

Kempf-Laksov determinant formula in the infinitesimal cohomology theories

松村朝雄

平成 28 年 1 月 30 日

概要

本稿では, Thomas Hudson 氏との共同研究に基づいて, 無限小コホモロジーにおける Kempf-Laksov 公式について解説する.

1 背景

シューベルト類の行列式公式は Giambelli の論文 [2] まで遡る. Giambelli は, グラスマン多様体のチャウ環におけるシューベルト類を, シュア多項式の Jacobi-Trudi 公式に類似する行列式で表した. 1974 年の Kempf-Laksov の論文 [6] では, Giambelli の公式はあるベクトル束 E に付随したグラスマン束 $\mathrm{Gr}(E)$ 内の「退化跡」に拡張された. Kempf-Laksov の公式は, チャウ環における退化跡類を, E や $\mathrm{Gr}(E)$ の同語反復ベクトル束のセグレ類で表したものだ. トーラス同変のチャウ環の構成方法を考えれば, Kempf-Laksov の退化跡の行列式公式は, そのまま同変シューベルト類の行列式公式を与えることも理解できる. また 2015 年には, Hudson 氏, 池田氏, 成瀬氏と本稿著者らによって, Kempf-Laksov の行列式公式が K 理論にまで拡張できることが示された [4].

[4] の手法は, Levine-Morel の「向き付きコホモロジー理論 (oriented cohomology theory)」の枠組みで適用できることが期待されており, 最終的には「代数的コボルディズム」における Kempf-Laksov 公式を導くことが, 本研究の目標である.

その前段階として, 本稿では, 向き付きコホモロジー理論の一例である「無限小コホモロジー (infinitesimal cohomology)」を考える. そこでは, 特異点をもつ退化跡の基本類が一般には定義されていない. そこで, Kempf-Laksov によって用いられた特異点解消の基本類を退化跡類の類似と考え, セグレ類を成分としてもつ行列式公式を導く.

その応用として, Schur 多項式や Grothendieck 多項式の, 無限小コホモロジーにおける類似を定義することができる. 今後, その多項式の組み合わせ論的な研究が望まれる.

2 無限小コホモロジー

2.1 向き付きコホモロジー理論と代数的コボルディズム

向き付きコホモロジー理論は, 体 k 上の滑らかなスキームの圏 $\mathbf{Sm}_k$ から次数付き可換環の圏への半変関手 A^* であり, 加えて, 射影射 f に対しては「押し出し射 f_* (pushforward)」が定義され, 幾つかの自然な公理が満たされているものである. 詳しくは [1, 3, 8] を参照されたい. 本稿では k の標数は 0 とする.

一般に, 向き付きコホモロジー理論 A^* では, ベクトル束 E のチャーン類 $c_i(E)$ が定義される. L を直線束, s をそのゼロ切断とした時, 1 次チャーン類 $c_1(L)$ は $s^*s_*(1)$ である. 直線束 L, M のテンソル積 $L \otimes M$ の 1 次チャーン類は, 以下の形式群則によって特徴づけられている.

定義 2.1. R を単位元をもつ可換環とする. 今, 不定元 u, v に対し, 無限級数 $F_R(u, v) \in R[[u, v]]$ を考える. 対 (R, F_R) は, 以下の公理を満たす時, 階数 1 の可換形式群則と呼ばれる:

- (1) $F_R(u, 0) = u = F_R(0, u)$;
- (2) $F_R(u, v) = F_R(v, u)$;
- (3) $F_R(F_R(u, v), w) = F_R(u, F_R(v, w))$.

今, A^* を任意の向き付きコホモロジー理論とした時, $R := A^*(\text{Spec } k)$ には形式群則 $F_R(u, v)$ が定まり,

$$c_1(L \otimes M) = F_R(c_1(L), c_1(M))$$

が成り立つ.

