

Some more characterizations of Pettis sets

静岡大学 理 松田 稔 (Minoru Matsuda)

§1. 序. この報告は、先に [6] において我々によりその様々な特徴付けが紹介されたペッティス集合 (Pettis sets) に関し、最近 [8]、[9] で得られた更なる特徴付けを述べることを主たる目的として構成されたもので、前報告の続論的、補足的な意味を持つものである。X を実バナッハ空間、その共役を X^* とし、 $B(X)$ は X の閉単位球を表すことにする。 (I, Λ, λ) は $I (= [0, 1])$ 上のルベーグ測度空間とし、以後 I 上には常に Λ と λ が備わっているものとする。その時、 $\Lambda^+ = \{ E \in \Lambda : \lambda(E) > 0 \}$ とし、各 $E \in \Lambda^+$ について、 $\Delta(E) = \{ \chi_A / \lambda(A) : A \subset E, A \in \Lambda^+ \}$ とする。又、各 $g \in L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ と $E \in \Lambda^+$ について、 $\text{ess-o}(g|E)$ で g の E 上での関数としての本質的振幅を表す、即ち、 $\text{ess-o}(g|E) = \text{ess-sup } g(E) - \text{ess-inf } g(E)$ である。その時明らかに、 $\text{ess-o}(g|E) = \sup \{ \int_I (g_1 - g_2)g \, d\lambda : g_1, g_2 \in \Delta(E) \}$ が成り立つことを注意しよう。

次に、 $f : I \rightarrow X$ (resp. X^*) が弱 (resp. 弱*)可測であるとは各 $x^* \in X^*$ (resp. $x \in X$) について $(x^*, f(t))$ (resp. $(x, f(t))$) が λ に関して可測であることをいい、 $f : I \rightarrow X^*$ が各 $x \in X$ について $(x, f(t)) = 0$ λ -a.e. を満たす時、f は λ -weak* scalarly null であるという。弱可測関数 $f : I \rightarrow X$ がペッティス可積分であるとは $(x^*, f(t)) \in L_1(I, \Lambda, \lambda)$ (各 $x^* \in X^*$) で、各 $E \in \Lambda$ に対し $x_E \in X$ が存在して $(x^*, x_E) = \int_E (x^*, f(t)) \, d\lambda(t)$, $\forall x^* \in X^*$, が満たされることをいう。ベクトル値測度 $\alpha : \Lambda \rightarrow X$ が λ に関しペッティス可積分関数 $f : I \rightarrow X$ を Pettis derivative として持つとは、 $(x^*, \alpha(E)) = \int_E (x^*, f(t)) \, d\lambda(t)$ が各 $x^* \in X^*$ と各 $E \in \Lambda$ に対し成立することをいう。もし、K を X^* の弱*コンパクト集合とする時、弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ について $T_f(x) = x \circ f$ ($x \in X$) により、 $T_f : X \rightarrow L_1(I, \Lambda, \lambda)$ の有界線形写像が得られる。この共役作用素を、 $T_f^* : (L_\infty(I, \Lambda, \lambda) \rightarrow X^*)$ と表すならば $T_f^*(\chi_E) \in \lambda(E) \cdot \overline{\text{co}}^*(K)$ (K の弱*閉凸包), $\forall E \in \Lambda$ が成り立つ。明らかに、この作用素 T_f^* は、有界線形作用素 $S_f : L_1(I, \Lambda, \lambda) \rightarrow X^*$ s.t. $S_f(\chi_E) \in \lambda(E) \cdot \overline{\text{co}}^*(K)$ ($\forall E \in \Lambda$) に唯一通りに拡張される。

更に、 $\{I(n, i)\}$ ($n \geq 0, 0 \leq i \leq 2^n - 1$) は $I(n, i) = [i/2^n, (i+1)/2^n)$ (但し、 $n \geq 1, 0 \leq i \leq 2^n - 2$), $I(n, 2^n - 1) = [(2^n - 1)/2^n, 1]$ ($n \geq 0$) により定義される I の区間列であり、 Λ_n ($n \geq 1$) は $\Pi_n = \{ I(n-1, i) : 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1 \}$ で生成される σ -algebra とする時、弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ に対して、各 $t \in I$ で

$$f_n(t) = \sum_{E \in \Pi_n} (T_f^*(\chi_E) / \lambda(E)) \chi_E(t)$$

として定義される $f_n : I \rightarrow X^*$ について、 $(f_n, \Lambda_n)_{n \geq 1}$ はマーチンゲールとなり、これを f に対応するマーチンゲールと呼ぶ。

