

「熱の解析的理論」 熱方程式の導出に至る過程

明治大学付属中野八王子高等学校 西村重人 (Shigeto Nishimura)
Nakano-Hachioji Senior High School Attached to Meiji University

Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)は著書「熱の解析的理論」(“Théorie analytique de la chaleur”)の中で、熱方程式を導出し、これを解く過程で Fourier 展開公式を得た。私は前回の数学史研究集会において、Fourier がどのように Fourier 展開公式を導き、証明しようとしたかを報告したが、今回はこれに先立つ熱方程式の導出がどのようなにされたかを述べる。

「熱の解析的理論」は 433 項目から成り、9つの章に分けられているが、熱方程式の導出に関わる部分は第1章の後半から第2章にかけてである。

Fourier はまず、 F を z 軸方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する熱量、 K を固体の伝導度とするとき

$$F = -K \frac{dv}{dz}$$

が成り立つことを数学的に導いて証明しようとした。そこから斜めの直線方向、微小体での熱の流れについて考察を進め、熱伝導の法則を得て、これをもとに熱方程式を導く。以下はこの過程の要約である。なお、「」内は翻訳部分で太字は斜体で記されている部分を示す。また、図は Fourier によるものである。

1 熱の一樣な直線運動 (第1章, 第4節)

ここで Fourier が考察の対象としたのは、二つの平行な無限平面に挟まれた無限固体である。下側の無限平面 A は温度 a 、上側の無限平面 B は温度 b に保たれていると仮定し、 $a > b$ とする。この固体の温度が定常状態にあるとき、平面 A から平面 B へ向かう熱の直線的運動を考える。二平面は z 軸に垂直で、それらの距離を e とする。平面 A から距離 z にある平行面の温度 v が、一次方程式

$$v = a + \frac{b-a}{e}z$$

で表されれば、固体のどの点も温度変化しないことをつぎのように証明する。

固体内部にこれらの面と平行に二平面 A' 、 B' をとる。平面 A' は平面 B' の下側にあり、二平面の距離を ζ とする。平面 A' の下側に点 $m(x, y, z)$ 、上側に点 $m'(x', y', z')$ をとり、平面 B' の上下にも同様に点 $n(x, y, z + \zeta)$ と $n'(x', y', z' + \zeta)$ をとる。二点 m, m' の温度差は

$$\left(a + \frac{b-a}{e}z\right) - \left(a + \frac{b-a}{e}z'\right) = \frac{b-a}{e}(z - z')$$

また、二点 n, n' の温度差は

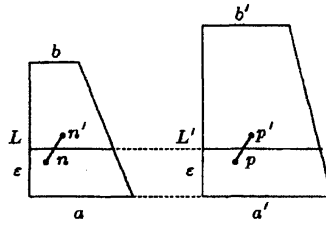
$$\left(a + \frac{b-a}{e}(z+\zeta)\right) - \left(a + \frac{b-a}{e}(z'+\zeta)\right) = \frac{b-a}{e}(z-z')$$

したがって、点 m が点 m' に送る熱量と点 n が点 n' に送る熱量は等しい。このことは面 A', B' を通して熱を伝えるすべての分子に対して成り立つので、二平面 A', B' に挟まれた部分はそれが失う熱と同じだけの熱を受け取ることになる。この結果は無限固体の任意の部分に適用されるので、この固体のいかなる部分も温度変化を起こさない。(項目 65)

つぎに、このような二つの無限固体を比較する。これらを固体 1, 固体 2 として

- 固体 1 : 下の無限平面の温度 a , 上の無限平面の温度 b , 二平面の距離 e , $a > b$
- 固体 2 : 下の無限平面の温度 a' , 上の無限平面の温度 b' , 二平面の距離 e' , $a' > b'$

とする。



固体 1, 固体 2 の温度の方程式はそれぞれ

$$v = a + \frac{b-a}{e}z$$

$$u = a' + \frac{b'-a'}{e'}z$$

で表される。固体 1 において、下の無限平面から高さ ε に平行な断面 L をとり、この面の下側に点 $n(x, y, z)$, 上側に点 $n'(x', y', z')$ をとる。また、固体 2 においても同様に、下の無限平面から高さ ε に平行な断面 L' をとり、この面の下側に点 $p(x, y, z)$, 上側に点 $p'(x', y', z')$ をとる。点 n, n', p, p' の温度を v, v', u, u' とする。点 n が点 n' に与える熱量と点 p が点 p' に与える熱量との比は、それらの温度差 $v - v'$ と $u - u'$ との比に等しいが