Levine-Morel の向き付きコホモロジー理論における一つの功績は, 「代数的コボルディズム Ω^* 」の構成と, それが普遍的な向き付きコホモロジー理論を与え, $\Omega^*(\text{Spec } k)$ を普遍的な形式群則である Lazard 環 $(\mathbb{L}, F_{\mathbb{L}})$ と同一視できることを示したことである. 本稿においてのその重要な性質は, 代数的コボルディズム Ω^* から任意の向き付きコホモロジー理論が誘導されることである. すなわち, (R, F_R) を任意の形式的群則としたとき, 形式群則を保つ射 $\mathbb{L} \rightarrow R$ があって,

$$A^*(X) := \Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{L}} R$$

は向き付きコホモロジー理論を定める.

2.2 形式群則と Lazard 環

Lazard によって, 普遍的な階数 1 の可換形式群則 $(\mathbb{L}, F_{\mathbb{L}})$ が存在し, $\mathbb{L}$ は加算個の不定元の多項式環と同型であることが示された [7]. Lazard 環 $\mathbb{L}$ の構成方法は以下のように代数的には簡明である.

定義 2.2. $a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$ を不定元とし, その多項式環 $\mathbb{Z}[a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}]$ を考える. 次数は $\deg a_{ij} = -i - j + 1$ で与える. このとき, Lazard 環 $\mathbb{L}$ は $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ を

$$F_{\mathbb{L}}(u, v) = u + v + \sum_{i, j \in \mathbb{N}} a_{ij} u^i v^j$$

が形式群則 (1)(2)(3) を満たすように定めた a_{ij} たちの関係式による商環と定める.

無限小コホモロジー I_n^* を定義するために, 商環 $Q_n := \mathbb{Z}[\alpha_n]/(\alpha_n^2)$ を考え, 以下の全射な準同型を与える:

$$q_n: \mathbb{L} \rightarrow Q_n: a_{i,j} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{d_n} \binom{i+j}{i} \alpha_n & -i-j+1 = -n \text{ の時} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

ここでは d_n は $n = p^e - 1$ (p は素数, $e \in \mathbb{Z}$) のときは, $d_n = p$ とし, それ以外は $d_n = 1$ とした. 射影 q_n は, Q_n に $F_{Q_n}(u, v) := q_n(F_{\mathbb{L}}(u, v))$ という形式群則を定める.

定義 2.3. 無限小コホモロジー I_n は

$$I_n^*(X) := \Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{L}} Q_n$$

によって定義される.

以下, 簡単のため $n = 2m$ とする.

$$\gamma_i^{(2m)} := \frac{1}{d_{2m}} \left(\binom{2m}{i} - (-1)^i \right)$$

と置くと, Q_{2m} に自然に誘導される形式群則は,

$$F_{Q_{2m}}(u, v) = (u + v) \left(1 + \alpha_{2m} \sum_{i=1}^{2m-1} \gamma_i^{(2m)} u^i v^{2m-i} \right)$$

で与えられる. すなわち, L, M を X 上の直線束とすると, $I_{2m}^*(X)$ における $L \otimes M$ の 1 次チャーン類は

$$c_1(L \otimes M) = (c_1(L) + c_1(M)) \left(1 + \alpha_{2m} \sum_{i=1}^{2m-1} \gamma_i^{(2m)} c_1(L)^i c_1(M)^{2m-i} \right)$$

で表される. $L^\vee$ を L の双対束とすると, $c_1(L^\vee) = -c_1(L)$ であることに注意したい.

べき和対称多項式を

$$p_l(x_1, \dots, x_e) := \sum_{i=1}^e x_i^l, \quad l > 0.$$

と表す. ただし, 本稿では $p_0(x_1, \dots, x_e) = 1$ とおく. p_l は対称多項式なので, $x_1, \dots, x_e$ をベクトル束 E のチャーン根だと考えた時,

$$p_l(E) := p_l(x_1, \dots, x_e)$$

と書くことにする. $p_l(E)$ は E のチャーン類を使って表されるので, $p_l(E - F)$ も定義することができる. 正整数 l については, $p_l(E - F) = p_l(E) - p_l(F)$ が成り立つことに注意する.