さて、共役空間 X^* の弱*コンパクト凸集合に関する弱ラドン-ニコディム性（このような集合は、weak Radon-Nikodym set と呼ばれる）の一般概念として、M. Talagrand[13] により凸性のない弱*コンパクト集合に関して次の概念が定義されている。以後 X^* の弱*コンパクト集合上には弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ が備わっているとする。

定義 1. X^* の弱*コンパクト集合 K が Pettis set であるとは、 $\forall x^{**} \in X^{**}$ が K 上で universally measurable である時をいう。

その時、L.H. Riddle and E. Saab[11] や M. Talagrand[13] により与えられた次の特徴付け： K が Pettis set $\Leftrightarrow \overline{co}^*(K)$ が weak Radon-Nikodym (WRN) set $\Leftrightarrow B(X)$ の任意の点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ は K 上の各点で収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ を持つ、を注意しよう。これらの結果と、 K が non-Pettis set である時 [13] で用いられた論法を注意深く参考にすることにより、[5] で一層明確に構成された弱*可測関数 $h : I \rightarrow K$ を利用することにより我々は [5], [7] で次の新たな特徴付けを与えている。

定理 A. X^* の弱*コンパクト集合 K について、次の各陳述は同値である。

- (a) K は Pettis set.
- (b) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\{T_f^*(\chi_E) / \lambda(E) : E \in \Lambda^+\}$ は δ -Rademacher を含まない。
- (c) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\inf \{ \|f_n - f_{n+1}\|_P : n \geq 1 \} = 0$ が成り立つ。

本報告では、J. Bourgain[2] あるいは N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer[3] において定義された次の諸概念との関係で、Pettis sets の更なる新たな特徴付けが、前述の弱*可測関数 h を再び効果的に利用することで与えられることを注意しよう。

定義 2 ([2]). I 上で定義された実数値関数の族 Φ が Bourgain property を持つとは、 Φ が次の性質を満たすことをいう。

任意の集合 $E \in \Lambda^+$ と任意の正数 ε に対して、 $E_1, \dots, E_n \in \Lambda^+$ s.t. $E_i \subset E$ ($1 \leq i \leq n$) が存在して、 Φ の各関数 g について $\inf \{ o(g|E_i) : 1 \leq i \leq n \} < \varepsilon$

が成り立つ。但し、 $o(g|E_i)$ は g の E_i 上での振幅を表す。

特に、弱*可測関数 $f : I \rightarrow X^*$ が Bourgain property を持つとは 実数値関数の族 $\Phi = \{ x \circ f : x \in B(X) \}$ が Bourgain property を持つことをいう。

定義 3 ([3]). $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ の部分集合 Ψ が λ に関し Bourgain's condition を持つとは、 Ψ が次の性質を満たすことをいう。

任意の集合 $E \in \Lambda^+$ と任意の正数 ε に対して、 $E_1, \dots, E_n \in \Lambda^+$ s.t. $E_i \subset E$ ($1 \leq i \leq n$) が存在して、 Ψ の各関数 g について $\inf \{ \text{ess-}o(g|E_i) : 1 \leq i \leq n \} < \varepsilon$ が成り立つ。

定義 4 ([3]). $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ の部分集合 Ψ が λ に関する set of small oscillation であるとは、 Ψ が次の性質を満たすことをいう。

任意の正数 ε に対して、 I の finite measurable partition Π が存在して、

$$\sum_{E \in \Pi} \lambda(E) \cdot \text{ess-}o(g|E) < \varepsilon$$

が各 $g \in \Psi$ について成り立つ。

定義 5 ([3]). 有界線形作用素 $T : L_1(I, \Lambda, \lambda) \rightarrow X$ が strongly regular とは T が次の性質を満たすことをいう。

