

合流性とZ性について

群馬大学理工学府 赤坂 陸来*

Riku Akasaka

Department of Computer Science,
Gunma University

群馬大学理工学府 藤田 憲悦†

Ken-etsu Fujita

Department of Computer Science,
Gunma University

名古屋大学大学院情報学研究科 中澤 巧爾

Koji Nakazawa

Graduate School of Informatics
Nagoya University

1 はじめに

抽象書き換え系には合流性や停止性などの重要な性質が存在する。合流性を証明する手段として、Z性とよばれる性質を利用したものが知られている。本論文は、前半ではZ性を中心とした基本概念の相互関係について、V. van Oostrom[1]にしたがって調査したものを述べる。後半ではZ性を拡張した合成的Z定理について、Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita[2]より例を用いて紹介する。

2 準備

本節では、抽象書き換え系と例として用いる λ 計算について、本論文で使用する記号を含め定義を述べる。

2.1 抽象書き換え系

抽象書き換え系は、任意の集合 A と A 上の二項関係 $\rightarrow$ の対 $(A, \rightarrow)$ である。 $a, b, c, \dots$ を集合 A の要素とし、 $(a, b) \in \rightarrow$ のとき、 $a \rightarrow b$ と表し a から b への簡約という。 $a \rightarrow b$ を満たすような b が存在しないとき a は正規形であるという。 $\rightarrow$ の反射推移閉包を $\Rightarrow$ 、推移閉包を $\rightarrow^+$ と表す。

2.2 簡約列

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ が与えられたとき、 $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$ のような有限もしくは無限列を $\rightarrow$ についての簡約列という。とくに、 $a, b \in A$ について、 a から始まる簡約列を a の簡約列、 a から始まって b で終わる簡約列を a から b の簡約列という。また、 $\sigma : a \rightarrow b$ と表記するとき σ は a から b の任意の簡約列を示す。

*本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである。

†本研究の一部はKAKENHI(C)20K03711の援助を受けたものである。

2.3 λ 計算

2.3.1 λ 項

Λ を λ 項の集合とし、以下のように定義する。

定義 1 (λ 項)

1. 変数 $x, y, z, \dots$ は λ 項である。
2. M が λ 項であり、 x が変数のとき $(\lambda x.M)$ は λ 項である。
3. M, N が λ 項のとき (MN) は λ 項である。

$(\lambda x.M)$ という形を関数抽象、 (MN) という形を関数適用という。また、関数抽象 $(\lambda x.M)$ の M の中に変数 x が現れたとき、 x は束縛されているという。束縛されている変数のことを束縛変数と呼び、束縛されていない変数を自由変数と呼ぶ。 λ 項 M に含まれる自由変数の集合を $FV(M)$ と表す。

2.3.2 β 簡約 ($\rightarrow_\beta$)

$(\lambda x.M)N$ という形の λ 項を $M[x := N]$ に書き換えることを β 簡約と言い、 M を β 簡約して M' を得るとき $M \rightarrow_\beta M'$ と表記する。 β 簡約の反射推移閉包を $\rightarrow_\beta$ 、推移閉包を $\rightarrow_\beta^+$ と表す。 $(\lambda x.M)N$ という形の項を β 基 (β -redex) と言い、 β 基を含まない λ 項 (それ以上 β 簡約できない λ 項) を β 正規形という。

また、 $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の同値関係を $=_\beta$ で表し以下のように定義する。

定義 2 ($\rightarrow_\beta$ の同値関係)

1. $M \rightarrow_\beta N$ ならば $M =_\beta N$
2. $M =_\beta N$ ならば $N =_\beta M$
3. $M =_\beta N$ かつ $N =_\beta L$ ならば $M =_\beta L$

3 抽象書き換え系に関する性質

3.1 合流性と Church-Rosser の定理

定義 3 (合流性)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について、以下の性質を満たすとき $(A, \rightarrow)$ は合流性をもつという。

$$\forall a, a_1, a_2 \in A, a \rightarrow a_1 \text{ かつ } a \rightarrow a_2 \implies \exists a_3 \in A, a_1 \rightarrow a_3 \text{ かつ } a_2 \rightarrow a_3$$

合流性はラムダ計算において成立し、関連した性質として Church-Rosser の定理が成立する。

定理 4 ($(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の合流性)