補題 2.4. L を直線束, E を階数 e のベクトル束とする. $\tau := c_1(L)$ とする. この時,

$$c_e(E \otimes L) = \sum_{p=0}^e c_p(E) \left(\tau^{e-p} + \alpha_{2m} \sum_{l=1}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(E) \tau^{e-p+2m-l} \right) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

2.3 チャーン類

ベクトル束の短完全系列 $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ に対してはホイットニーの和の公式

$$c(G; t) = c(E; t) c(F; t) \quad (2.2)$$

が成り立つ. ここで $c(E; t) = \sum_{i=0}^e c_i(E) t^i$ はチャーン多項式とする. これにより, $[E] - [F]$ というベクトル束のグロタンディック群の元に対しても

$$c(E - F; t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E - F) t^i = \frac{c(E; t)}{c(F; t)}$$

によって, 相対チャーン類 $c_i(E - F)$ を定義できる. 任意の向き付きコホモロジー理論 A^* について, 部分多様体 Y の基本類 $[Y] \in A^*(X)$ はベクトル束 E の最高次チャーン類と一致することがある. 次の補題はその事実を示す.

補題 2.5 (Lemma 6.6.7.[8]). E を X 上の階数 e のベクトル束とし, s を E の切断, Z をその 0 スキームとする. もし X が Cohen-Macaulay で Z の余次元が e ならば,

$$c_e(E) = [Z] \in A^e(X).$$

3 セグレ類

Kempf-Laksov の公式を無限小コホモロジーで求めるにあたって、その成分となるセグレ類を定義し、基本的な公式を求めておく必要がある。

定義 3.1. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $k \geq -e - \ell + 1$ を満たす非負整数 ℓ を選ぶ。ベクトル束 $E \oplus \mathcal{O}^\ell$ の双対射影束 $\pi: \mathbb{P}^*(E \oplus \mathcal{O}^{\oplus \ell}) \rightarrow X$ を考え、同語反復直線束 $\mathcal{O}(1)$ の一次チャーン類を $\tau := c_1(\mathcal{O}(1))$ とする。ここで $\mathcal{O}$ は自明な直線束とした。ベクトル束 E の k 次のセグレ類を

$$S_k(E) := \pi_*(\tau^{k+e+\ell-1}).$$

で定める。 $S_k(E)$ は ℓ の選び方によらないことを示すことができる。また、Vishik[9] の公式を使うと、 $S_k(E)$ の母関数 $S_t(E) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(E) t^k$ は以下のように求まる。

補題 3.2. 任意のベクトル束 E について、 $I_{2m}^*(X)$ におけるセグレ類は

$$S_t(E) = c_{-t}(-E) \left(1 - a_{2m} \sum_{l=0}^{2m-1} (-1)^l \gamma_l^{(2m)} p_l(E) t^{-2m+l} \right).$$

を満たす。ここでは $\gamma_0^{(2m)} := \frac{2m+1}{d_{2m}}$ と置いた。

この補題により、相対セグレ類 $S_k(E - F)$ を以下の母関数で定めることができる：

$$S_t(E - F) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k(E - F) t^k := c_{-t}(F - E) \left(1 - a_{2m} \sum_{l=0}^{2m-1} (-1)^l \gamma_l^{(2m)} p_l(E - F) t^{-2m+l} \right). \quad (3.1)$$

これは

$$S_t(E - F) = S_t(E) c_t(F^\vee) \left(1 + a_{2m} \sum_{l=0}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(F^\vee) t^{-2m+l} \right). \quad (3.2)$$

とも書けることに注意する。セグレ類が射影束による押し出しで定まっていたのと同様に、相対セグレ類も押し出しで記述できる。

命題 3.3. E, F をそれぞれ階数 e, f のベクトル束とする。双対射影束 $\pi: \mathbb{P}^*(E) \rightarrow X$ に対し、 $\mathcal{Q}$ を同語反復直線束とする。この時、任意の非負整数 s に対し、

$$\pi_*(\tau^s c_f(F^\vee \otimes \mathcal{Q})) = S_{s+f-e+1}(E - F)$$

が成り立つ。

4 Kempf-Laksov 公式

4.1 退化跡と Kempf-Laksov 特異点解消

X を非特異準射影代数多様体とし、 E を X 上の階数 n のベクトル束とする。階数 d のグラスマン束 $\text{Gr}_d(E) \rightarrow X$, すなわち

$$\text{Gr}_d(E) := \{(x, S_x) \mid x \in X, S_x \text{ は } E_x \text{ の } d \text{ 次元部分空間}\}.$$

