

$\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) / \log p_n$  の評価について

名大理・数 小林功武

いわゆる素数の small difference について述べる。たゞ、細部を完成させていないし、最終的の面倒な数値計算もまだ実行していない云々は私的な覚書であることに少し気がさすが、元々筆者自身は問題の理論的側面に興味を重点を置いて来たので、その点に関しては大略説明しておいたつもりである。必要最小限の文献は末尾に挙げておいた。特に Huxley のは、筆者の講演後に出た最新の文献であるが、我々の立場からして興味深い論文であるから、一読をお勧めしたい。

$p_1, p_2, \dots$  は素数を増加順に並べた列とし、

$$E = \liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n) / \log p_n$$

で  $E$  を定義する。  $E$  上からの評価を問題にするとき、現今普通に用いられる方法では、以下の二定理に基礎を置くのである。

$N$  を大きい正数として

$$Z(N; 2n) = \sum_{\substack{N/\log N < p, p' \leq N \\ p-p'=2n}} (\log p)(\log p') \quad (0 < n \in \mathbb{Z})$$

とおく; たゞし, ここでも以下においても文字  $p$  は素数を表わすものとする.

$$T(\alpha) = t(0) + 2 \sum_{n=1}^k t(n) \cos 2\pi n\alpha$$

を, 負でない実係数を有し, 恒等的に 0 でなく, 常に  $T(\alpha) \geq 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) なる cosine polynomial とするとき

[定理 A]  $C > 0$  を絶対定数,  $k < (\log N)^C$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $N > N_0(\varepsilon)$  ならば,

$$\sum_{n=1}^k t(n) Z(N; 2n) > 2N \sum_{n=1}^k t(n) H(n) - \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) t(0) N \log N,$$

たゞし

$$H(n) = \prod_{\substack{p > 2 \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

[定理 B] 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $N > N_1(\varepsilon)$  ならば

$$Z(N; 2n) < (8 + \varepsilon) H(n) N, \quad (n=1, 2, \dots)$$

さて,  $a > 0$ ,  $0 < c < 1$  なる定数  $a, c$  をとって,  $k = [a \log N]$ ,  $h = [ca \log N]$  とおき,  $Z(N; 2n) = 0$  ( $n=1, 2, \dots, h$ ) と仮定すると, 定理 A, B から

$$(8 + \varepsilon) N \sum_{n=h+1}^k t(n) H(n) > 2N \sum_{n=1}^k t(n) H(n) - \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) t(0) N \log N,$$

$$(1) \quad \left(\frac{1}{32} + \frac{\varepsilon}{4}\right) k/a > \frac{1}{4} \sum_{n=1}^k t(n) H(n) - \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) \sum_{n=k+1}^k t(n) H(n)$$

を得る。そこで、いま、 $\mathcal{F}$  を区間  $[0, 1]$  上の有界変動関数  $\varphi$  で  $\varphi \geq 0$ ,  $\int_0^1 \varphi dt > 0$  を満たすもの全体の成す関数族とし、 $\mathcal{T}(\alpha)$  として、 $\varphi \in \mathcal{F}$  によって

$$t(n) = \sum_{j=n}^k \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{j}{k}\right) \varphi\left(\frac{j-n}{k}\right)$$

で与えられるもの  $\varepsilon$  とする。すると

$$t(n) = \psi(n/k) + O(1/k), \quad \text{ただし} \quad \psi(t) = \int_t^1 \varphi(u) \varphi(u-t) du,$$

$$\sum_{n=1}^k H(n) \psi(n/k) = k \int_0^{1/k} \psi(t) dt + o(k), \quad (1 \leq l \leq k)$$

などから、(1)より

$$(2) \quad \left(\frac{1}{32} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \psi(0) a^{-1} > \frac{1}{4} \int_0^1 \psi(t) dt - \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) \int_c^1 \psi(t) dt$$

が出る。故に、予め  $a, c, \varphi$  が

$$\frac{1}{32} \psi(0) a^{-1} < \frac{1}{4} \int_0^1 \psi(t) dt - \int_c^1 \psi(t) dt,$$

即ち

$$(3) \quad \frac{1}{4} \int_0^1 \psi(t) dt - \int_c^1 \psi(t) dt > 0,$$

$$\frac{1}{32} \psi(0) \left( \frac{1}{4} \int_0^1 \psi(t) dt - \int_c^1 \psi(t) dt \right)^{-1} < a$$

を満たすようにとってあったとすれば (2) は不合理であり、十分大きい  $N$  に対し

$$Z(N; 2n) > 0, \quad 1 \leq n \leq ca \log N$$

なる  $n$  が存在する；よって特に評価

$$(4) \quad E \leq \frac{1}{16} \psi(0) \frac{c}{\frac{1}{4} \int_0^1 \psi dt - \int_c^1 \psi dt}$$