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda, M \rightarrow_\beta M_1 \text{ かつ } M \rightarrow_\beta M_2 \implies \exists M_3 \in \Lambda, M_1 \rightarrow_\beta M_3 \text{ かつ } M_2 \rightarrow_\beta M_3$$

定理 5 (Church-Rosser の定理)

$$\forall M, N \in \Lambda, M =_\beta N \implies \exists L \in \Lambda, M \rightarrow_\beta L \text{ かつ } N \rightarrow_\beta L$$

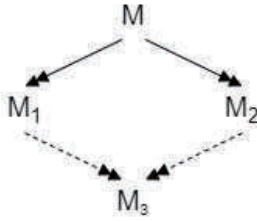
図 1: $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ の合流性

図 2: Church-Rosser の定理

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ が定理 4 を満たすことを $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ は CR 性をもつという.

定理 6 合流性と Church-Rosser の定理について, 以下のことが言える.

$$(\Lambda, \rightarrow_\beta) \text{ が合流性をもつ} \iff (\Lambda, \rightarrow_\beta) \text{ が CR 性をもつ}$$

証明

($\implies$)

$=_\beta$ の定義に沿った帰納法により証明する.

1. $M =_\beta N$ が $M \rightarrow_\beta N$ から定義されるとき:
 $M \rightarrow_\beta N, N \rightarrow_\beta N$ より成立する.
2. $M =_\beta N$ が $N =_\beta M$ から定義されるとき:
 帰納法の定義から, ある L が存在し, $N \rightarrow_\beta L, M \rightarrow_\beta L$ となる.
3. $M =_\beta N$ が $M =_\beta N', N' =_\beta N$ から定義されるとき:
 帰納法の定義から, ある M_1, M_2 が存在し, それぞれ $M \rightarrow_\beta M_1$ かつ $N' \rightarrow_\beta M_1, N' \rightarrow_\beta M_2$ かつ $N \rightarrow_\beta M_2$ となる. さらに合流性より, ある M_3 が存在し, $M_1 \rightarrow_\beta M_3$ かつ $M_2 \rightarrow_\beta M_3$ となる. つまり $M \rightarrow_\beta M_3, N \rightarrow_\beta M_3$ となる M_3 が存在する.

($\impliedby$)

任意の M, M_1, M_2 に対して, $M \rightarrow_\beta M_1, M \rightarrow_\beta M_2$ を仮定する. $=_\beta$ の定義より $M_1 =_\beta M_2$ である. 定理 5 より, $M_1 \rightarrow_\beta M_3, M_2 \rightarrow_\beta M_3$ となる M_3 が存在する.

□

3.2 Triangle-property

定義 7 (Triangle-property)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 f について, 以下の性質を満たすとき関係 $\rightarrow$ は Triangle-property をもつという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \rightarrow f(a)$$

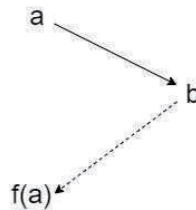


図 3: Triangle-property

例題 8 ($(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ における *Triangle-property*)

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ について, 並行簡約という二項関係と写像 $*$ (*complete-development*) を定義する.

定義 9 (並行簡約 $\Rightarrow_\beta$)

1. $x \Rightarrow_\beta x$
2. $M \Rightarrow_\beta M'$ ならば $\lambda x.M \Rightarrow_\beta \lambda x.M'$
3. $M \Rightarrow_\beta M'$ かつ $N \Rightarrow_\beta N'$ ならば $(MN) \Rightarrow_\beta (M'N')$
4. $M \Rightarrow_\beta M'$ かつ $N \Rightarrow_\beta N'$ ならば $(\lambda x.M)N \Rightarrow_\beta M'[x := N']$

定義 10 (写像 $*$ (*complete-development*))

1. $x^* = x$
2. $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$
3. $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$
4. $(LN)^* = L^*N^*$ (ただし L は関数抽象以外の λ 項)

$\forall M \in \Lambda$ について, 並行簡約は M の中に存在する β 基を任意の数同時に簡約できる関係であり, 写像 $*$ は M 中の β 基をすべて簡約した λ 項を返すような写像である. また, $\Rightarrow_\beta$ は $\rightarrow_\beta \subset \Rightarrow_\beta \subset \twoheadrightarrow_\beta$ といった大小関係となる. 並行簡約と写像 $*$ を定義することで次の命題が成り立つことが分かる.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{ について, } M \Rightarrow_\beta N \implies N \Rightarrow_\beta M^*$$

つまり, 並行簡約 $\Rightarrow_\beta$ は *Triangle-property* を満たす.