を考える。 S は $\text{Gr}_d(E)$ の同語反復ベクトル束とする。 E の部分束の完全旗 $0 = F^0 \subset \cdots \subset F^1 \subset E$ を一つ決めておく。ここで上付きの添え字は余階数を表す。本稿では、ベクトル束の引き戻しは、同じ記号で書くこととする。

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ を分割とする。ただし, $\lambda_1 \leq n - d$ かつ $\lambda_r > 0$ と仮定する。 $\text{Gr}_d(E)$ における λ についての退化跡は

$$X_\lambda := \{(x, S_x) \in \text{Gr}_d(E) \mid \dim(F_x^{\lambda_i - i + d} \cap S_x) \geq i, i = 1, \dots, d\}.$$

によって定義される。

部分旗 $\{F^{\lambda_i - i + d}, i = 1, \dots, r\}$ に付随した旗束

$$\varpi : \text{Fl}(F_\lambda^\bullet) \rightarrow \text{Gr}_d(E),$$

は, 以下のように定められる。点 $p := (x, S_x) \in \text{Gr}_d(E)$ におけるファイバーは E_p の部分旗 $(D_1)_p \subset \dots \subset (D_r)_p$ で, $\dim(D_i)_p = i$ と $(D_i)_p \subset F_p^{\lambda_i - i + d}$ を満たすものとする。 $D_i, i = 1, \dots, r$ を $\text{Fl}(F_\lambda^\bullet)$ 上の同語反復束とする。この時, $\text{Fl}(F_\lambda^\bullet)$ の部分多様体 Y_λ を D_r が S に含まれるような跡とすれば, Y_λ は非特異であり, ϖ を通して, X_λ に双有理なものになることが知られている。チャウ環や K 理論では, $\varpi_*[Y_\lambda] = [X_\lambda]$ であることが知られているが (cf. [4]), 無限小コホモロジー I_n^* や代数的コボルディズム Ω^* においては, X_λ の基本類が定義されていない。よって, 本研究では $\varpi_*[Y_\lambda]$ を無限小コホモロジー, もしくは代数的コボルディズムにおける退化跡類の類似として, その公式を求める。

4.2 Kempf-Laksov 公式

前節の記号をそのまま使う。

補題 4.1 (cf. [4]). 任意の向き付きコホモロジー理論 $A^*(\text{Gr}_d(E))$ において,

$$[Y_\lambda] = \prod_{i=1}^r c_{n-d}((D_i/D_{i-1})^\vee \otimes E/S)$$

が成り立つ。

$\varpi_*[Y_\lambda]$ を記述するために, 記号を導入しておく。まず $k \in \mathbb{Z}$ と $\ell = 1, \dots, n$ に対し,

$$\mathcal{A}_k^{(\ell)} := S_k((S - E/F^\ell)^\vee)$$

と定める。次に $c^{(i)} = \{c_k^{(i)}, k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r\}$ を不定元の集合としたとき, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して

$$\text{Det}[c_{\ell_1}^{(1)} \dots c_{\ell_r}^{(r)}] := \det(c_{\ell_i + j - i}^{(i)})_{1 \leq i, j \leq r}$$

とおく。これはマルチシューア行列式と呼ばれる。

定理 4.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対し,

$$\begin{aligned} \varpi_*[Y_\lambda] = & \text{Det}[\mathcal{A}_{\lambda_1}^{(k_1)} \dots \mathcal{A}_{\lambda_r}^{(k_r)}] + a_{2m} \sum_{l=-m+1}^{m-1} (-1)^{m+l} \gamma_{m+l}^{(2m)} \times \\ & \left(\sum_{1 \leq a < b \leq r} \text{Det}[\mathcal{A}_{\lambda_1}^{(k_1)} \dots \mathcal{A}_{\lambda_a+m+l}^{(k_a)} \dots \mathcal{A}_{\lambda_b+m-l}^{(k_b)} \dots \mathcal{A}_{\lambda_r}^{(k_r)}] \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

