f: X \rightarrow S$ が、平坦 (flat) であって、しかもすべてのファイバーが絶対非特異であるとき、 f は 滑らか (smooth) であるという。

多様体 X 、 S 間の射 $f: X \rightarrow S$ があって、任意の S 上の概型 Z に対し、 f から導かれる射 $f_Z: X \times_S Z \rightarrow Z$ が閉写像になるとき、 f は 固有的 (proper) であるという。体 k 上固有的な多様体は、完備多様体に等しい。射影多様体は完備である。

多様体 X の閉部分多様体 Y が、局所的には X 内の余次元とちょうど同じ数の X 上の正則函数の零点として書けている時、 Y は 局所完全交差 (locally complete intersection) であるという。このとき Y の定義イデアル層を $\mathcal{I}$ とすれば、 $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は局所的に、 $(\mathcal{O}_Y)$ 余次元個の直和 と同型である。

§2. 微分 (層による定義)

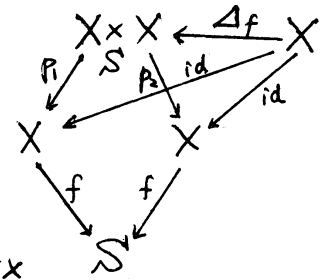
X 、 S を付環空間、 f を X から S への射とする。今、ファイバー積 $X \times_S X$ が存在し、しかも自然な対角線写像 Δ_f

が閉埋め込みとする。つまり

$$\Delta_f = (\Delta_f; \delta_f) \quad \Delta_f: X \longrightarrow X \times_S X$$

(基底空間の写像)

$$\delta_f: \mathcal{O}_{X \times_S X} \longrightarrow \Delta_{f*} \mathcal{O}_X$$



とすると、 Δ_f により X は $X \times_S X$ の閉集合に同相であり、 δ_f は全射であるとする。 δ_f の核を $\mathcal{I}_f$ であらわすとき

$$\mathcal{P}_f^n = \Delta_f: \mathcal{O}_{X \times_S X} / \mathcal{I}_f^{n+1}$$

$$\Omega_f^1 = \Delta_f: \mathcal{I}_f / \mathcal{I}_f^2 \quad (\Delta_f \text{ は連続写像 } \Delta_f \text{ による逆像})$$

を各々、 n -階主要部分、一次微分の作る層と呼ぶ。 Ω_f^1 は $\mathcal{P}_f^1$ のイデアル層である。なお $\mathcal{O}_f$ のかわりに $\mathcal{O}_{X/S}$ とかく。

射影 p_1, p_2 に伴う構造層の射 π_1, π_2 により、自然な写像

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\Delta_f(\pi_1)} \Delta_f: \mathcal{O}_{X \times_S X} \longrightarrow \mathcal{P}_f^n$$

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\Delta_f(\pi_2)} \Delta_f: \mathcal{O}_{X \times_S X} \longrightarrow \mathcal{P}_f^n$$

があるが、上の写像により $\mathcal{P}_f^n$ を $\mathcal{O}_X$ -加群層としてみる。下の写像を d_f^n であらわし、 $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ (U は X の開集合) の d_f^n による像 $d_f^n(t)$ を n -階の主要部分と呼ぶ。さらに $d_f(t) = d_f^1(t) - t \cdot 1 \in \Gamma(U, \Omega_f^1)$ を t の微分と呼ぶ。

既、 $\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$ -加群層とすると

$$\text{Diff}_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_f^n \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

($\mathcal{P}_f^n$ は d_f^n によって右 $\mathcal{O}_X$ -加群層とみる)

を $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ への たかたか n -階の微分作用素の作る層と呼ぶ。

その全体

$$\text{Diff}_{X/S}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \varinjlim_n \text{Diff}_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

を微分作用素の作る層とよぶ。 $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ に対する $D \in \Gamma(U, \text{Diff}_{X/S}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ の作用は、自然な射 $d_{f, \mathcal{F}}^n: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ を用いて、 $D(f) = D \circ d_{f, \mathcal{F}}^n(f)$ としてあらわされる。

以上の概念は通常のそれらと一致する。

以下、代数多様体の圏にもどろう。そこでは本節の初めの条件はみえされる。次の定理が基本的である。

定理 1. 多様体 X , S 間の射 $f: X \rightarrow Y$ が滑らかならば、

① $\Omega_{X/S}'$ は有限次元の局所自由層である。その次元は f のファイバーの次元 (f の相対次元と呼ぶ) と同じである。② $\mathcal{I}_f^n / \mathcal{I}_f^{n+1} = \mathcal{S}^n(\Omega_{X/S}') - (\mathcal{S}^n \text{ は対称積})$ ③ $\mathcal{P}_f^n$ も有限次元局所自由層である。 ([EGA] IV-17-2-3) //

§3. 局所コホモロジーと超関数の定義.