$L_1(I, \Lambda, \lambda)$ の任意の有界集合 D と正数 ε に対して、 D の relatively weakly open subset U を適当にとれば、 $\text{diam}(T(U)) < \varepsilon$ とできる。

定理. X^* の弱*コンパクト集合 K に関する次の各陳述は同値である。

- (a) K は Pettis set.
- (b) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\theta(f)$ は Bourgain property を持つ。
- (c) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\{ x \circ f_n : n \geq 1, x \in B(X) \}$ は Bourgain property を持つ。
- (d) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、Bourgain property を持つ弱*可測関数 g と λ -weak* scalarly null である関数 k が存在して $f = g + k$ と表せる。
- (e) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\{ x \circ f : x \in B(X) \}$ は λ に関して Bourgain's condition を持つ。
- (f) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\{ x \circ f : x \in B(X) \}$ は λ に関する set of small oscillation である。
- (g) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $S_f : L_1(I, \Lambda, \lambda) \rightarrow X^*$ は strongly regular な有界線形作用素である。

ここで、陳述 (b) において与えられている関数 $\theta(f)$ は、 f に対応して構成される弱*可測関数であり、詳細は §2 で述べられる。

陳述 (a) と (c) の同値性は L.H. Riddle and E. Saab[11] の結果に示唆されたものであり、(a) の (e) による特徴付けは (a) の (c) によるものの再解釈と考えられるものであるが、§3 での例において注意されるように (a) と次の陳述 (h) の同値性は成立しない。

(h) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 f は Bourgain property を持つ。

更に、(a) と (f) の同値性は (a) と (e) のそれと、[3] の Proposition IV.8 から即従うものである。又、(a) と (g) の同値性は、[3] の Theorem VI.16 (WRN sets の特徴付け) の陳述 (a) と (b) のそれが、Pettis sets の場合にこのような形で実現され得ることを示している。

この定理に関し我々が強調したい点は、 K が non-Pettis set である時 [5] で構成された弱*可測関数 $h : I \rightarrow K$ が、実は次の性質を持った K -値関数であることが示されることである。

- (i) $\{x \circ h_n : n \geq 1, x \in B(X)\}$ が Bourgain property を持たない。
- (ii) $\{x \circ h : x \in B(X)\}$ が λ に関して Bourgain's condition を持たない。
- (iii) $\{x \circ h : x \in B(X)\}$ が λ に関する set of small oscillation ではない。
- (iv) 有界線形作用素 $S_h : L_1(I, \Lambda, \lambda) \rightarrow X^*$ は strongly regular ではない。

このように、 K -値関数 h は本定理において重要な役割を持つので、§2 でその構成の概略を注意しよう。

§2. 準備. ここでは、定理の証明の過程で必要とされる概念や事実を準備しよう。まず、上記の関数 $\theta(f)$ について注意しよう。そのために、 $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ 上の lifting ℓ の定義と lifting theory から生ずる基本的な事柄について思い起こそう。 $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ の lifting ℓ とは、 $L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ から $M(I, \Lambda, \lambda)$ (the set of all bounded Lebesgue measurable functions on I) への線形、乗法的、正值写像で $\ell(1) = 1$ 且つ、各 $f \in L_\infty(I, \Lambda, \lambda)$ に対し $\ell(f) \equiv f$ (即ち、 $\ell(f) = f$ λ -a.e.) を満たすものである。(I, Λ , λ) 上には、そのような lifting ℓ が存在する。各 $A \in \Lambda$ について、 $\ell(\chi_A)$ は Λ に属する唯一つの集合の特性関数になるから、その集合を又 $\ell(A)$ と表すことにする。即ち、 $\chi_{\ell(A)} = \ell(\chi_A)$ が各 $A \in \Lambda$ について成り立つ。このようにして得られた写像 ℓ (これも lifting と言われる) : $\Lambda \rightarrow \Lambda$ は、(1) $\ell(A) \equiv A$, (2) $\ell(A) = \ell(B)$ if $A \equiv B$, (3) $\ell(I) = I$, $\ell(\phi) = \phi$, (4) $\ell(A \cap B) = \ell(A) \cap \ell(B)$, 且つ (5) $\ell(A \cup B) = \ell(A) \cup \ell(B)$ を満たす。

