

次元を保存する位相群への埋め込みについて

筑波大 名倉 利行 (Nagura Toshiyuki)

1. Introduction

D. B. Shakhmatov の最近の論文 [S] の内容を紹介する。
space はすべて Tychonoff space とする。

Bel'nov は [B] において次を示した。"任意の space X に対して、 $\dim Y \leq \dim X$ となる homogeneous space Y が存在して、 X は Y の closed subspace となる。" そして、 Y として topological group をとれるか? という問題をあげた。これに対し、Shakhmatov はまず、次の否定解を与えた。

定理. $n \neq 0, 1, 3, 7$ とすると、 S^n は $\dim G = n$ となる topological group G に埋め込むことはできない。

これは、 $n \neq 0, 1, 3, 7$ のとき、 S^n は H-space ではない、という Adams の theorem [Ad] を使って示される。こ

ここではこの結果よりも、 $n=0$ の場合の次の肯定解がメインである。

定理. 任意の space X に対し、次は同値である。

- 1) $\dim X = 0$
- 2) $\dim F^*(X) = 0$
- 3) $\dim A^*(X) = 0$

上における $F^*(X)$ ($A^*(X)$) は、 X を closed に含む topological (Abelian) group である。これについて、後で詳しく記す。

2. free topological group について

space X に対して、 X を subspace として含む topological group をつくる方法として、free topological group $F(X)$ がよく知られている。([G]) group としての $F(X)$ は、 X を base とする free group である。すなわち、

$$F(X) = \left\{ g \mid g = \underline{x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}}, x_i \in X, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, n \in \omega \right\} \\ (x_i = x_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1})$$

集合として X は $F(X)$ に自然に含まれている。topology は、 X のもともとの topology を induce するような $F(X)$ 上の group topology の中で最強のものを与える。これは、 X を induce する $F(X)$ 上の topology の中で、次をみたす唯一のものである。

★ 任意の $\sqrt{\text{topological group } G}$ と、任意の continuous map $f: X \rightarrow G$ に対し、homomorphic と拡張 $\tilde{f}: F(X) \rightarrow G$ が continuous である。

このとき X は $F(X)$ の closed subspace となる。

X に対し、group $A(X)$ は、 X を base とする free Abelian group である。すなわち、

$$A(X) = \left\{ g \mid g = \frac{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}{(\varepsilon_i = \varepsilon_j \Rightarrow x_i = x_j)}, x_i \in X, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

topology は、 $F(X)$ と同様、 X のもともとの topology を induce する最強の group topology を入れる。これは、 X を induce して、かつ次をみたす $A(X)$ 上の唯一の topology である。

★ 任意の topological Abelian group G と任意の conti.
map $f: X \rightarrow G$ に対して, homomorphic に拡張
 $\tilde{f}: A(X) \rightarrow G$ が continuous である。

すべての space X に対し, $\dim X = 0$ ならば $\dim F(X) = 0$
(または $\dim A(X) = 0$) か? という問題 ($[A]$) は未解決
である。部分解として, Tkačenko $[T_1]$ は " $\dim X = 0$ ならば
 $\text{ind } A(X) = 0$ " を, Sipachova $[Si]$ は " $\dim X = 0$ ならば
 $\text{ind } F(X) = 0$ " を示した。

3. free precompact (Abelian) group $F^*(X)$ ($A^*(X)$)

space X に対し, group $F(X)$ ($A(X)$) 上の group topology
で, X のもともとの topology を induce するものは, 一般に
一通りではない。Shakhmatov のアイデアは, $F(X)$ 上の
topology を少し改良することによって, $\dim X = 0 \Rightarrow$
(改良された topology で) $\dim F(X) = 0$ が常に成り立つよう
にするこである。

定義 1. topological group G が precompact である
とは, G がある compact group H の subgroup となるときを
いう。

定義 2 ([S] 1.5). X は space, $\mathcal{T}^*$ は $F(X)$ ($A(X)$) 上の (Hausdorff) group topology とする. 次にみたすとき, $(F(X), \mathcal{T}^*)$ は X の free precompact group ($(A(X), \mathcal{T}^*)$ は X の free precompact (Abelian) group) といふ.

- i) $\mathcal{T}^*$ は X の もともとの topology を induce する.
- ii) $\mathcal{T}^*$ は precompact.
- iii) 任意の compact (Abelian) group G と, 任意の continuous map $f: X \rightarrow G$ に対し, homomorphic に拡張 $\tilde{f}: (F(X), \mathcal{T}^*) \rightarrow G$ ($\tilde{f}: (A(X), \mathcal{T}^*) \rightarrow G$) が continuous である.