3.3 Cofinality

定義 11 (戦略)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ において, 戦略 F とは次の性質を満たす A から A への写像である.

1. $a \equiv F(a)$ a が正規形である場合
2. $a \rightarrow^+ F(a)$ その他

a が正規形でないとき, a から $F(a)$ を求める際, $a \rightarrow F(a)$ のとき F は 1 ステップ戦略, $a \rightarrow^+ F(a)$ のとき F は多ステップ戦略と呼ぶ.

定義 12 ($\rightarrow_F$)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と戦略 F があり, $a \rightarrow^+ F(a)$ のとき, $a \rightarrow_F F(a)$ と書く.

定義 13 (*Cofinality*)

戦略 F が以下の性質を満たすとき戦略 F は *cofinal* である.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies \text{ある } n(\geq 1) \text{ が存在し, } b \rightarrow F^n(a)$$

定義 14 (*Hyper-Cofinality*)

任意の $a, b \in A$ と A 上の戦略 F について, 最終的には常に簡約 $\rightarrow_F$ を含む a の任意の簡約列を σ とする. 以下の性質を満たすとき, 戦略 F は *hyper-cofinal* である.

$$a \twoheadrightarrow b \implies \sigma \text{ 上の } c \text{ が存在し, } b \rightarrow c$$

3.4 Z 性

定義 15 (Z 性)[7] 抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について, 次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき, 写像 f は Z 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \mapsto f(a) \mapsto f(b)$$

例題 16 $((\Lambda, \rightarrow_\beta)$ における Z 性)

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$ について, 3.2 節で導入した写像 $*$ は Z 性を満たす写像である. つまり, 次の命題が成り立つ.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{ について, } M \rightarrow_\beta N \implies N \mapsto_\beta M^* \mapsto_\beta N^*$$

証明

M の構造に関する帰納法により $M \rightarrow_\beta N \implies N \mapsto_\beta M^* \mapsto_\beta N^*$ を証明する.

1. M が関数抽象 $(\lambda x.M_1)$ のとき :

$M = \lambda x.M_1 \rightarrow_\beta \lambda x.N_1 = N$ と仮定すると, 帰納法の仮定より, $N_1 \mapsto_\beta M_1^* \mapsto_\beta N_1^*$ となる. 従って, $\lambda x.N_1 \mapsto_\beta \lambda x.M_1^* (= (\lambda x.M_1)^*) \mapsto_\beta \lambda x.N_1^* (= (\lambda x.N_1)^*)$ である.

2. M が関数適用 $M_1 M_2$ のとき :

2-1 $M_1 M_2 = (\lambda x.M_0)M_2 \rightarrow_\beta M_0[x := M_2] = N$ の場合 :

$N = M_0[x := M_2] \mapsto_\beta M_0^*[x := M_2^*] (= ((\lambda x.M_0)M_2)^* = M^*) \mapsto_\beta M_0[x := M_2]^* = N^*$ となる.

2-2 $M = M_1 M_2 \mapsto_\beta N_1 N_2 = N$ の場合 :

$M_1 \mapsto_\beta N_1 (M_2 = N_2)$ もしくは $M_2 \mapsto_\beta N_2 (M_1 = N_1)$ となる. それぞれの場合において帰納法の仮定より, $N_i \mapsto_\beta M_i^* \mapsto_\beta N_i^* (i = 1, 2)$ である. M_1 が関数抽象で $M_1^* = \lambda x.M'_0$ であれば, $M'_0 \mapsto_\beta N'_0$ となる N'_0 について $N_1^* = \lambda x.N'_0$ となる. よって,

$$\begin{aligned} N_1 N_2 \mapsto_\beta M_1^* M_2^* &= M'_0[x := M_2^*] \\ &\mapsto_\beta M'_0[x := M_2^*] (= (M_1 M_2)^*) \\ &\mapsto_\beta N'_0[x := N_2^*] (= (N_1 N_2)^*) \end{aligned}$$