さて、 X^* の弱*コンパクト集合 K と弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ が与えられた時、我々は lifting theory の利用により、弱*可測関数 $\theta(f) : I \rightarrow \overline{\text{co}}^*(K)$ で各 $x \in X$ と $t \in I$ について $(x, \theta(f)(t)) = \ell(x \circ f)(t)$ を満たすものを得る。よって $f - \theta(f)$

は λ -weak* scalarly null である。更に、この時、lifting ℓ の性質の効果的利用により、次の補題 1 が得られる (Lemma 1 in [8] を参照)。これは、 f に比べて $\theta(f)$ がより良い性質を持っていることの一端を表している (但し、K. Musiał[10] は、この事柄をより一般的設定で、Proposition 2 and its Corollary において与えている)。

補題 1. X^* の弱*コンパクト集合 K が Pettis set である時、 $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\theta(f)$ は Bourgain property を持つ。

次に、関数 h の構成の概略を述べることにしよう。コンパクトハウスドルフ空間 Y について、 Y の互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ が independent であるとは、 $\forall k \geq 1$ と $\forall \{\varepsilon_j\}_{1 \leq j \leq k}$ ($\varepsilon_j = 1$ or -1 , $1 \leq j \leq k$) について $\cap \{\varepsilon_j A_j : 1 \leq j \leq k\} \neq \emptyset$ (但し、 $\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j = -1$) であることをいう。今、 K が non-Pettis set とすれば、§1 の定義 1 の後で述べた Pettis set の特徴付けについての注意から、 $\exists \{x_n\}_{n \geq 1} \subset B(X)$ s.t. $\{x_n\}_{n \geq 1}$ の任意の部分列は K 上で各点収束列ではない、を得る。このことに Rosenthal[12] の議論を利用すれば、 $\exists \{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ (: a subsequence of $\{x_n\}_{n \geq 1}$), $\exists r$ (: a real number) and $\exists \delta (> 0)$ s.t. $A_k = \{x^* \in K : (x^*, x_{n(k)}) \leq r\}$, $B_k = \{x^* \in K : (x^*, x_{n(k)}) \geq r + \delta\}$ について $(A_k, B_k)_{k \geq 1}$ は K の閉集合からなる independent sequence である。従って、この互いに素な閉集合の対の列で independent なもの $(A_k, B_k)_{k \geq 1}$ に対して、 $\Gamma = \cap_{k \geq 1} (A_k \cup B_k)$ とおくことによって、我々は K の空でないコンパクト部分集合 Γ を得る。その時、 $\phi : \Gamma \rightarrow \Delta$ ($\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, Cantor space) を $\phi(z) = \{t_k\}_{k \geq 1}$ (但し、 $t_k = 1$ if $z \in A_k$, $t_k = 0$ if $z \in B_k$) により定義すれば、 ϕ は連続全射であり、 $\Gamma \cap A_m = \phi^{-1}(U_m)$ 且つ $\Gamma \cap B_m = \phi^{-1}(U_m^c)$ (但し、 $U_m = \{\{t_k\}_{k \geq 1} \in \Delta : t_m = 1\}$, $\forall m \geq 1$) を満たす。 ϕ が連続全射であることから、Talagrand の結果 (1-2-5 in [13]) を用いることで、 Γ 上の Radon probability measure γ で $\phi(\gamma)$ (γ の ϕ による像測度) $= \nu$ (Δ 上の正規化されたハール測度) 且つ $\{f \circ \phi : f \in L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)\} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ (ここで、 Σ_ν , Σ_γ は各々 ν , γ に関して可測な集合全体を表す) を満たすものを得る。

更に、 $\rho : \Delta \rightarrow I$ を $\rho(t) = \sum_{k \geq 1} t_k / 2^k$ (但し、 $t = \{t_k\}_{k \geq 1} \in \Delta$) で定義すれば、 ρ は $\rho(\nu) = \lambda$ 且つ $\{u \circ \rho : u \in L_1(I, \Lambda, \lambda)\} = L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)$ を満たす連続全射である。

この時、これらの性質と上記の lifting theory を利用することにより、我々は次の条件 (*) を満たす弱*可測関数 $h : I \rightarrow K$ を構成する事ができた (詳細は [5] を参照)。

$$(*) \quad \int_A (x, h(t)) d\lambda(t) = \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))} (x^*, x) d\gamma(x^*)$$