$$v - v' : u - u' = \frac{b-a}{e}(z-z') : \frac{b'-a'}{e'}(z-z')$$

$$= \frac{b-a}{e} : \frac{b'-a'}{e'}$$

となる。平面 L, L' を流れる熱の総量は平面の上下に置かれた二つの分子の同時作用によって生じるので比

$$\frac{b-a}{e} : \frac{b'-a'}{e'}$$

をもつ。よって断面 L, L' 上にとられた単位面積を単位時間に流れる熱量をそれぞれ F, F' とすると

$$F : F' = \frac{b-a}{e} : \frac{b'-a'}{e'}$$

を得る (項目 67).

固体 2 において

$$a' = 1(\text{沸騰する水の温度}), b' = 0(\text{融解する氷の温度}), e' = 1(\text{メートル})$$

として, 単位面積を通る熱量を K で表す. K は 1 キログラムの氷を水に変えるために必要な熱量を単位としている. このようにおいて

$$F = K \frac{a-b}{e}$$

すなわち

$$F = -K \frac{dv}{dz}$$

を得る (項目 68).

2 三次元での熱の様な運動について (第 1 章, 第 7 節)

直方体内部の点 (x, y, z) の温度 v が, 一次方程式

$$v = A + ax + by + cz$$

によって表された不均一な温度をもっていると, 外部原因がこの直方体の表面の温度をこの方程式によって表される温度に保っているとする.

まず, この直方体内の熱の流れが一樣であることを証明する. 直方体の内部に xy 平面と平行に平面 1 と平面 2 をとる. これら二平面の距離は b とする^{*1}. 平面 1 の下側に点 $m(x, y, z)$, 上側に点 $m'(x', y', z')$, 平面 2 の下側に点 $M(x, y, z + b)$, 上側に点 $M'(x', y', z' + b)$ をとり, 点 m, m', M, M' の温度をそれぞれ v, v', V, V' とすると

$$v - v' = A + a(x - x') + b(y - y') + c(z - z')$$

$$V - V' = A + a(x - x') + b(y - y') + c(z - z')$$

を得る. 瞬間 dt に点 m が点 m' に送る熱量は温度差 $v - v'$ に比例するから

$$q(v - v')dt$$

によって表される. q は距離 mm' と直方体を構成する物質の性質によって定まる定数である. 同様に瞬間 dt に点 M が点 M' に送る熱量は

$$q(V - V')dt$$

によって表される. $v - v' = V - V'$ だからこれらは等しく, したがって, 平面 1 を通る熱の総量は平面 2 を通る熱の総量に等しい. よって z 軸方向の流れは一樣である. 同様に x 軸方向, y 軸方向の流れについ

^{*1}方程式に含まれている b とは無関係である.

でも同様であることが示される (項目 93).

次に直方体の z 軸方向に流れる熱量が $-cK$ であることを示す. そのために, 二つの平行な無限平面に挟まれた無限固体における熱の流れとを比較する.

直方体内部に z 軸と垂直に平面 H をとり, この平面の下側に点 $m(x, y, z)$, 上側に二点 $\mu(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$, $\mu'(x-\alpha, y-\beta, z+\gamma)$ をとる. このとき, $m\mu = m\mu'$ である. 点 m, μ, μ' の温度をそれぞれ v, w, w' とする. 点 m が単位時間に点 μ に送る熱量は温度差 $v-w$ に依存するので

$$q(v-w)$$

で表される. また, 点 m が点 μ' に送る熱量は温度差 $v-w'$ に依存するので

$$q(v-w')$$

と表される. ここで, q は距離 $m\mu (= m\mu')$ と直方体を構成する物質の性質に依存する数である. 温度を表す方程式

$$v = A + ax + by + cz$$

により

$$v-w = -a\alpha - b\beta - c\gamma$$

$$v-w' = a\alpha + b\beta - c\gamma$$

であるから, 点 m の二点 μ, μ' に対する作用の和は

$$q(v-w) + q(v-w') = -2qc\gamma$$

である. 今度は, 二つの平行な無限平面に挟まれた無限固体において同じ考察をする. 二つの無限平面は z 軸に垂直であるとし, 温度の方程式を

$$v = A + cz$$

とする. 平面 H , 点 m, μ, μ' の座標, 温度は直方体にとられたときと同じとする. このとき

$$v-w = -c\gamma$$

$$v-w' = -c\gamma$$

であるから, 点 m の二点 μ, μ' に対する作用の和はやはり

$$q(v-w) + q(v-w') = -2qc\gamma$$

である. したがって, 直方体において平面 H にとられた単位面積を単位時間に流れる熱量と, 無限固体において同じ部分を単位時間に流れる熱量とは同じである (項目 94).