その他の場合, $N_1 N_2 \mapsto_\beta M_1^* M_2^* \mapsto_\beta N_1^* N_2^*$ となる. N_1 が関数抽象で $N_1^* = \lambda x.N'_0$ のとき, $N_1^* N_2^* = (\lambda x.N'_0)N_2^* \mapsto_\beta N'_0[x := N_2^*] = (N_1 N_2)^*$ である. それ以外は $N_1^* N_2^* = (N_1 N_2)^*$ となる. $\square$

4 相互関係

本節では, 3 節で挙げた 5 つの概念について, それらの相互関係を述べる.

4.1 Z 性と合流性

Z 性と合流性について次のことが成立する.

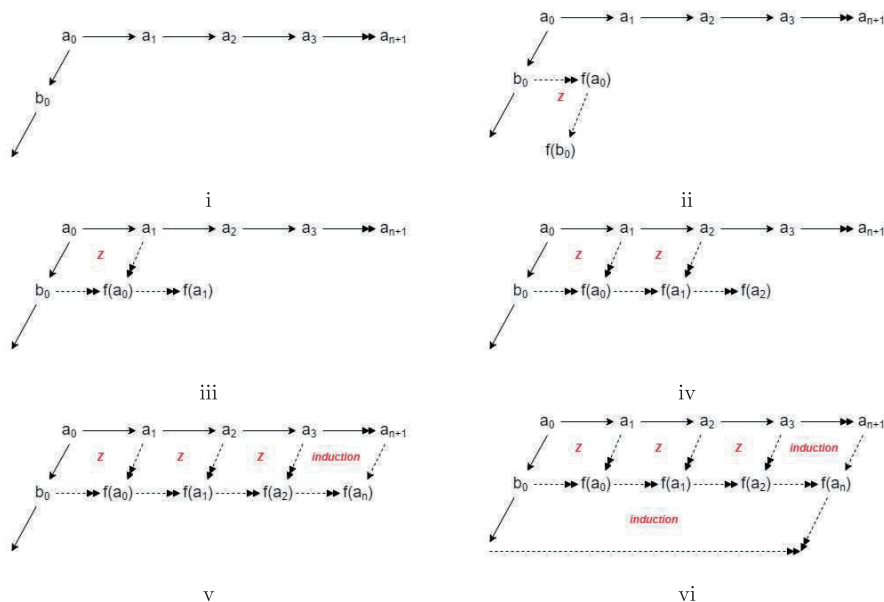
定理 17 (Z 定理)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が Z 性を満たす} \implies (A, \rightarrow) \text{ は合流性をもつ}$$

証明

$a \in A$ から分岐した任意の項について, Z 性を帰納的に用いることで下図のように示することができる.



□

4.2 Z 性と *Cofinality*

Z 性と *Cofinality* について次のことが成立する.

定理 18

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

写像 f が Z 性を満たす $\implies$ 戦略 f は *cofinal* である

証明

a の簡約列上の任意の項 b_n について, ある k が存在し, $b_n \rightarrow f^k(a)$ となればよい. Z 性より $a \rightarrow b_0 \rightarrow b_1$ のとき, $b_0 \rightarrow f^1(a)$, $b_1 \rightarrow f^1(b_0)$ である. $b_0 \rightarrow f^1(a)$ なので Z 性より, $f^1(b_0) \rightarrow f^2(a)$ となる. 同様に考えると, a の簡約列上の任意の項 b_n について $b_n \rightarrow f^k(a)$ となる.

□

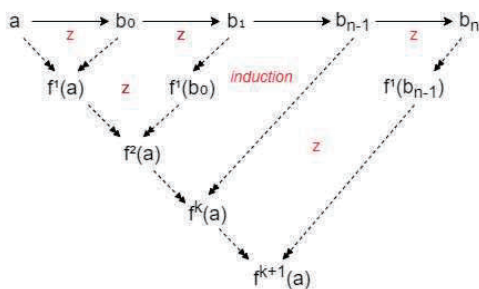


図 4: Z 性 $\implies$ *Cofinality*

4.3 「 Z 性 $\Leftarrow$ 合流性」, 「 Z 性 $\Leftarrow$ *Cofinality*」の反例

以下のような項書き換えは, Z 性 $\Leftarrow$ 合流性, Z 性 $\Leftarrow$ *Cofinality* の反例となる.