が各 $A \in \Lambda$ と各 $x \in X$ について成り立つ。

この等式は h の性質を的確に表しており、 h が上記 (i) ~ (iv) を満たすことの、より簡潔で直接的な証明を、次の初等的な命題である補題 2 (Lemma 2 in [8] を参照) との結合により可能にするので、重要である。

補題 2. $C_1, \dots, C_q$ は Λ^+ の任意の有限個の元とする時、適当な自然数 p と有限個の非負整数 $i_1, \dots, i_q$ が存在して次の (1), (2) が成り立つ。

$$(1) 0 \leq 2 \cdot i_1, \dots, 2 \cdot i_q < 2^p - 1,$$

$$(2) \lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j)) > 0 \text{ 且つ } \lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j + 1)) > 0 \quad (1 \leq j \leq q).$$

§3. 定理の証明. この節では、§1 で述べられた定理の証明を次の順序に従って与えることにする。まず、(α) 陳述 (a), (b), (c) と (d) の同値性の証明、次に (β) 陳述 (a), (b), (e), (f) と (g) の同値性の証明、である。いずれの場合も前述の関数 h が効果的に利用されているのが特徴であり、特にここでは h が上記の性質 (i) ~ (iv) をもった関数であることが直接的に即得られるように証明されている。

(α). (a) $\Rightarrow$ (b) について。弱*コンパクト集合 K が Pettis set であるから、各弱*可測関数 $f: I \rightarrow K$ について補題 1 より、 $\theta(f)$ は Bourgain property を持つ。

(b) $\Rightarrow$ (d) について。 $\forall f: I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 $\theta(f) = g$ とし、且つ $f - \theta(f) = k$ と取れば良い。

(d) $\Rightarrow$ (c) について。 $\forall f: I \rightarrow K$, 弱*可測関数を与えた時、仮定から $f = g + k$ (但し、 g は Bourgain property を持つ弱*可測関数であり、 k は λ -weak* scalarly null である) と表せる。その時、 g に対応するマーチンゲールを $(g_n, \Lambda_n)_{n \geq 1}$ とすれば、各自然数 n と各 $x \in B(X)$ について、

$$\begin{aligned} (x, f_n(t)) &= \sum_{E \in \Pi_n} \left\{ \int_E (x, f(u)) d\lambda(u) / \lambda(E) \right\} \chi_E(t) \\ &= \sum_{E \in \Pi_n} \left\{ \int_E (x, g(u)) d\lambda(u) / \lambda(E) \right\} \chi_E(t) \\ &= (x, g_n(t)) \end{aligned}$$

が、 $\forall t \in I$ に対して成り立つ。ところが、 g が Bourgain property を持つので、[11] の Lemma 17 の証明から $\{x \circ g_n : n \geq 1, x \in B(X)\}$ が Bourgain property を持つことが得られる。よって、 $\{x \circ f_n : n \geq 1, x \in B(X)\}$ は Bourgain property を持つ。

(c) $\Rightarrow$ (a) について。そのために、弱*コンパクト集合 K が non-Pettis set であるとしよう。その時、§2 で紹介された弱*可測 K -値関数 h について、 $\{x \circ h_n : n \geq 1, x \in B(X)\}$ が Bourgain property を持たないことを h の性質 (*) と補題 2 の利用に

より直接的、簡潔に示そう。まず、 Λ^+ の有限個の元 $C_1, \dots, C_q$ を任意に与えよ。その時、補題 2 によって保障される自然数 p と有限個の非負整数 $i_1, \dots, i_q$ が存在して、

$$(1) \ 0 \leq 2 \cdot i_1, \dots, 2 \cdot i_q < 2^p - 1,$$

$$(2) \ \lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j)) > 0 \text{ 且つ } \lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j + 1)) > 0 \quad (1 \leq j \leq q)$$