を得る。(3), (4) を  $\varphi$  で表わすことにより, 先づ次の主張が得られた:

[主張1]  $\varphi \in \mathcal{F}$ ,

$$(5) \quad \frac{1}{8} \left( \int_0^1 \varphi dt \right)^2 - \int_c^1 \varphi(t) dt \int_c^t \varphi(u-c) du > 0, \quad (0 < c < 1)$$

である限り,

$$(6) \quad E \leq \frac{1}{16} \left( \int_0^1 \varphi^2 dt \right) \frac{c}{\frac{1}{8} \left( \int_0^1 \varphi dt \right)^2 - \int_c^1 \varphi(t) dt \int_c^t \varphi(u-c) du}.$$

$\varphi$  を固定するとき, (5) を満たす  $c$  の中  $(6)$  の右辺を最小にする値が存在する. これを改めて  $c$  とするとき

$$(7) \quad \int_c^1 \varphi(t) \varphi(t-c) dt > 0$$

$$(8) \quad \int_c^1 \varphi(t) (c \varphi(t-c) + \int_c^t \varphi(u-c) du) dt = \frac{1}{8} \left( \int_0^1 \varphi(t) dt \right)^2$$

が成立して

$$(9) \quad E \leq \frac{1}{16} \frac{\int_0^1 \varphi(t)^2 dt}{\int_c^1 \varphi(t) \varphi(t-c) dt}$$

と押えられる.

逆に,  $c \in (0, 1)$  を任意にとりて固定するとき, 条件 (7), (8) を満たす  $\varphi \in \mathcal{F}$  の中  $(9)$  の右辺を最小にするものが存在することは, いわゆる Helly の選出定理によって容易に証明されるが, この極値的の  $\varphi$  に対し (9) が成立する.

それ故, いま,  $c \in (\frac{1}{2}, 1)$  を parameter とし, (7), (8) を

✕

充たし, かつ (7) の右辺を最小ならしめる  $\varphi \in \mathcal{F}$  の集合  $\mathcal{F}_c$  の代表要素を勝手に一つ取って  $\varphi_c$  とし

$$(10) \quad E \leq \inf_{c \in (\frac{1}{2}, 1)} \frac{1}{16} \frac{\int_0^1 \varphi_c(t)^2 dt}{\int_c^1 \varphi_c(t) \varphi_c(t-c) dt} = E_0, \text{ say,}$$

と評価するとき, 次の主張を得る:

[主張2] 一つの  $\varphi \in \mathcal{F}$  に対し, (5) を満足し, (6) の右辺を最小にする  $c$  の値の中  $\frac{1}{2}$  より大きいものが存在するならば, このような  $\varphi$  を用いる限り, (6) から出る評価は, 評価 (10) より決して良くはない.

$E_0$  を求める為に,  $\mathcal{F}_c$  から具体的な代表関数を取り出したい訳である. そこで次の仮設を置く:

[仮設1]  $\mathcal{F}_c$  の代表要素として,  $\inf_{t \in [0, 1]} \varphi_c(t) > 0$  なる  $\varphi_c$  を取ることができる.

(恐らく, 肯定的証明がそう困難なく得られるであらう. もしも誤りであるとする, 我々の問題はななり厭わしい杯相を帯びて来る!)

$\mathcal{F}$  を  $(0, 1)$  上 2 乗可積分な実値関数全体が通常の内積(,)

で成す Hilbert 空間とし,  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  ( $\psi_0 = \sqrt{1-c}$ ) を  $\mathcal{H}$  に於ける一つの完全正規直交系で, 各  $\psi_n$  が有界変動なるものとする.  
 $\mathcal{H}$  上の有界線型作用素  $T$  を

$$(Tf)(t) = cf(t) + \int_c^t f(u) du$$

により定義する.

[補題]  $f$  は  $[c, 1]$  上の有界変動非負値関数であるとする.  
 非負実数  $\beta'$  と  $[c, 1]$  上の有界変動非負値関数  $g'$  の対  $(\beta', g')$  で  
 条件  $(f, g') > 0$ ,  $(Tf, g') = \frac{1}{8} ((f, 1) + (2c-1)\beta' + (g', 1))^2$  を  
 満たすものの中から,

$$\frac{(f, f) + (2c-1)\beta'^2 + (g', g')}{(f, g')}$$

を最小ならしめる対  $(\beta, g)$  で  $\inf_{t \in [c, 1]} g(t) > 0$  を満たすものが存在するならば,  $\beta > 0$  であり,  $g$  は

$$g = \lambda f + \eta Tf + \beta$$

の形である. 尤もし

$$2\lambda = \frac{(f, f) + (2c-1)\beta^2 + (g, g)}{(f, g)},$$

$$\eta \frac{U}{4} + \beta = 0, \quad U = (f, 1) + (2c-1)\beta + (g, 1).$$

証明は:  $f, Tf, g', g$  を  $\{\psi_n\}$  につき Fourier 展開する;