- $i \rightarrow i + 1 \ (\forall i \in \mathbb{Z})$
- $-(n + 1) \rightarrow n + 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

証明

Z 性を満たす写像 $*$ が存在すると仮定する. $0^* = n \ (n > 0)$ であり, 書き換え規則より, $-(n + 1) \rightarrow 0$, $-(n + 1) \rightarrow n + 1$ となるので, それぞれ Z 性より, $-(n + 1)^* \rightarrow 0^*$, $n + 1 \rightarrow -(n + 1)^*$ である. つまり, $n + 1 \rightarrow 0^* = n$ となり, 書き換え規則に矛盾する.

□

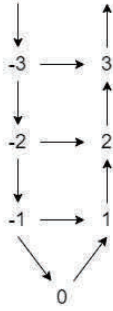


図 5: 「 Z 性 $\Leftarrow$ 合流性」, 「 Z 性 $\Leftarrow$ *Cofinality*」の反例

4.4 Z 性と *Hyper-Cofinality*

Z 性と *Hyper-Cofinality* について次のことが成立する.

定理 19

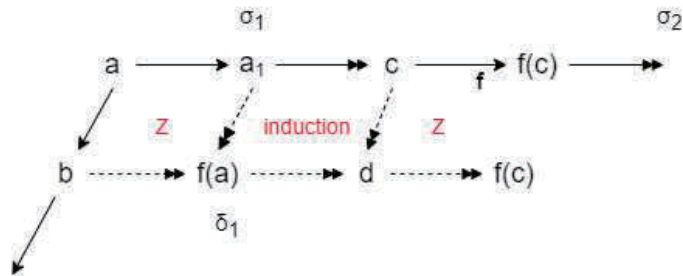
抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

写像 f が Z 性を満たす $\implies$ 戦略 f は *hyper-cofinal* である

証明

$a \rightarrow b$ となる任意の $a, b \in A$ と, 最終的には常に簡約 $\rightarrow_f$ を含むような a の簡約列 σ が与えられたときに, σ に合流する b の簡約列 δ が存在することを示す. σ は正規形で終わるか, a から c の簡約列 σ_1 と, $c \rightarrow_f f(c)$ と, $f(c)$ の簡約列 σ_2 に分けられる. $a \rightarrow b$, $a \rightarrow c$ なので, それぞれ Z 性より $b \rightarrow f(a)$, $f(a) \rightarrow f(c)$ である. つまり, $c \rightarrow d \rightarrow f(c)$ となる d が存在し, $\delta_1 : b \rightarrow d$ が考えられる. c が正規形の場合, $\delta := \delta_1$ とし, その他の場合, δ_1 と $c \rightarrow f(c)$ と σ_2 を合わせたものを δ とすることで δ は σ に合流する b の簡約列である.

□

図 6: Z 性 $\implies$ *Hyper-Cofinality*

4.5 Z 性と *Triangle-property*

Z 性と *Triangle-property* について次のことが成立する.

定理 20

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 f が与えられたとき,

写像 f が Z 性を満たす

$\Updownarrow$

ある関係 $\rightarrow_t$ が存在し, 次の性質を満たす.

T1. $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$

T2. $a \rightarrow_t b \implies b \rightarrow_t f(a)$

証明

($\implies$)

$a \rightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ のとき, $a \rightarrow_t b$ と定義する. $\rightarrow_t$ が T1, T2 を満たすことを示す.

(T1) $a \rightarrow b$ ならば Z 性より, $a \rightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ である. よって $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t$ である. $a \rightarrow_t b$ ならば, 明らかに $a \twoheadrightarrow b$ である. よって $\rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$ である. 以上より, $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \twoheadrightarrow$ の関係が得られる.

(T2) $a \rightarrow_t b$ と仮定すると $\rightarrow_t$ の定義から $a \twoheadrightarrow b \twoheadrightarrow f(a)$ となり, Z 性より $f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である. $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となるので $\rightarrow_t$ の定義から $b \rightarrow_t f(a)$ である. 従って, $a \rightarrow_t b$ ならば $b \rightarrow_t f(a)$ となり T2 が成り立つ.