命題 3 ([S] 1.6). すべての X ^{space} に対し, X の free precompact (Abelian) group $(F(X), \mathcal{T}^*)$ ($(A(X), \mathcal{T}^*)$) が unique に存在する.

以後, $(F(X), \mathcal{T}^*)$, $(A(X), \mathcal{T}^*)$ をそれぞれ $F^*(X)$, $A^*(X)$ とかく.

命題 4 ([S] 2.9). X は C^* -embedded in $F^*(X)$ ($A^*(X)$).

よって, $\dim X \leq \dim F^*(X)$ ($\dim A^*(X)$) である.

命題 5 ([S] 2.3). $F^*(X)$ は $F^*(\beta X)$ の (自然な imbedding によって) subgroup である. $A^*(X)$ についても同様.

$\dim X = 0 \Rightarrow \dim F^*(X) = 0$ ($\dim A^*(X) = 0$) を示すためには, precompact group に関する一般的な性質を調べる.

定義 6 ([T₂]). topological group G が次の (*) をみたすとき, $\mathbb{R}$ -factorizable であるという.

(*) 任意の continuous map $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $w(H) \leq w$ なる topological group H と, continuous homomorphism $\pi: G \rightarrow H$ と, continuous map $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して
 $f = \varphi \circ \pi$ をみたす.

定理 7 ([T₃]). precompact group は $\mathbb{R}$ -factorizable である.

定理 8 ([S] 3.1). G は $\mathbb{R}$ -factorizable group,
 $\text{ind } G = 0$, H は topological group, $\pi: G \rightarrow H$ は conti.
homomorphism とするとき, ある topological group G^* と,

Continuous homomorphisms $g: G \rightarrow G^*$, $h: G^* \rightarrow H$ が存在して,
 $\pi = h \circ g$, $\text{ind } G^* = 0$, $w(G^*) \leq w(H)$ を示す。

証明. $w(H) = \tau$ とする。

$n \in \mathbb{N}$ に対し, group G_n , continuous homomorphisms
 $g_n: G \rightarrow G_n$, $h_n: G_n \rightarrow G_{n+1}$ を, 次を示すようにとる。

$$i) \quad G_0 = H, \quad g_0 = \pi$$

$$ii) \quad w(G_n) \leq \tau$$

$$iii) \quad g_n = h_{n+1} \circ g_{n+1}$$

iv) 任意の open nbd U of e_{G_n} in G_n に対し, ある clopen nbd W of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} が存在して $W \subset h_{n+1}^{-1}(U)$ 。

いま, $n \geq \tau$ として G_n, g_n, h_n が定められ示す。

$\{U_n^\alpha \mid \alpha < \tau\}$ を nbd base of e_{G_n} in G_n とし, $\alpha < \tau$ を fix する。

$\text{ind } G = 0$ より, clopen nbd V_n^α of e_G in G が存在して

$$V_n^\alpha \subset g_n^{-1}(U_n^\alpha) \quad \text{を示す。}$$

$$f_{n+1}^\alpha: G \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{を}$$

$$f_{n+1}^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in V_n^\alpha \\ 1 & \text{if } x \notin V_n^\alpha \end{cases}$$

とすると, G は $\mathbb{R}$ -factorizable である。group G_{n+1} と

continuous homomorphism $g_{n+1}^\alpha: G \rightarrow G_{n+1}$, continuous onto map

$$\varphi_{n+1}^\alpha: G_{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{が存在して, } w(G_{n+1}) \leq w, \quad f_{n+1}^\alpha = \varphi_{n+1}^\alpha \circ g_{n+1}^\alpha$$

をみたす。

$$g_{n+1} = \Delta \{ g_{n+1}^\alpha \mid \alpha < \tau \} \Delta g_n : G \longrightarrow \prod_{\alpha} G_{n+1}^\alpha \times G_n \quad \text{と} \quad L.$$

$G_{n+1} = g_{n+1}(G)$, $h_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_n$, $p_{n+1}^\alpha : G_{n+1} \longrightarrow G_{n+1}^\alpha$ は projection とする。

ii), iii) をみたすことは明らか。

$W_n^\alpha = (\varphi_{n+1}^\alpha \circ p_{n+1}^\alpha)^{-1}(0)$ は clopen nbd of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} である。

$$g_{n+1}^{-1}(W_n^\alpha) \subset f_{n+1}^{\alpha^{-1}}(0) = V_n^\alpha \subset g_n^{-1}(U_n^\alpha).$$

