

Symmetry Breaking in Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics

筑波大学 物理学系 有光敏彦
アルバータ大学 物理 梅沢博臣

§ 0. はじめに

最近、我々は、non-equilibrium thermo field dynamics (NETFD) と名付けた、熱的自由度を含んだ場の量子論を導入した。¹⁻⁶⁾ これは、real-time を扱う場の演算子に対する新しい理論体系である。この体系によつて、非平衡解放系も場の量子論的に扱える様になった。

はじめ、NETFD は、非平衡統計力学でよく知られた damping theory⁷⁻¹⁰⁾ に基づいて作られた。^{1,2)} その後、7つの公理の発見により、³⁾ すっきりとした体系にまとめられ、散いつのある自由場に対する体系が一般的に築かれた。⁶⁾ NETFDでの母関数法も調べられ、⁴⁾ 特別な場合として、Schwingerの母関数法¹¹⁾ を含んでいることが示された。

公理的 NETFD は、平衡系の thermo field dynamics¹²⁻¹⁵⁾ を含んだ、thermo field dynamics 全体の基礎を与えるので、⁵⁾ 今後単に thermo field dynamics (TFD) と呼ぶことにする。

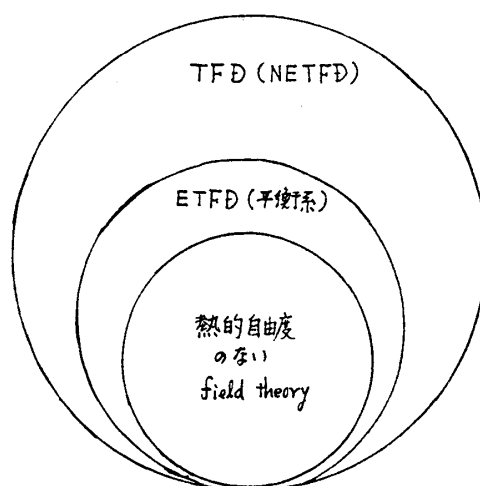


図 1.

§ 1. TFD の公理

A1 真空 $|0(t)\rangle$ は、Schrödinger 方程式

$$\partial_t |0(t)\rangle = -i\hat{H} |0(t)\rangle, \quad (1.1)$$

を満たす。

A2 $\hat{H}$ は、Tildian である。つまり、

$$(i\hat{H})^\sim = i\hat{H} \quad (1.2)$$

A3 真空 $\langle 1|$ は、

$$\langle 1| \hat{H} = 0, \quad (1.3)$$

を満たす。

A4 $\langle 1|$ は、熱状態条件

$$\langle 1| a(k) = \langle 1| \tilde{a}^\dagger(k) \sigma, \quad \langle 1| \tilde{a}(k) = \langle 1| a^\dagger(k), \quad (1.4)$$

を満たす。

A5 $|0(\infty)\rangle$ は、

$$\hat{H} |0(\infty)\rangle = 0, \quad (1.5)$$

を満たす。

A6 $|0(\infty)\rangle$ は、熱状態条件

$$a(k) |0(\infty)\rangle = F[\{\tilde{a}^\dagger(l), \tilde{a}(l)\}] |0(\infty)\rangle, \quad (1.6)$$

を満たす。その非擾動部分は、

$$a(k) |0(\infty)\rangle = \bar{f}(k) \tilde{a}^\dagger(k) |0(\infty)\rangle, \quad \tilde{a}(k) |0(\infty)\rangle = \sigma \bar{f}(k) a^\dagger(k) |0(\infty)\rangle, \quad (1.7)$$

である。 $\bar{f}(k)$ は、c-数実関数である。

A7 $|0\rangle = |0(t_0)\rangle$ は、熱状態条件

$$b(k) |0\rangle = I[\{\tilde{b}^\dagger(l), \tilde{b}(l)\}] |0\rangle, \quad (1.8)$$

を満たす。その非擾動部分は、

$$b(k) |0\rangle = f(k) \tilde{b}^\dagger(k) |0\rangle, \quad \tilde{b}(k) |0\rangle = \sigma f(k) b^\dagger(k) |0\rangle, \quad (1.9)$$

である。 $f(k)$ は、c-数実関数である。

演算子 $a(k)$, $b(k)$ 等は、交換関係

$$[a(k), a^\dagger(l)]_\sigma = [\tilde{a}(k), \tilde{a}^\dagger(l)]_\sigma = \delta(k-l), \quad (1.10a)$$

$$[b(k), b^\dagger(l)]_\sigma = [\tilde{b}(k), \tilde{b}^\dagger(l)]_\sigma = \delta(k-l), \quad (1.10b)$$