ところで, 無限固体において, 単位時間, 単位面積に流れる熱量は

$$-K \frac{dv}{dz} = -cK$$

であることがわかっているから、直方体内部に z 軸に垂直にとられた単位面積を単位時間に流れる熱量は $-cK$ である。 y 軸, x 軸に垂直な単位面積を単位時間に通る熱量も同様に考えてそれぞれ $-bK$, $-aK$ を得る (項目 95)。

3 固体の与えられた点での熱運動の量 (第 1 章, 第 8 節)

前節の結果を一般化して、固体の点 (x, y, z) の温度が

$$v = F(x, y, z, t)$$

で与えられるときも、 x 方向, y 方向, z 方向のそれぞれに垂直にとられた断面上の円 ω を時間 dt に通る熱量が

$$-K \frac{dv}{dx} \omega dt, \quad -K \frac{dv}{dy} \omega dt, \quad -K \frac{dv}{dz} \omega dt$$

であることを示す。

固体の点 $m(x', y', z')$ の温度を v' , これに限りなく隣接する点 $\mu(x' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta)$ の温度を w とすると

$$w = v' + \frac{dv'}{dx} \xi + \frac{dv'}{dy} \eta + \frac{dv'}{dz} \zeta$$

で表されるが、ここで、 $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}, \frac{dv'}{dz}$ は x, y, z, t の関数 $v, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ に x', y', z' を代入したものである。

点 m が微小な直方体に含まれると考え、この直方体の点の温度が一次方程式

$$w = A + a\xi + b\eta + c\zeta$$

によって表されると仮定する。直方体の表面は外部原因によってこの一次方程式によって与えられた温度に保たれていると仮定する。点 m を原点と考えたとき、直方体内部の点 (ξ, η, ζ) の温度が w である。こうしておいて、一次方程式の係数 A, a, b, c に微分方程式に含まれる量 $v', \frac{dv'}{dx}, \frac{dv'}{dy}, \frac{dv'}{dz}$ をとれば、この微小な直方体の状態は固体の状態とほぼ等しい。したがって、前の結果から x 方向, y 方向, z 方向のそれぞれに垂直にとられた断面上の円 ω を時間 dt に通る熱量はそれぞれ $-K \frac{dv}{dx} \omega dt, -K \frac{dv}{dy} \omega dt, -K \frac{dv}{dz} \omega dt$ である (項目 98)。

4 固体内部における熱の伝播の一般方程式 (第 2 章, 第 6 節)

この節ではここまで得られた結果を定理として整理して熱伝導の法則を述べ、最後に熱方程式を得る。

4.1 熱伝導の法則

「定理 I 六つの長方形に囲まれた均質な固体のさまざまな点が一次方程式

$$v = A - ax - by - cz \tag{a}$$

によって定められた現在温度をもち、この四角柱の境界を定める六つの平面の外側面に置かれた分子が、何らかの原因によって、方程式 (a) で表わされる温度に保たれているとすれば、物体内側にあるすべての分子はその現在温度を自身で保つ。したがって、四角柱の状態には何の変化も起こらない。 v は x, y, z を座標にもつ点の現在温度、 A, a, b, c は定数係数である。」

これは第 1 章第 7 節項目 93 ですでに述べたものだが、次のように、証明の方法が少し異なる。

固体内部に、同一直線上の三点 $m(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$, $M(x, y, z)$, $\mu(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$ をとり、それぞれの点の温度を v, w, u とすると

$$\begin{aligned} v &= A - ax - by - cz \\ w &= A - a(x+\alpha) - b(y+\beta) - c(z+\gamma) \\ u &= A - a(x-\alpha) - b(y-\beta) - c(z-\gamma) \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} v - w &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ u - v &= a\alpha + b\beta + c\gamma \end{aligned}$$

を得るから

$$v - w = u - v$$

したがって、点 M は点 μ に送る熱と同じだけの熱を点 m から受け取る。線分 $m\mu$ の長さ、方向がどうあってもこの結果は同じだから点 M が温度を変えることはない。また、他の点にも同様のことがいえるので、固体の状態には変化は起こらない (項目 132)。