($\Leftarrow$)

$a \rightarrow b$ を仮定すると, T1, T2 より $a \rightarrow_t b \rightarrow_t f(a)$ となる. $b \rightarrow_t f(a)$ なので T2 より, $b \rightarrow_t f(a) \rightarrow_t f(b)$ となる. T1 より, $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ である. 従って, $a \rightarrow b$ ならば $b \twoheadrightarrow f(a) \twoheadrightarrow f(b)$ となり, Z 性が示された.

□

4.6 合流性と *Cofinality*

合流性と *Cofinality* について次のことが成立する.

定理 21

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ と A 上の写像 F が与えられたとき,

戦略 F が *cofinal* $\implies (A, \rightarrow)$ は合流性をもつ.

証明

$a_1 \leftarrow a \rightarrow a_2$ となる任意の $a, a_1, a_2 \in A$ について. 戦略 F は *cofinal* なので, ある n, m が存在し, $a_1 \rightarrow F^n(a)$ かつ $a_2 \rightarrow F^m(a)$ となる. $k = \max(n, m)$ とすると, $F^n(a) \rightarrow F^k(a) \leftarrow F^m(a)$ である. 従って, $a_1 \rightarrow F^k(a) \leftarrow a_2$ となり合流性が成立する.

□

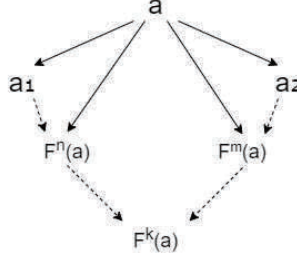


図 7: 合流性 $\implies$ *Cofinality*

5 合成的 Z 定理

5.1 弱 Z 性

定義 22 (弱 Z 性)

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について, $\rightarrow_\times$ を A 上の関係とし, その反射推移閉包を $\rightarrow_\times$ とする. 次の性質を満たす A 上の写像 f が存在するとき, 写像 f は弱 Z 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \rightarrow_\times f(a) \rightarrow_\times f(b)$$

5.2 合成的 Z 定理

定理 23 (合成的 Z 定理)[2]

抽象書き換え系 $(A, \rightarrow)$ について, $\rightarrow = \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ とする. 次の性質を満たす A 上の写像 f_1, f_2 が存在するとき, 合成写像 $f_2 \circ f_1$ は Z 性を満たす.

1. $\rightarrow_1$ について, f_1 が Z 性を満たす.
2. $a \rightarrow_1 b$ となるとき $f_2(a) \rightarrow f_2(b)$ である.
3. 任意の $a \in \text{Im}(f_1)$ について, $a \rightarrow f_2(a)$ である.
4. $\rightarrow_2$ について, $f_2 \circ f_1$ が弱 Z 性を満たす.

図 8 が上の性質を図示したものであり, 合成写像 $f_2 \circ f_1$ が Z 性を満たすことが確認できる.

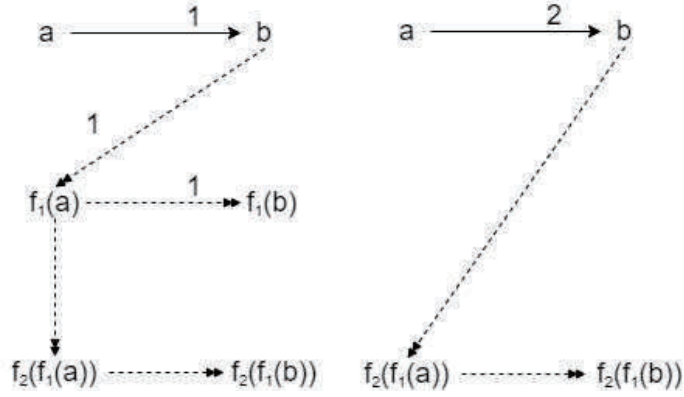


図 8: 合成的 Z 定理

例題 24 ($\lambda\mu$ 計算) [2]

以下のような項と簡約規則からなる $\lambda\mu$ 計算 の体系を定義する.