を満たし、それぞれの間には、初期時刻 $t=t_0$ と最終時刻 $t=\infty$ での状態の対称性に依り、て決まる一時的な関係がある。ただし、 $[A, B]_\sigma = AB - \sigma BA$ で、ボゾンでは $\sigma = +1$, フェルミオンでは $\sigma = -1$ とする。

チルド conjugate ($\sim$) は、

$$(AB)^\sim = \tilde{A} \tilde{B}, \quad (c_1 A + c_2 B)^\sim = c_1^* \tilde{A} + c_2^* \tilde{B}, \quad (1.11)$$

で定義される。ただし、 c_1 と c_2 は複素数である。また、2回チルド conjugate をとるとは、規則

$$\tilde{\tilde{a}}(k) = \sigma a(k), \quad \tilde{\tilde{a}^\dagger}(k) = \sigma a^\dagger(k), \quad (1.12)$$

に従うものとする。

§2. 位相不変双2次模型

この模型の $\hat{H}$ の最も一般的な形は、³⁾

$$\hat{H}_0 = \int_k [\bar{R}_0(k) + R_1(k) a^\dagger(k) a(k) + R_2(k) \tilde{a}^\dagger(k) \tilde{a}(k) + R_3(k) \tilde{a}(k) a(k) + R_4(k) \tilde{a}^\dagger(k) a^\dagger(k)], \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし、 $R_j(k) = R_j'(k) + i R_j''(k)$ で、 $R_j'(k)$ と $R_j''(k)$ は c-数実関数である。また $\int_k = \int d^3k$ とする。

公理 A2 ~ A6 を用いると、簡単な演算子代数により、

$$\hat{H}_0 = \int_k \omega(k) [a^\dagger(k) a(k) - \tilde{a}^\dagger(k) \tilde{a}(k)] + i \hat{\Pi}, \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} = & - \int_k \kappa(k) \{ [1 + 2\bar{n}_\sigma(k)] [a^\dagger(k) a(k) + \tilde{a}^\dagger(k) \tilde{a}(k)] \\ & - 2 [1 + \bar{n}_\sigma(k)] \tilde{a}(k) a(k) - 2\bar{n}_\sigma(k) \tilde{a}^\dagger(k) a^\dagger(k) \} - 2\sigma \int_k \kappa(k) \bar{n}_\sigma(k), \end{aligned} \quad (2.2b)$$

を得る。ただし、 $\kappa(k) > 0$ 、 $\bar{n}_\sigma(k) = \sigma \bar{n}(k)$ 、

$$\bar{n}(k) = [f^{-1}(k) - \sigma]^{-1}, \quad (2.3)$$

である。この模型では、熱状態条件 (A6) としては、非摂動部分 (1.7) を用いる。

(2.2) を A1 に用いると、

$$|O(t)\rangle = \exp \left\{ \int_k Z^{-1}(k) [\mathcal{N}_\sigma(\bar{E}, k) - \mathcal{N}_\sigma(k)] \tilde{\gamma}_\sigma^0 \gamma_\sigma^0(k) \right\} |O\rangle, \quad (2.4)$$

を得る。ただし、 $\mathcal{N}_\sigma(\bar{E}, k) = \sigma \mathcal{N}(\bar{E}, k)$ 、 $\mathcal{N}_\sigma(k) = \sigma \mathcal{N}(k)$ 、

$$\mathcal{N}(\bar{E}, k) = \langle 1 | a^\dagger(k) a(k) | O(t) \rangle = \bar{n}(k) + [\mathcal{N}(k) - \bar{n}(k)] e^{-2\kappa(k)\bar{E}}, \quad (2.5)$$

$$Z(k) = 1 + \mathcal{N}_\sigma(k), \quad \mathcal{N}(k) = [f^{-1}(k) - \sigma]^{-1}, \quad (2.6)$$

である。始状態と終状態の対称性は同一として、 $b(k) = a(k)$ 、etc. とおいた。また、 $\gamma(k)$ etc. は、

$$\gamma(k)^\alpha = B(k)^{\alpha\beta} a(k)^\beta, \quad (2.7)$$

とそのチルト conjugate で定義され、

$$\gamma(k) |O\rangle = 0, \quad \langle 1 | \tilde{\gamma}^\dagger(k) = 0, \quad (2.8)$$

を満たす。ここで、熱表示

$$\gamma(k)^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma(k) \\ \tilde{\gamma}^\dagger(k) \end{pmatrix}, \quad a(k)^\alpha = \begin{pmatrix} a(k) \\ \tilde{a}^\dagger(k) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