4.3 Kempf-Laksov 公式の証明の概要

旗束 $\varpi : Fl(F_\lambda^\bullet) \rightarrow Gr_d(E)$ が射影束の塔

$$\begin{aligned} \varpi : Fl(F_\lambda^\bullet) = \mathbb{P}(F^{\lambda_r-r+d}/D_{r-1}) &\xrightarrow{\varpi_r} \mathbb{P}(F^{\lambda_{r-1}-(r-1)+d}/D_{r-2}) \xrightarrow{\varpi_{r-1}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\varpi_3} \mathbb{P}(F^{\lambda_2-2+d}/D_1) \xrightarrow{\varpi_2} \mathbb{P}(F^{\lambda_1-1+d}) \xrightarrow{\varpi_1} Gr_d(E). \end{aligned} \quad (4.1)$$

によって構成できることに注意すれば、塔に沿って補題 4.1 におけるチャーン類を押し出していけば、 $\varpi_*[Y_\lambda]$ を計算することができる。塔のステージごとの押し出しを求めた以下の主張は、補題 3.3 と式 (3.2) より従う。

補題 4.3. D_i/D_{i-1} は $\mathbb{P}(F^{\lambda_i-i+d}/D_{i-1})$ の同語反復直線束であることに注意して、 $\tau_i := c_1((D_i/D_{i-1})^\vee)$ とおく。また $\alpha_i := c_{n-d}((D_i/D_{i-1})^\vee \otimes E/S)$ とした時、任意の非負整数 s について、

$$\varpi_{i*}(\tau_i^s \alpha_i) = \sum_{p \geq 0} c_p(D_{i-1}) \left(\mathscr{A}_{\lambda_i+s-p}^{(\lambda_i-i+d)} + a_{2m} \sum_{l=1}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(D_{i-1}) \mathscr{A}_{\lambda_i+s-p+2m-l}^{(\lambda_i-i+d)} \right)$$

が成り立つ。

このステージごとの押し出しを、塔に沿ってまとめて計算し、定理 4.2 の公式の形にするためには、Kazarian[5] の手法を拡張したものを使う ([4] も参照されたい)。厳密な定義は省くが、 ϕ_i を

$$\phi_i(t_1^{s_1} \dots t_r^{s_r}) = \tau_1^{s_1} \dots \tau_{i-1}^{s_{i-1}} \mathscr{A}_{s_i}^{(\lambda_i-i+d)} \dots \mathscr{A}_{s_d}^{(\lambda_d-d+d)}, \quad s_1, \dots, s_{i-1} \geq 0,$$

という、不定元 t_i たちへの代入の写像と定めると、

$$\varpi_{i*}(\tau_i^s \alpha_i) = \phi_i \left(t_i^{\lambda_i+s} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (1 - t_j/t_i) \right) \left(1 + a_{2m} t_i^{2m} \sum_{l=1}^{2m-1} \gamma_l^{(2m)} p_l(-t_1/t_i, \dots, -t_{i-1}/t_i) \right) \right)$$

と表すことができる。これによって、塔に沿った押し出しが有理関数の計算に置き換えられ、

$$\varpi_*[Y_\lambda] = \phi_1 \left(\text{Det} [t_1^{\lambda_1} \dots t_r^{\lambda_r}] + a_{2m} \sum_{l=-m+1}^{m-1} (-1)^{m+l} \gamma_{m+l}^{(2m)} \sum_{1 \leq a < b \leq r} \text{Det} [\dots t_a^{\lambda_a+m+l} \dots t_b^{\lambda_b+m-l} \dots] \right)$$

のように求まる。これで、定理 4.2 が得られることがわかった。

5 I_{2m}^* におけるシューア多項式の一般化

定義 5.1. $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\}$ を不定元とする。任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し、対称多項式 $s_k^{[2m]}(\mathbf{x}) \in Q_{2m}[x_1, \dots, x_d]^{S_d}$ を以下の母関数で定義する。

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{[2m]}(\mathbf{x}) t^k = \left(1 - \alpha_{2m} \sum_{i=1}^{2m} (-1)^i \gamma_{2m-i}^{(2m)} p_{2m-i}(\mathbf{x}) t^{-i} \right) \frac{1}{(1-x_1 t) \dots (1-x_d t)}.$$