が成り立つ。

又、§2 で h を構成した際現われた $B(X)$ の点列の部分列を $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ とし、各 j ($1 \leq j \leq q$) について $u_j \in C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j)$ と $v_j \in C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j + 1)$ を取れ (このことは、(2) により可能である)。その時、各 j ($1 \leq j \leq q$) について、

$$\begin{aligned} & o(x_{n(p)} \circ h_p|_{C_j}) \\ &= \sup \{ (x_{n(p)}, h_p(t)) : t \in C_j \} - \inf \{ (x_{n(p)}, h_p(t)) : t \in C_j \} \\ &\geq (x_{n(p)}, h_p(u_j)) - (x_{n(p)}, h_p(v_j)) \\ &= \left\{ \int_{I(p, 2 \cdot i_j)} (x_{n(p)}, h(t)) d\lambda(t) \right\} / \lambda(I(p, 2 \cdot i_j)) \\ &\quad - \left\{ \int_{I(p, 2 \cdot i_j + 1)} (x_{n(p)}, h(t)) d\lambda(t) \right\} / \lambda(I(p, 2 \cdot i_j + 1)) \\ &= \left\{ \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(p, 2 \cdot i_j)))} (x^*, x_{n(p)}) d\gamma(x^*) \right\} / \lambda(I(p, 2 \cdot i_j)) \\ &\quad - \left\{ \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(p, 2 \cdot i_j + 1)))} (x^*, x_{n(p)}) d\gamma(x^*) \right\} / \lambda(I(p, 2 \cdot i_j + 1)) \end{aligned}$$

(最後の等号は上記 h の性質 (*) により生ずる)

$$\geq (r + \delta) - r = \delta,$$

が成り立つ。但し、最後の不等号は、 $\rho(\phi(\gamma)) = \lambda$, $\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(p, 2 \cdot i_j))) \subset B_p$, $\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(p, 2 \cdot i_j + 1))) \subset A_p$ から生ずる。それ故、 $\{x \circ h_n : n \geq 1, x \in B(X)\}$ は Bourgain property を持たない。即ち (c) は成立しない。

以上により、(a), (b), (c) と (d) の同値性が示された。

(β). (a) $\Rightarrow$ (b) について。これは、前述。

(b) $\Rightarrow$ (e) について。任意の弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ を取れ。その時、各 $E \in \Lambda^+$ と各 $x \in X$ について、lifting の性質から $\text{ess-o}(x \circ f|E) = \text{ess-o}(\ell(x \circ f)|E) = o(\ell(x \circ f)|E) = o(x \circ \theta(f)|E)$ が生ずる。従って、 $\theta(f)$ が Bourgain property を持てば、定義 2, 3 より $\{x \circ f : x \in B(X)\}$ は λ に関して Bourgain's condition を持つことを得る。

(e) $\Rightarrow$ (a) について。(c) $\Rightarrow$ (a) の証明に類似である。即ち、(a) を否定すれば、前述より K -値弱*可測関数 h が得られる。その時、 $\{x \circ h : x \in B(X)\}$ が λ に関して Bourgain's condition を持たないことを示そう。そのために、 Λ^+ の有限個の元 $C_1, \dots, C_q$ を取れ。それに対し、補題 2 から自然数 p と有限個の非負整数 $i_1, \dots, i_q$ が存在して、

$$(1) 0 \leq 2 \cdot i_1, \dots, 2 \cdot i_q < 2^p - 1,$$

(2) $\lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j)) > 0$ 且つ $\lambda(C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j + 1)) > 0$ ($1 \leq j \leq q$) が成り立つ。

又、§2 で h を構成した際現われた $B(X)$ の点列の部分列を $\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$ とし、各 j ($1 \leq j \leq q$) について $E_j = C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j)$ と $F_j = C_j \cap I(p, 2 \cdot i_j + 1)$ とおけば、§1 で述べた本質的振幅に関する注意より、各 j ($1 \leq j \leq q$) について、

$$\begin{aligned} & \text{ess-o}(x_{n(p)} \circ h|C_j) \\ &= \sup \left\{ \int_I (g_1 - g_2) x_{n(p)} \circ h \, d\lambda : g_1, g_2 \in \Delta(C_j) \right\} \\ &\geq \left\{ \int_{E_j} (x_{n(p)}, h(t)) \, d\lambda(t) \right\} / \lambda(E_j) - \left\{ \int_{F_j} (x_{n(p)}, h(t)) \, d\lambda(t) \right\} / \lambda(F_j) \\ &= \left\{ \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(E_j))} (x^*, x_{n(p)}) \, d\gamma(x^*) \right\} / \lambda(E_j) \\ &\quad - \left\{ \int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(F_j))} (x^*, x_{n(p)}) \, d\gamma(x^*) \right\} / \lambda(F_j) \\ &\geq (r + \delta) - r = \delta, \end{aligned}$$