代数多様体に於ては局所コホモロジーは、次の様な比較的簡単にかける。

定理 2. X を代数多様体、 Y を連接イテアル層 $\mathcal{F}$ で定義された開部分多様体とすると、 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し、

$$(1) \quad \varinjlim_{k \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}_Y^p(\mathcal{F})$$

$$(2) \quad \varinjlim_{k \geq 0} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}, \mathcal{F}) \simeq H_Y^p(\mathcal{F}).$$

([LC] Th.2.8) //

(1)式から, (2)式を導びくのは次の補題による.

補題 3. X がネーター空間のとき, X 上の加群層の圏で, 有向昇納的極限と, 大域切断 $\Gamma(X, \cdot)$ とは可換である. //

命題 4. 代数多様体 X の余次元 d の局部分多様体 Y について, 次の命題は同値である.

① Y は局所完全交叉である.

② 任意の X 上の局所自由層 $\mathcal{L}$, Y 内に $\mathcal{L}$ を持つ連接層 $\mathcal{Y}$ に対し, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{Y}, \mathcal{L}) = 0 \quad \forall p < d$

([LC] Th.3.8 より反方向に導く) //

定理 2 と命題 4, 及び Leray 被覆 ($\Leftrightarrow$ Koszul 条件) を用いて, 次の定理がえられる.

定理 5 代数多様体 X の余次元 d の局部分多様体 Y が局所完全交叉のとき, 任意の X 上の局所自由層 $\mathcal{L}$ に対し,

$$H_Y^p(\mathcal{L}) = 0 \quad p \neq d.$$

$$H_Y^d(\mathcal{L}) = H_Y^d(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L} //$$

つまり, $H_Y^p(\mathcal{L})$ は純 d -余次元であるが, これは Y の幾何的性質の直接的な反映なのである.

さて, 多様体 X, S 間の射 $f: X \rightarrow S$ が滑らかで, 相対次元が n であるとしよう.

$$\omega_{X/S} = \bigwedge^n \Omega_{X/S}^1$$

を X 上の n 次微分型式 の作る層と呼ぶ。定理 1 から $\omega_{X/S}$ は可逆層 (局所的に $\mathcal{O}_X$ の n 同型) である。

定義 6. X, S を代数多様体, $f: X \rightarrow S$ を滑らかな射, Y を余次元 d の局所完全交叉閉部分多様体とする。 $\mathcal{H}_Y^d(\omega_{X/S})$ を Y (正確には X/Y) 上の 超関数の層 と呼ぶ。

§4. Serre の双対定理

Grothendieck によつて得られた Serre の双対定理は余りに一般的で、これその完全な形を述べることはできない。 ([RD] 等参照) そこで、ここでは、後で用いる二つの特別な場合の形を記すにとどめる。

定理 7 X が k 上の n 次元代数多様体であつて、自然な射 $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ が固有的で滑らかとする。 X 上の任意の擬連続層 $\mathcal{F}$ に対して、

$$(3) \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{F}, \omega_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(H^{n-p}(X, \mathcal{F}), k)$$

特に、 $\mathcal{F}$ が連続層ならば、 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{F}, \omega_{X/S}), H^{n-p}(X, \mathcal{F})$ はともに k 上有限次元であるから、これらは互いに双対である。 //

これは“古典的な”双対定理である。さらに、

定理 8 $f: X \rightarrow S$ を代数多様体間の固有的で滑らかな、相対次元 n の射, Y を X 内の閉集合とする。今、 Y 内を走る擬連続層 $\mathcal{F}$ に対し、 $R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ ($p > 0$) とする。

この時任意の Y 内れ台をもつ連続層 $\mathcal{F}$, S 上の連続層 $\mathcal{G}$ に対し,

$$(4) \quad f_*(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{F}, \omega_{X/S} \otimes f^*(\mathcal{G}))) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{n-p}(f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) //$$

§5. 定理7の応用: 超関数の作用.

この節では、体 k 上固有的かつ滑らかな次元 n の多様体 X , 及び X の連続イデアル層 $\mathcal{I}$ で定義される余次元 d , 次元 m ($n = m + d$) の局所多様体を固定する. $\omega_{X/\text{Spec}(k)}$ を ω_X と略記する. X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し, $\hat{\mathcal{F}} = \varprojlim_k \mathcal{F} / \mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の Y 内れ台の 完備化 と呼ぶ. $\hat{\mathcal{F}}$ の台は Y 内れある.