$g' = \sum x_n' \psi_n$ ,  $g = \sum x_n \psi_n$  とおき,  $\beta'$  を点  $\{x_n'\}$  ( $x_n'$  は独立変数とみなすことができる) の関数とみて  $(\partial \beta' / \partial x_n')_{x_n' = x_n}$  を条件  $(Tf, g') = \frac{1}{8} ( (f, 1) + \dots )^2$  から求めて

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_n'} \frac{(f, f) + (2c-1)\beta'^2 + (g', g')}{(f, g')} \right)_{x_n' = x_n} = 0$$

に代入すると  $g$  の形が判る;  $\beta > 0$  は,  $\beta = 0$  とすると  $f = 0$  が出て  $(f, g) > 0$  に矛盾するから ..... という風にやると最も手取り早いようである.

さて, 仮設 1 を満足する  $\varphi_c \in \mathcal{F}_c$  をとる. すぐ判るように制限  $\varphi_c|_{(1-c, c)} = \beta$  (定数関数) としてよい.  $[c, 1]$  上の関数  $f, g$  を

$$f(t) = \varphi_c(t-c), \quad g(t) = \varphi_c(t)$$

で与えると,  $f, (\beta, g)$  は補題の条件を満たす; 補題における  $T$  は任意の作用素でも良いから,  $f, g$  を入れ替え,  $T$  の代りに  $T^*$  ( $T$  の共役作用素) としても適用できるから, 結局,  $f, \beta, g$  即ち  $\varphi_c$  を求める条件:

$$(!) \begin{cases} g(t) = (\lambda + \eta c) f(t) + \eta \int_c^t f(u) du + \beta, \quad f(t) = (\lambda + \eta c) g(t) + \eta \int_t^1 g(u) du + \beta, \\ V = (f, 1) + (2c-1)\beta + (g, 1), \quad \eta \frac{V}{4} + \beta = 0, \quad \beta > 0, \\ (f, f) + (2c-1)\beta^2 + (g, g) = 2\lambda(f, g), \\ \inf_{t \in [c, 1]} f(t) > 0, \quad \inf_{t \in [c, 1]} g(t) > 0 \end{cases}$$

が得られる.  $(Tf, g) = \frac{1}{8} V^2$  は (!) から自づと出るのだから

いてある.) かくて,  $f, g$  は共に微分方程式

$$\{1 - (\lambda + \gamma c)^2\} y'' + \gamma^2 y = 0$$

の解としてよい.  $(\lambda + \gamma c)^2 \neq 1$  は明らかだが,  $(\lambda + \gamma c)^2 \geq 1$  が  
おぐには分らないから, 取り敢えず仮定しよう:

[仮設2]  $1 - (\lambda + \gamma c)^2 > 0.$

そこで,  $\omega = -\gamma / \sqrt{1 - (\lambda + \gamma c)^2}$  とおくと

$$f(t) = \sin(\omega t + \mu), \quad g(t) = \sin(\omega t + \nu)$$

の形になる. これで問題は原理的には解けた訳で, 後は (!)  
を言い換えて行けば宜しい. 結論は次の通り:

[主張3] 仮設1, 2 の下で,  $E_0$  は次のように求めら  
れる:

$$(\#) \begin{cases} x + \frac{2 \cos x}{\sin \theta + \sin x} - \frac{x \sin(\theta - x) + \cos x (\cos x - \cos \theta)}{2x \cos(\theta - x) + \sin 2x} = 0, \\ 0 < x < \pi/2, \quad x < \theta < \pi - x \end{cases}$$

を満たす対  $(x, \theta)$  に対し,

$$(11) \quad y = x + \frac{2 \cos x}{\sin \theta + \sin x},$$

$$(12) \quad \lambda = \cos(x - \theta) - 2y \sin(x - \theta)$$

とおく.  $(x, \theta)$  を動かしたときの  $\lambda$  の下限を  $\lambda_0$  とすれば

f

$$E_0 = \frac{1}{8} \lambda_0.$$

である。また、仮設 1, 2 の真偽に拘らず、(H) を満たす  $(x, \theta)$  より (11) で  $y$  を定め (12) から得られる  $\lambda$  によつて、とにかく正しい評価ではあるところの

$$E \leq \frac{1}{8} \lambda$$

が得られる。

尤も、実際に  $\lambda_0$ 、或は一つの  $\lambda$  の値を求めるとなると — 計算器を使わない訳には行くまい！

## 文 献

E. Bombieri - H. Davenport : Proc. Royal Soc. Ser. A, Math. & Phys. Sci. (London) 293 (1966), 1-18.

M. N. Huxley : Mathematika, 20 (1973), 229-232.

Г. З. Пильтай : Исслед. теор. чисел, Саратов 4 (1972), 73-77.