よって

$$W_n^\alpha \subset g_{n+1}(g_n^{-1}(U_n^\alpha)) \subset h_{n+1}^{-1}(U_n^\alpha).$$

よって iv) もみたす。

以上より、任意の new に対して、 G_n, g_n, h_n がつくられたい。

$$g : \Delta \{ g_n \mid \text{new} \} : G \longrightarrow \prod_{\text{new}} G_n, \quad G^* = g(G),$$

$h : G^* \longrightarrow H$ は projection とする。 $\pi = h \circ g$, $w(G^*) \leq \tau$

は明らか。 iv) を使えば、 $\text{ind } G^* = 0$ もすぐわかる。 $\square$

定理 9 ([S] 3.3). 任意の $\mathbb{R}$ -factorizable group G に対し、 $\text{ind } G = 0$ と $\dim G = 0$ は必要十分である。

証明. 一般の Tychonoff space X に対し、 $\dim X = 0$ ならば $\text{ind } X = 0$ である。

いま, $\text{ind } G = 0$ とする.

Z を $w(Z) \leq w$ である space, $f: G \rightarrow Z$ を continuous map とする. このとき, $w(Y) \leq w$, $\dim Y \leq 0$ である

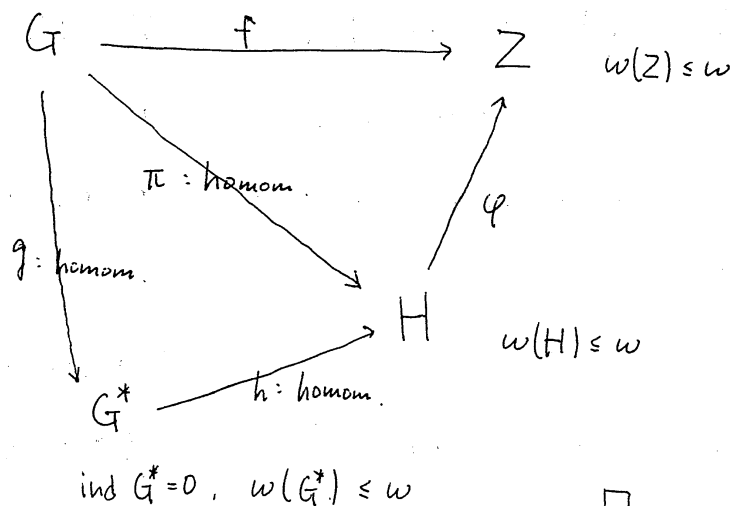
space Y と, continuous maps $g: G \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow Z$ が存在して $f = h \circ g$ とする = ことを示せばよい.

G は $\mathbb{R}$ -factorizable であるから $w(H) \leq w$ である topological group H と, continuous homomorphism $\pi: G \rightarrow H$, continuous map $\varphi: H \rightarrow Z$ が存在して $f = \varphi \circ \pi$ である.

定理 8 より topological group G^* と continuous homomorphisms

$g: G \rightarrow G^*$, $h: G^* \rightarrow H$ が存在して $\pi = h \circ g$, $\text{ind } G^* = 0$, $w(G^*) \leq w(H) \leq w$ である. $w(G^*) \leq w$ より $\dim G^* = 0$.

よって, $Y = G^*$ とすればよい.



□

定理 10 ([S] 4.1) space X に対し、次は同値。

$$(i) \quad \dim X = 0$$

$$(ii) \quad \dim F^*(X) = 0$$

$$(iii) \quad \dim A^*(X) = 0$$

$$(iv) \quad \text{ind } F^*(X) = 0$$

$$(v) \quad \text{ind } A^*(X) = 0$$

証明 (i) $\Rightarrow$ (iv). $\dim X = 0$ とする。 $\dim \beta X = 0$.

Graev の定理 ([G]) より $\text{ind } F(\beta X) = 0$.

$F_n(\beta X)$ は compact ([G]) であるから $\dim F_n(X) = 0$.

$F_n^*(\beta X) \approx F_n(\beta X)$, $F^*(\beta X) = \bigcup_n F_n^*(\beta X)$. 従って $\dim F^*(\beta X) = 0$.