第 1 章第 4 節で述べられた無限固体の場合は、この特別な場合として扱われる。

「系 I 固体が二つの平行な無限平面 A と B に挟まれているとき、固体のさまざまな点の現在温度が方程式 $v = 1 - z$ によって表わされると仮定する。また固体の境界を定める二平面は、何らかの原因によって、 A が温度 1 に、他方 B が温度 0 に保たれているとする。そのとき、この特殊な場合は $A = 1, a = 0, b = 0, c = 1$ とすれば前述の補題に含まれる。」 (項目 133)

「系 II もし、固体の境界を定める平面に平行な面 M を同じ固体内部に考えれば、単位時間にある熱量がこの平面を通して流れることに気づく。なぜなら、 m と n のように、その一方が平面の下、他方が上にある極めて隣接した二点が不均一に温められているからである。最初の点は、他方より温度が高いため、もう一つの点にある熱量を各瞬間に送らなければならない。この熱量は、物体の性質と二分子間の距離によって、極めて小さく、感じられないかもしれない。平面によって隔てられた別の任意の二点についても同様である。温められた方の点はある熱量を他方に送るので、これら部分的作用の和、すなわち平面を通して送られる熱の総量は連続的な熱流束を形成する。この熱流束の値は、すべての分子がその温度を保っているため、変化しない。この熱流束、すなわち平面 M を単位時間に通る熱量が、この面に平行な別の平面 N を同じ時間に通る量に等しいことを証明するのは容易である。」 (項目 134)

第 1 章第 7 節項目 94 はつぎの定理にまとめられる。

「定理Ⅱ 四角柱において、その一定温度が方程式

$$v = A - ax - by - cz$$

によって表わされ、その境界を定める六つの長方形のすべての点が前の方程式によって定められた温度に保たれていれば、 z に垂直な任意の中間面にとられた単位面積を単位時間に通る熱量は、二つの平行な無限平面に挟まれた同じ物質の固体内における一定の熱流束に等しい。この固体に対する一定温度の方程式は

$$v = c - cz$$

である。」(項目 137)

証明は項目 94 とほぼ同じである。さらに項目 95 はこの定理の系として述べられる。

「系 無限固体における熱流束は、熱が通る平面部分が単位面積のとき、値 cK をもつ。それゆえ、その熱流束は四角柱においても同じ値 cK 、すなわち $-K \frac{dv}{dz}$ をもつ。

同様にして、同じ四角柱において y 軸に垂直な任意の平面上の単位面積を通して単位時間に生じる一定の熱流束は bK 、すなわち $-K \frac{dv}{dy}$ に等しいこと、 x 軸に垂直な平面を通る熱流束は値 aK 、すなわち $-K \frac{dv}{dx}$ をもつことが示される。」(項目 138)

第 1 章第 8 節は

「定理Ⅲ 固体の点の温度が方程式

$$v = f(x, y, z, t)$$

によって表わされるとする。この式で x, y, z は分子の座標で、 t 時間経過後にその温度は v に等しい。固体の中で、三つの座標軸の一つに垂直にとられた平面の一部分を通る熱流束はもはや一定ではない。その値は平面のさまざまな部分で異なり、時間によっても変化する。この変化する量は計算によって定めることができる。

ω を限りなく小さな円として、その中心は点 m に一致し、その面は鉛直座標 z に垂直であるとしよう。円を含む面より下側の固体部分から上側部分に移る熱のうち、ある量がこの円を通して瞬間 dt に流れる。この熱流束は小さな面 ω の一点を通して、下の点を発して上の点に達するすべての放射熱から成る。この熱流束の値が式 $-K \frac{dv}{dz} \omega dt$ をもつことをこれから証明しよう。」

と書かれているが、証明は前とほとんど同じである。さらに固体内部に直線を引き、この直線上の点の温度を表す曲線を描いて、つぎの重要な系を述べる。

「系 この曲線の横座標、すなわち直線上の点 p から定点 o への距離を ϵ によって表し、点 p の温度を表わす縦座標を v によって表わせば、 v は距離 ϵ とともに変化するので、この距離に関するある関数 $f(\epsilon)$ である。点 p に直線と垂直に置かれた円 ω を通って流れる熱量は

$$-K \frac{dv}{d\epsilon} \omega dt \quad \text{すなわち} \quad -K f'(\epsilon) \omega dt$$

である。ここで関数 $\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}$ を $f'(\epsilon)$ で表している。

この結果に次の表現を与えよう。それは応用を容易にする。

分子の作用によって温度変化する固体内にとられた直線上の点 p において、現在の熱流束を知るために

は、点 p に極めて隣接する二点の温度差をこれらの点の距離で割らなければならない。熱流束はその商に比例する。」(項目 141)