が、前述 (c) $\Rightarrow$ (a) の項と同様の理由で得られる。即ち、 $\{x \circ h : x \in B(X)\}$ は λ に関して Bourgain's condition を持たない。以上により、陳述 (a), (b) と (e) の同値性が示された。

(a) $\Rightarrow$ (g) について。任意の弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ を取れ。陳述 (g) を示すためには、[3] の Theorem IV.10 によって、 $S_f^*(B(X^{**}))$ が λ に関する set of small oscillation を言えば良い。今、(a) から $\text{co}^*(K)$ は WRN set であるから、各 $A \in \Lambda$ に対し $\alpha(A) = S_f(\chi_A)$ で定義されるベクトル値測度 $\alpha : \Lambda \rightarrow X^*$ は λ に関する

Pettis derivative $\theta(f)$ を持つ、即ち、各 $x^{**} \in X^{**}$ と各 $A \in \Lambda$ について

$$(x^{**}, S_f(\chi_A)) = \int_A (x^{**}, \theta(f)(t)) d\lambda(t)$$

が成り立つ。従って、 $S_f^*(B(X^{**})) = \{ x^{**} \circ \theta(f) : x^{**} \in B(X^{**}) \}$ が得られる。ところが、(a) と (b) の同値性より、 $\{ x \circ \theta(f) : x \in B(X) \}$ は Bourgain property を持つから、この集合の pointwise closure である $\{ x^{**} \circ \theta(f) : x^{**} \in B(X^{**}) \}$ も又、Bourgain property を持つ。それ故、 $S_f^*(B(X^{**}))$ は λ に関し Bourgain's condition を持つ。このことは、[3] の Proposition IV.8 より $S_f^*(B(X^{**}))$ が λ に関する set of small oscillation であることを意味する。

(g) $\Rightarrow$ (f) について。任意に弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ を与える。まず各 $x \in X$ と各 $A \in \Lambda$ について、 $(S_f^*(x), \chi_A) = (x, S_f(\chi_A)) = (x, T_f^*(\chi_A)) = (T_f(x), \chi_A)$ を注意しよう。これから、各 $x \in X$ について、 $S_f^*(x) = x \circ f$ を得る。又、 $S_f^*(B(X)) \subset S_f^*(B(X^{**}))$ であり、仮定より $S_f^*(B(X^{**}))$ は λ に関する set of small oscillation である ([3] の Theorem IV.10 による) から、当然 $S_f^*(B(X))$ も、そうである。即ち、 $\{ x \circ f : x \in B(X) \}$ は λ に関する set of small oscillation である。

(f) $\Rightarrow$ (e) について。これは、[3] の Proposition IV.8 の内で容易に導かれる部分であるが、そこに証明が記されていないので、この場合に即して証明を付すことにする。任意に弱*可測関数 $f : I \rightarrow K$ を与える時、 $\{ x \circ f : x \in B(X) \}$ は λ に関する set of small oscillation であるから、 $E \in \Lambda^+$ を任意に取れば、任意の正数 ε に対して I の finite measurable partition Π が存在して、各 $x \in B(X)$ について

$$\sum_{A \in \Pi} \lambda(A) \cdot \text{ess-o}(x \circ f|A) < \varepsilon \cdot \lambda(E)$$

が成り立つ。その時、 $\{ A \cap E \in \Lambda^+ : A \in \Pi \} = \{ A_1, \dots, A_n \}$ と置けば、各 $x \in B(X)$ について、

$$\begin{aligned} \lambda(E) \cdot \inf \{ \text{ess-o}(x \circ f|A_i) : 1 \leq i \leq n \} &\leq \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) \cdot \text{ess-o}(x \circ f|A_i) \\ &\leq \sum_{A \in \Pi} \lambda(A) \cdot \text{ess-o}(x \circ f|A) < \varepsilon \cdot \lambda(E) \end{aligned}$$