よって $\text{ind } F^*(\beta X) = 0$. 命題 5 より $\text{ind } F^*(X) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (v). 上と同様に証明できる。

(ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i). 命題 4 より。

(iv) $\Rightarrow$ (ii), (v) $\Rightarrow$ (iii). 定理 9 より。 $\square$

系 11 ([S] 4.3). 任意の precompact (Abelian) group G

に対し、ある precompact (Abelian) group H と、continuous,

onto, open, homomorphism $\pi: H \rightarrow G$ が存在して、

$\dim H = 0$, $w(H) = w(G)$ とつづ。

証明. D は $|D| = |G|$ かつ discrete space である.

$\xi: D \rightarrow G$ は 1 to 1, onto map である. $\tilde{\xi}: \beta D \rightarrow \beta G$ は ξ の extension である. $X = \tilde{\xi}^{-1}(G)$, $f = \tilde{\xi}|_X: X \rightarrow G$ である.

f は quotient map, かつ $\tilde{f}: F^*(X) \rightarrow G$ は open map.

定理 10 より, $\text{ind } F^*(X) = 0$.

定理 8 より, topological group H へ continuous homomorphisms

$g: F^*(X) \rightarrow H$, $\pi: H \rightarrow G$ が存在して $\tilde{f} = \pi \circ g$,

$H = g(F^*(X))$, $w(H) \leq w(G)$, $\text{ind } H = 0$ をみたす.

このとき, H は precompact, かつ $\dim H = 0$.

$\tilde{f}$ は open であるから π も open. かつ $w(G) \leq w(H)$. $\square$

上の系は, 次の事実と比べるとおもしろい.

" $\pi: H \rightarrow G$ が continuous, onto, homomorphism,

H (and G) が pseudocompact group ならば $\dim G \leq \dim H$."

つまり, pseudocompact group は precompact である.

4. Closed imbeddings into precompact groups preserving zero-dimensionality.

Complete metric space X で, $\text{ind } X = 0$ かつ $\dim X \neq 0$ ならば

るものがある ([R]). この X に対し, 定理 10 より $\text{ind } F^*(X) \neq 0$,
 $\text{ind } A^*(X) \neq 0$ である. よって $\text{ind } X = 0$ ならば $\text{ind } F^*(X) = 0$
 $(\text{ind } A^*(X) = 0)$ か? という質問は No である. また,
 free (Abelian) topological group に関する同様の質問も No
 である. 実際, Dowker space X ([D]) は, $F(X), (A(X))$
 上の $\mathcal{T}^* \subset \tilde{\mathcal{T}}$ なる任意の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ に対し,
 $\text{ind } (F(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0, (\text{ind } (A(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0)$ である ([S] 4.6).
 ところが, $F(X), (A(X))$ 上の group topology を くり直すこ
 とによって, 次のいえる.

定理 12 ([S] 5.1). $(X, \mathcal{T})$ を space, $\text{ind } X = 0$
 とする. このとき, $F(X)$ 上の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ で, 次を
 満たすものがある.

- i) $\tilde{\mathcal{T}}|_X = \mathcal{T}$
- ii) $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$ は precompact
- iii) $\omega(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = \omega(X, \mathcal{T})$
- iv) $\dim(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = 0$
- v) X は closed in $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$

$A(X)$ についても同様.

参考文献

- [S] D. B. Shakhmatov, Imbeddings into topological groups preserving dimensions, preprint.
- [B] V. K. Bel'nov, The dimension of topologically homogeneous spaces and free homogeneous spaces, Soviet Math. Dokl. 19 (1978) No. 1, 86-89.
- [Ad] J. F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Annals of Math. 72 (1960) 20-104.
- [G] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. matem. 12 (1948) 279-324.
- [A₁] A. V. Arhangel'skii, Algebraic objects generated by a topological structures, Itogi Nauki i Tekhniki, ser. Algebra, Topology, Geometry 25, 141-198.
- [A₂] A. V. Arhangel'skii, Any topological group is a factor group of a zero-dimensional topological groups, Soviet Math. Dokl., 23 (1981) No. 3, 615-619.
- [T₁] M. G. Tkačenko, On zerodimensional topological groups, Trans. Leningrad Intern. Top. Conference. 1982, 113-118.
- [T₂] M. G. Tkačenko, Factorization theorems for topological groups and their applications, Topol. Appl., to appear.

- [T₃] M.G. Tkačenko, Compactness type properties in topological groups,
Czech. Math. J. 38 (113) 1988 324-341.
- [Si] O.V. Sipachova, Zerodimensionality and completeness of free
topological groups, Serdica (1) 1989.
- [R] P. Roy, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans.
Amer. Math. Soc. 134 (1968) 117-132.
- [D] C.H. Dowker, Local dimension of normal spaces, Quart. J.
Math. Oxford, 6 (1955) 101-120.