定義 25 ($\lambda\mu$ 計算)

項: $M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM) \mid (\mu\alpha.M) \mid ([\alpha]M)$

簡約規則:

1. $(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$
2. $(\mu\alpha.M)N \rightarrow_S M[[\alpha]w := [\alpha](wN)]$
3. $[\alpha](\mu\beta.M) \rightarrow_R M[\beta := \alpha]$
4. $\mu\alpha.[\alpha]M \rightarrow_{\mu\eta} M \ (\alpha \notin FV(M))$

この体系で Z 性をみたす写像を求めるとき, 例題 16 と同様に考えて, どれかの簡約規則を優先させる写像を考えたとしても Z 性を満たさない. そこで, $\rightarrow_1 = \rightarrow_{\mu\eta}$, $\rightarrow_2 = \rightarrow_\beta \cup \rightarrow_S \cup \rightarrow_R$ として, 以下のような写像 $*^1, *^2$ を与える. すると, 写像 $*^1, *^2$ が合成的 Z の性質を満たし, 合成写像 $*^2 \circ *^1$ が Z 性を満たすことが分かり, 上の体系の合流性が示せる.

定義 26 (写像 $*^1$)

1. $x^{*^1} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*^1} = \lambda x.M^{*^1}$
3. $(MN)^{*^1} = (M^{*^1}N^{*^1})$
4. $(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*^1} = M^{*^1} \ (\alpha \notin FV(M))$
5. $(\mu\alpha.M)^{*^1} = \mu\alpha.M^{*^1}$
6. $([\alpha]M)^{*^1} = [\alpha]M^{*^1}$

定義 27 (写像 $*^2$)

1. $x^{*^2} = x$
2. $(\lambda x.M)^{*^2} = \lambda x.M^{*^2}$

3. $((\lambda x.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[x := N^{*^2}]$
4. $((\mu\alpha.M)N)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*^2})]$
5. $(MN)^{*^2} = (M^{*^2}N^{*^2})$
6. $(\mu\alpha.M)^{*^2} = \mu\alpha.M^{*^2}$
7. $([\alpha](\mu\beta.M)N)^{*^2} = M^{*^2}[[\beta]w := [\alpha](wN^{*^2})]$
8. $([\alpha]M)^{*^2} = [\alpha]M^{*^2}$

6 まとめ

文献 [1] [5] に従って, 相互関係を図 9 のように整理することができる. また, Z 性を拡張した合成的 Z 定理では, 簡約規則が複数ある体系で Z 性を満たす写像が直接与えることが出来なくても, 簡約規則を分けて考えることで Z 性を満たす写像について考えることができる.

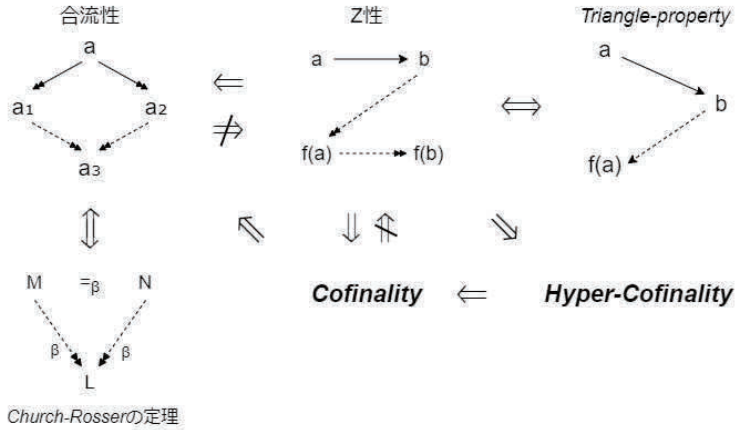


図 9: 5 つの概念の相互関係

参考文献

- [1] V. van Oostrom, Z; Syntax-Free Developments, 6th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2021) Article No.24 pp.24:1-24:22, 2021.
- [2] Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita, Confluence Proofs of Lambda-Mu-Calculi by Z Theorem, *Studia Logica* 109:917-936, 2021.
- [3] Komori, Y., N. Matsuda, and F. Yamakawa, A simplified proof of the Church-Rosser theorem, *Studia Logica* 102(1):175-183, 2013.
- [4] Nakazawa, K., and K. Fujita, Compositional Z: Confluence proofs for permutative conversion, *Studia Logica* 104:1205-1224, 2016.
- [5] Terse, Term Rewriting System, Volume 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2003.