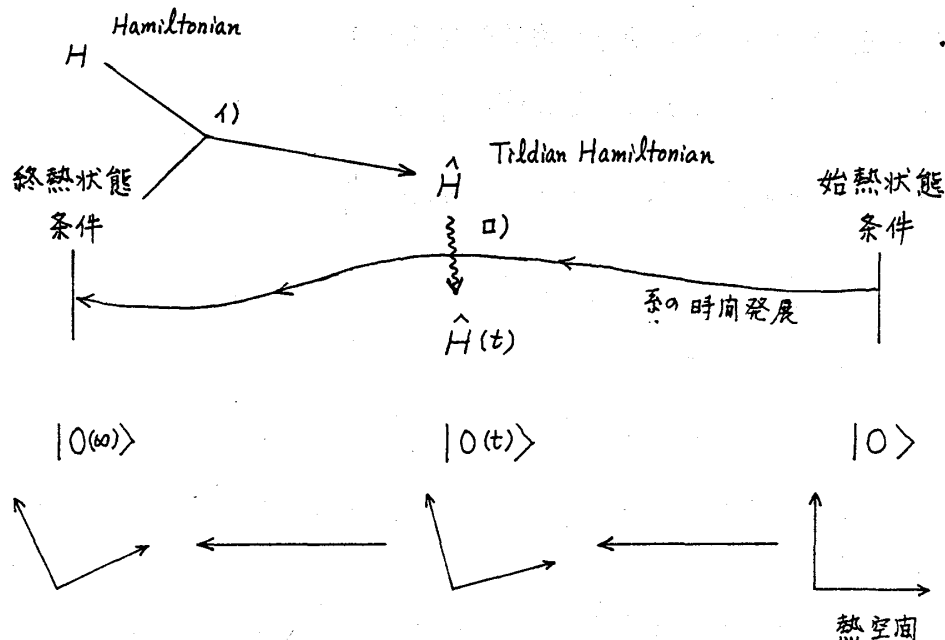
$$B(k)^{\alpha\beta} = Z^{-1}(k) \begin{pmatrix} 1, & -f(k) \\ -\sigma, & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

を導入した。

(2.4) は、真空の動的な組み換えを表わしている。

§3. TFDの構造

くわしい議論は、原論文¹⁻⁶⁾にゆずることにして、ここでは、TFDの構造を図示して説明するに留める。



- 1) 系の Hamiltonian H と公理 $A2 \sim A6$ とで、Tildian Hamiltonian $\hat{H}$ が決まる。
- 2) 時間依存くり込み。

図 2

§4. ボゾン変換 ($\sigma=1$)

始状態と終状態の対称性が違う場合の例として、ボゾン変換を扱う。¹⁶⁾ 超電導 BCS 模型 ($\sigma=-1$) も同様に扱えるが、紙面の都合でここには書けないので、原論文¹⁶⁾を参照いただきたい。

$a(k)$ と $b(k)$ が、ボゾン変換

$$b(k) = a(k) + v(k), \quad \tilde{b}^\dagger(k) = \tilde{a}^\dagger(k) + v(k), \quad (4.1)$$

で結ばれている場合を、双二次の範囲で取り扱う。ここに、 $v(k)$ は複素数である。

この場合の、Tildian Hamiltonian は、(2.2) で与えられ、

$$|0(t)\rangle = \exp \left(\int_k \left\{ \tilde{Z}^\dagger(k) [n(E, k) - n(k)] \tilde{Y}^\dagger(k) Y(k) + \tilde{Z}^\dagger(k) [v(E, k) Y^\dagger(k) + v^*(E, k) \tilde{Y}^\dagger(k)] \right\} \right) |0\rangle, \quad (4.2)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} v(\bar{E}, k) &= \langle 1 | b(k) | 0(t) \rangle \\ &= v(k) (1 - \exp \{-i[\omega(k) - ik(k)] \bar{E}\}) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$n(\bar{E}, k) = \langle 1 | d_t^\dagger(k) d_t(k) | 0(t) \rangle , \quad (4.4)$$

であり、 $n(\bar{E}, k)$ は、(2.5) 最右辺で与えられる。ただし、

$$d_t(k) = b(k) - v(\bar{E}, k) , \quad d_t^\dagger(k) = b^\dagger(k) - v^*(\bar{E}, k) , \quad (4.5)$$

とあった。また、

$$\gamma(k)^\alpha = B(k)^{\alpha\beta} b(k)^\beta , \quad b(k)^\alpha = \begin{pmatrix} b(k) \\ \tilde{b}^\dagger(k) \end{pmatrix} , \quad (4.6)$$