命題9. $\mathcal{F}$ が X の連続層ならば,

$$H^p(X, \hat{\mathcal{F}}) \simeq \varprojlim_k H^p(X, \mathcal{F} / \mathcal{I}^{k+1} \mathcal{F}) //$$

([CD] Prop. 4.1)

これにより、左辺は離散位相空間の極限位相を入れる。さて、一般的な方法により、 X 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対し、双手的な k -二次形式

$$(5) \quad H^p(X, \mathcal{F}) \times \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{m-p}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_Y^d(\omega_X)) \longrightarrow k$$

を作ることができる。これに対し,

定理10. X, Y 等は上の通りとする. X 上の連続層 $\mathcal{F}$ に対して、 k -二次形式 (5) は次の意味で双手的である。

$$(6) \quad H^p(X, \hat{\mathcal{F}}) \simeq \text{Hom}_k(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{m-p}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_Y^d(\omega_X)), k)$$

$$(7) \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{m-p}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_Y^q(\omega_X)) \simeq \text{Hom. cont.}_X(H^p(X, \hat{\mathcal{F}}), k) //$$

(7) は位相の定義から、(6) に帰着される。(6) は、命題 9, 定理 7, および、スペクトル列.

$$(7)^{\text{bis}} \quad \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{F}, \mathcal{H}_Y^q(\omega_X)) \implies \varinjlim_k \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}, \omega_X)$$

が、定理 5 から退化することを用いて、証明される。

系 11. (7) 式で、特に $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ とおけば、

$$H^{m-p}(X, \mathcal{H}_Y^q(\omega_X)) \simeq \text{Hom. cont.}_X(H^p(X, \hat{\mathcal{O}}_X), k) //$$

§ 6. 定理 8 の応用：微分群用素

命題 12. Y が多様体 X の余次元 d の局所完全交叉閉部分多様体とする。 Y に台をもつ X の連接層 $\mathcal{F}$, 及び X 上の局所自由層 $\mathcal{L}$ に対し、

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^d(\mathcal{F}, \mathcal{L}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_Y^d(\mathcal{L})) //$$

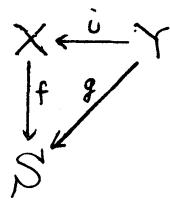
([LC] Th. 5.1)

補題 13. 多様体 X 上の擬連接層の射影系 $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ があり、しかも $\mathcal{F}_{i+1} \rightarrow \mathcal{F}_i$ は全射とする。このとき射影的極限によって位相を入れ、 $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の射影的極限、及び、別の X 上の擬連接層 $\mathcal{G}$ に対し、

$$(14) \quad \text{Hom. cont.}_{\mathcal{O}_X}(\varprojlim \mathcal{F}_i, \mathcal{G}) \cong \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G}) //$$

以下その様な場合を考えよう。

(S) 次のページの図の様な代数多様体間の射の可換図式があ



り、しかも、① f は固有的かつ滑らか、相対次元 n 、② g は同型とする。すると③ i は余次元 n の局所完全交叉の埋め込みとなる。これより、

Y を X の閉部分多様体と考える。 //

補題 14. $\mathcal{F}$ を Y に台をもつ、擬連接層とすれば、

$$R^p f_*(\mathcal{F}) = 0 \quad (p > 0) \quad //$$

定理 15. 条件 (S) を仮定する。任意の X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し、

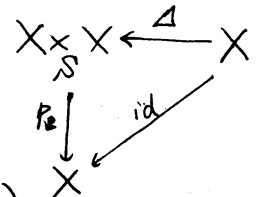
$$(1) \quad f_*(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}_X^d(\omega_{X/S}))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.} \mathcal{O}_S}(f_*(\mathcal{F}), \mathcal{O}_S) //$$

なぜなら、左辺

$$\begin{aligned} &= f_* \left(\varinjlim \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}, \omega_{X/S}) \right) \quad (\mathcal{F} \text{ は定数層}) \\ &= \varinjlim f_* (\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}, \omega_{X/S})) \quad (\text{補題 3}) \\ &= \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{k+1}), \mathcal{O}_S) \quad (\text{定理 8}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.} \mathcal{O}_S}(f_*(\mathcal{F}), \mathcal{O}_S) \quad (\text{補題 13}) \end{aligned}$$

系 16 $f: X \rightarrow S$ は滑らかな多様体間の射で、相対次元 n であるとする。 f で定まる対角線埋め込み $X \times_S X \hookrightarrow X \times X$ により、定理 15 を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_X^n(\omega_{X \times_S X}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.} \mathcal{O}_X}(p_*(\hat{\mathcal{O}}_{X \times_S X}), \mathcal{O}_X) \\ &= \mathrm{Diff}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \quad // \end{aligned}$$



参考文献

- [EGA] A. Grothendieck : "Éléments de Géométrie Algébrique"
 Publ. Math. I.H.E.S. Paris (1960 ff.)
- [LC] A. Grothendieck : "Local Cohomology". Lecture
 Notes in Math. 41. Springer, Berlin (1967).
- [RD] R. Hartshorne : "Residues and Duality". Lecture
 Notes in Math. 20, Springer, Berlin (1966).
- [CD] R. Hartshorne : "Cohomological dimension of
 algebraic varieties." Ann. of Math. Vol. 88 (1968)
 pp. 403-450.
- [HS] 小松彦三郎 : 「佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方
 程式」 東大セミナー - ト, 22, 東京 (1968).