補題 3.2 の任意のベクトル束 E のセグレ類の母関数と比べれば、 $x_1, \dots, x_d$ を E のチャーン根とすれば

$$S_k(E) = s_k^{[2m]}(\mathbf{x})$$

であることがわかる。

次に任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対し、無限小シューア多項式 $s_\lambda^{[2m]}(\mathbf{x})$ を以下のように定める。

定義 5.2.

$$s_{\lambda}^{[2m]}(\mathbf{x}) = \text{Det} [s_{\lambda_1}^{[2m]} \cdots s_{\lambda_r}^{[2m]}] + \alpha_{2m} \sum_{\ell=-m+1}^{m-1} (-1)^{m+\ell} \gamma_{m+\ell}^{(2m)} \sum_{1 \leq a < b \leq r} \text{Det} [\cdots s_{\lambda_a+m+\ell}^{[2m]} \cdots s_{\lambda_b+m-\ell}^{[2m]} \cdots]$$

$X = \{\text{pt}\}$, $E = \mathbb{C}^n$ という状況では, 同語反復束 $S \rightarrow \text{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ の双対束 $S^\vee$ のチャーン根を $x_1, \dots, x_d$ と考えれば, $I_{2m}^*(\text{Gr}_d(\mathbb{C}^n))$ の Kempf-Laksov 類 $\varpi_*[Y_\lambda]$ は $s_{\lambda}^{[2m]}(\mathbf{x})$ で与えられる.

今, $\mathcal{P}_d(n)$ を $r \leq d$ と $\lambda_1 \leq n-d$ を満たす分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ 全体とすると, $\{\varpi_*[Y_\lambda], \lambda \in \mathcal{P}_d(n)\}$ は $I_{2m}^*(\text{Gr}_d(\mathbb{C}^n))$ の Q_{2m} 上の基底であることが知られている. よって,

$$Q_{2m}[x_1, \dots, x_d]^{S_d} \rightarrow I_{2m}^*(\text{Gr}_d(\mathbb{C}^n)); \quad s_{\lambda}^{[2m]}(\mathbf{x}) \mapsto \begin{cases} \varpi_*[Y_\lambda] & \lambda \in \mathcal{P}_d(n) \\ 0 & \lambda \notin \mathcal{P}_d(n). \end{cases}$$

という全射な準同型が存在する.

一方, $\mathcal{P}_d$ を $r \leq d$ を満たす分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ 全体とすれば, $\{s_{\lambda}^{[2m]}(\mathbf{x}), \lambda \in \mathcal{P}_d\}$ が対称多項式環 $Q_{2m}[x_1, \dots, x_d]^{S_d}$ の Q_{2m} 上の基底になることも, 代数的に示すことは容易である.

また, 定義 5.1 と定義 5.2 は, factorial Schur/Grothendieck polynomial の類似に拡張することもでき, その場合は, $\text{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ の同変無限小コホモロジーにおける $\varpi_*[Y_\lambda]$ に対応する多項式を定義することもできる.

参考文献

- [1] DAI, S., AND LEVINE, M. Connective algebraic K -theory. *J. K-Theory* 13, 1 (2014), 9–56.
- [2] GIAMBELLI. Risoluzione del problema degli spazi secanti. *Mem. R. Accad. Sci. Torino* 52, 2 (1902), 171–211.
- [3] HUDSON, T. A Thom-Porteous formula for connective K -theory using algebraic cobordism. *J. K-Theory* 14, 2 (2014), 343–369.
- [4] HUDSON, T., IKEDA, T., MATSUMURA, T., AND NARUSE, H. Determinantal and Pfaffian formulas of K -theoretic schubert calculus. 2015, arXiv:1504.02828.
- [5] KAZARIAN, M. On lagrange and symmetric degeneracy loci. *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences Preprint Series* (2000).
- [6] KEMPF, G., AND LAKSOV, D. The determinantal formula of Schubert calculus. *Acta Math.* 132 (1974), 153–162.
- [7] LAZARD, M. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre. *Bull. Soc. Math. France* 83 (1955), 251–274.
- [8] LEVINE, M., AND MOREL, F. *Algebraic cobordism*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [9] VISHIK, A. Symmetric operations in algebraic cobordism. *Adv. Math.* 213, 2 (2007), 489–552.