で、 $\gamma(k)$, $\tilde{\gamma}^\dagger(k)$ は(2.8)を満たす。

(4.2)は、ボゾン変換の場合の真空の動的組み換えを表わしている。

§5. おわりに

TFDによると、真空の動的な組み換えが、7つの公理により系統的に扱えることを示した。なお、ボゾン変換の場合($\sigma=1$)の(2.2)は、

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \int_k \left(\omega(k) [P_t^\dagger(k) P_t(k) - \tilde{P}_t^\dagger(k) \tilde{P}_t(k)] - ik(k) [P_t^\dagger(k) P_t(k) + \tilde{P}_t^\dagger(k) \tilde{P}_t(k)] \right. \\ &\quad + [i\partial_t \ln Z(\bar{E}, k)] \tilde{P}_t^\dagger(k) P_t^\dagger(k) - Z^{-1/2}(\bar{E}, k) \{ i\partial_t [v(\bar{E}, k) - v(k)] \} P_t^\dagger(k) \\ &\quad \left. - Z^{-1/2}(\bar{E}, k) \{ i\partial_t [v^*(\bar{E}, k) - v^*(k)] \} \tilde{P}_t^\dagger(k) \right) , \end{aligned} \quad (5.1)$$

と書ける。ただし、

$$Z(\bar{E}, k) = 1 + n(\bar{E}, k) , \quad (5.2)$$

であり、 $v(\bar{E}, k)$ と $n(\bar{E}, k)$ は、それぞれ(4.3)、(4.4)で与えられる。また、

$$\begin{pmatrix} P_t(k) \\ \tilde{P}_t^\dagger(k) \end{pmatrix} = Z^{1/2}(\bar{E}, k) \begin{pmatrix} 1 & -f(\bar{E}, k) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_t(k) \\ \tilde{d}_t^\dagger(k) \end{pmatrix} , \quad (5.3)$$

$$f(\bar{E}, k) = \frac{n(\bar{E}, k)}{1 + n(\bar{E}, k)} , \quad (5.4)$$

で、

$$P_t(k) | 0(t) \rangle = 0 , \quad \tilde{P}_t(k) | 0(t) \rangle = 0 , \quad \langle 1 | P_t^\dagger(k) = 0 , \quad \langle 1 | \tilde{P}_t^\dagger(k) = 0 , \quad (5.5)$$

を満たす。ここに、 $d_t(k)$ etc. は、(4.5)で与えられる。

時刻 t の熱空間は、 $\langle 1 | \tilde{P}_t(k)^m P_t(k)^n , \quad P_t^\dagger(k)^m \tilde{P}_t^\dagger(k)^n | 0(t) \rangle$ ($m, n=1, 2, 3, \dots$)で張られる線型ベクトル空間であり、TFDでの演算子の表現空間を与える。

TFDでは、「時間依存くり込み」が必要になるが、¹⁷⁾これについては別の機会にゆずることにする。

スピノダル分解などの空間パターン形成の問題もTFDの枠組で扱えるはずであるが、これは今後の問題である。

最後にこの場をかりて、有益な議論をしてくれた大学院生の富永哲雄、番雅司、須藤恭史、James Pradko、Michele Guidaの諸君に感謝したい。

<参考文献>

- 1) T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* 74 (1985) 429.
- 2) T. Arimitsu and H. Umezawa, "NETFD", preprint, Univ. of Alberta (1985).
- 3) T. Arimitsu and H. Umezawa, "General Structure of NETFD", preprint, Univ. of Alberta (1985).
- 4) T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica A* (1986) in press.
- 5) H. Umezawa and T. Arimitsu, *Proceeding of the Bielefeld Encounters in Physics and Mathematics*, ed. M.C. Gutzwiller, A. Inomata, J.R. Klauder and L. Streit (World Scientific, Singapore, 1986).
- 6) T. Arimitsu and H. Umezawa, *J. Phys. Soc. Japan* 55 (1986) No.5.
- 7) S. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* 20 (1958) 498.
- 8) R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* 33 (1960) 1338.
- 9) F. Shibata and T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* 49 (1980) 891.
- 10) T. Arimitsu, *J. Phys. Soc. Japan* 51 (1982) 1720.
- 11) J. Schwinger, *J. Math. Phys.* 2 (1961) 407.
- 12) L. Leplae, F. Mancini and H. Umezawa, *Physics Reports* 10C (1974) 151.
- 13) Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collect. Phenom.* 2 (1975) 55.
- 14) H. Matsumoto, *Fortschr. Phys.* 25 (1977) 1.
- 15) H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland, Amsterdam, New York, London, 1982).
- 16) T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, "Dynamical Rearrangement of the Thermal Vacuum in TFD", preprint, Univ. of Tsukuba (1986).
- 17) H. Umezawa and T. Arimitsu, *Prog. Theor. Phys. Supplement* (1986).