が得られ、 $\inf \{ \text{ess-o}(x \circ f|A_i) : 1 \leq i \leq n \} < \varepsilon$ であり、 $\{ x \circ f : x \in B(X) \}$ は λ に関して Bourgain's condition を持つ。

以上により、定理の証明が完結された。

注意 1. 定理の内 : (e) $\Rightarrow$ (a) 及び (f) $\Rightarrow$ (e) の部分の証明から、 $\{x \cdot h : x \in B(X)\}$ が λ に関する set of small oscillation でないことが容易に得られるが、次のように示すのがより直接的である。即ち、 $\Pi = \{C_1, \dots, C_q\}$ を I の finite measurable partition とすれば、定理の内 : (c) $\Rightarrow$ (a) の部分の証明と同じ議論で、

$$\sum_{j=1}^q \lambda(C_j) \cdot \text{ess-o}(x_n \cdot h|C_j) \geq \delta \cdot \sum_{j=1}^q \lambda(C_j) = \delta$$

が得られるからである。更に、 S_h が strongly regular でないことの証明は、次のようにすると速い。今 S_h を strongly regular とすれば、M. Girardi and J. J. Uhl, Jr [4] の直接的な証明から、 $S_h^*(B(X^{**}))$ (よって、当然 $S_h^*(B(X))$) が λ に関する set of small oscillation である (即ち、 λ に関して Bourgain's condition を持つ) ことになり矛盾。それ故、 S_h は strongly regular ではない。

注意 2. X^* の弱*コンパクト集合 K に関する次の条件 (**) を考えよう。

(**) $\forall f : I \rightarrow K$, 弱*可測関数について、 f は Bourgain property を持つ。

その時、各 $x \in X$ と各 $A \in \Lambda^+$ について、 $o(x \cdot f|A) \geq \text{ess-o}(x \cdot f|A)$ が成り立つから、条件 (**) を満たす弱*コンパクト集合 K は Pettis set である。しかし、次の例 (cf. Example C in [1]) が示すように一般にその逆は必ずしも成立しない。但し、 X が separable の時は、(a) と (**) の同値性は容易に示される。

例. $f : I \rightarrow l_1(I)$ を $f(t) = e_t$ ($t \in I$) で与えよ。各 $x \in c_0(I)$ について、 $x \cdot f$ は countably nonzero であるから、 f は 弱*可測。しかしながら、 A を I のルベーグ非可測集合とすれば、 $\chi_A \in l_\infty(I)$ 且つ $\chi_A \cdot f = \chi_A$ が成立するから、 f は弱可測関数ではない。それ故 $\{x \cdot f : x \in B(X)\}$ は Bourgain property を持たない。今、 K を $l_1(I)$ の閉単位球とすれば、 K は Radon-Nikodym set より当然 Pettis set である。よって、 f は K -値弱*可測関数であるが $\{x \cdot f : x \in B(X)\}$ は Bourgain property を持たない。

参考文献

- [1] E.M. Bator, A decomposition of bounded scalarly measurable functions taking their ranges in dual Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 102 (1988), 850-854.
- [2] J. Bourgain, Martingales in conjugate Banach spaces (unpublished).
- [3] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, Some topological and geometrical structures in Banach spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 378,

Providence (1987).

- [4] M. Girardi and J.J. Uhl, Jr, Slices, RNP, strong regularity, and martingales, Bull. Austral. Math. Soc., 41 (1990), 411-415.
- [5] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991), 827-836.
- [6] M. Matsuda, ペットリス集合について, 数理解析研究所講究録 789 (1992), 164-178.
- [7] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Math. Japon., 38 (1993), 177-183.
- [8] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in terms of the Bourgain property, To appear in Math. Japon.
- [9] M. Matsuda, Remarks on Pettis sets, To appear.
- [10] K. Musiał, The weak Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, Lecture Notes in Math., Springer, 991 (1983), 182-187.
- [11] L.H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29 (1985), 509-531.
- [12] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ_1 , Proc. Nat. Acad. Sci., 71 (1974), 2411-2413.
- [13] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Mem. Amer. Math. Soc., 307, Providence (1984).