このようにして、熱伝導の法則をまとめた上で、熱量保存の法則と、物質は比熱に比例して温度を保持することを暗黙に使う、熱伝導の方程式と表面に関する方程式を導いていく。

4.2 熱伝導方程式の導出

「定理IV 任意の形の均質な固体のさまざまな点が、分子の相互作用の効果によって次第に変化する初期温度を受けたと仮定し、固体の連続的に変化する状態を方程式

$$v = f(x, y, z, t)$$

が表すと仮定しよう。四変数関数 v は方程式

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right)$$

を必然的に満たさなければならない。」

この証明はつぎのようになされている。

x 軸, y 軸, z 軸に垂直な六平面に囲まれた直方体で考える。

直方体の対角線の二点を $m(x, y, z)$, $m'(x + dx, y + dy, z + dz)$ とする。

z 軸方向で、この直方体に下側面から入る熱と上側面から出る熱量はそれぞれ

$$\begin{aligned} & -K \frac{dv}{dz} dx dy dt \\ & -K \frac{dv}{dz} dx dy dt - K \frac{d\left(\frac{dv}{dz}\right)}{dz} dx dy dz dt \end{aligned}$$

である。同様に y 軸方向で考えると入る熱量、出る熱量はそれぞれ

$$\begin{aligned} & -K \frac{dv}{dy} dx dz dt \\ & -K \frac{dv}{dy} dx dz dt - K \frac{d\left(\frac{dv}{dy}\right)}{dy} dx dy dz dt \end{aligned}$$

で、 x 軸方向でも同様にそれらは

$$\begin{aligned} & -K \frac{dv}{dx} dy dz dt \\ & -K \frac{dv}{dx} dy dz dt - K \frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} dx dy dz dt \end{aligned}$$

である。直方体に入る熱の総量と出て行く熱の総量の差をとって

$$K \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) dx dy dz dt$$

これを $CDdxdydz$ (C は比熱, D は密度) で割って, 熱伝導方程式

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right)$$

を得る (項目 142).

5 表面に関する一般方程式 (第 2 章, 第 7 節)

最後に, 固体の熱が一定温度 0 の空気中に散る場合を考察して, 表面に関する一般方程式, すなわち, 境界条件について述べている.

ω (面積) : 固体外側の限りなく小さな部分

$\mu(x, y, z)$: 面 ω を通る法線と ω との交点.

v : 点 μ の温度

$\nu(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$: 法線上にとられた固体の点.

w : ν の温度

α : μ と ν の距離 (限りなく小さい)

として, 固体表面の方程式を

$$f(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

とおく. 固体の温度の一般方程式を

$$v = \varphi(x, y, z, t)$$

とする. (1) を微分すると

$$mdx + ndy + pdz = 0 \quad (2)$$

ここで, m, n, p は x, y, z の関数である.

K は固体の伝導度とすると, ω を瞬間 dt に通る熱量は定理 III の系 (項目 141) から

$$-K \frac{w - v}{\alpha} \omega dt$$

また, h を空気に対する伝導度とすると ω が瞬間 dt に空気中に逃がす熱量は

$$hv\omega dt$$

なので

$$hv\omega dt = -K \frac{w - v}{\alpha} \omega dt \quad (3)$$

$$w = v + dv = v + \frac{dv}{dx}\delta x + \frac{dv}{dy}\delta y + \frac{dv}{dz}\delta z \quad (4)$$

だが, (2) の m, n, p を用いて

$$\delta x = \frac{m}{p}\delta z, \quad \delta y = \frac{n}{p}\delta z$$

と表されるので (4) は

$$w - v = \frac{1}{p} \left(m \frac{dv}{dx} + n \frac{dv}{dy} + p \frac{dv}{dz} \right) \delta z \quad (5)$$

また

$$\alpha = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = \frac{1}{p}(m^2 + n^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}\delta z$$

だから, $q = (m^2 + n^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ とおけば

$$\alpha = \frac{q}{p}\delta z$$

となるので (5) に代入して

$$\frac{w - v}{\alpha} = \left(m \frac{dv}{dx} + n \frac{dv}{dy} + p \frac{dv}{dz} \right) \frac{1}{q}$$

これを (3) に代入して整理すれば

$$m \frac{dv}{dx} + n \frac{dv}{dy} + p \frac{dv}{dz} + \frac{h}{K} v q = 0$$

を得る (項目 146, 147). これは現在, 第 3 種境界値条件といわれているものである.