

流体中に現れる輸送障壁のレイノルズ数への依存性

水野吉規 (Yoshinori Mizuno)*, 船越満明 (Mitsuaki Funakoshi)**

* 名古屋大学大学院 工学研究科
Graduate School of Engineering, Nagoya University

** 京都大学大学院 情報学研究科
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 はじめに

流体の混合は、大気、海洋など自然界のいたるところに現れるごく基本的な自然現象であると同時に、化学プラントなど各種工業製品の製造過程においても重要な役割を占めている。そのため、流体の混合に関してさまざまな観点からの研究がこれまでに数多くなされてきている。その中で、この現象を力学系の観点から捉えた研究が約20年ほど前からなされてきており [1], 流体の混合過程が力学系における解のカオス的な振る舞いと結びつけて考えられ、流体混合に関する理解が大きく進んでいる。ここでは、次のような観点から流体の混合を考える。位置 x および時間 t の関数として速度場 $u(x, t)$ が与えられたとき、各流体粒子の運動は次の常微分方程式に従う。

$$\frac{dX}{dt} = u(X, t), \quad (1)$$

ここで、 $X(t)$ は流体粒子の位置である。流体粒子がカオス的に振る舞う領域では、流れにより流体が引き伸ばしと折りたたみの変形を繰り返すことによって、混合が促進される。レイノルズ数が高く、速度場が時間的かつ空間的に不規則に振る舞う乱流では、いたるところで流体のカオス的な振る舞いが実現されると考えられる。したがって、乱流は極めて高い混合能力を有すると考えることができる。その一方で、レイノルズ数が低く流れが比較的小さな層流の場合には、流体がカオス的に振る舞う領域と規則的に振る舞う領域が共存することがある。ここで規則的な振る舞いとは、式 (1) の周期解と準周期解を指す。安定な周期解の周りに現れる準周期解によって構成されるトーラス状あるいは管状の不変集合は、それを横断的に交わる解軌道を許さず、障壁の役割をする。流体を混合するという目的からは、このような輸送障壁が存在することは望ましくない。

この流体の混合を妨げる輸送障壁が出現する場所や大きさは、流れの境界条件、あるいは流れに関するパラメータに大きく依存することが、これまでの多くの研究により明らかになってきている [2, 3]。しかし、それらはいずれもケーススタディであり、一般的な輸送障壁の出現やサイズに関する理解はそれほど進んでいないのが現状であるとも言える。輸送障壁に関するそのような情報を予測することは、さまざまな場面で現れる流体の混合過程の予測、あるいは工業的に使用される混合装置の設計のためには重要であるため、この問題について更なる研究が必要である。

流れの性質を特徴付けるパラメータとしてレイノルズ数があるが、輸送障壁の場所や大きさのレイノルズ数への依存性についてもあまり理解されていない。これまでの力学系の観点による流体混合に関する研究のほとんどは、レイノルズ数が極めて小さい場合を扱っており、中間的な値のレイノルズ数に対する研究

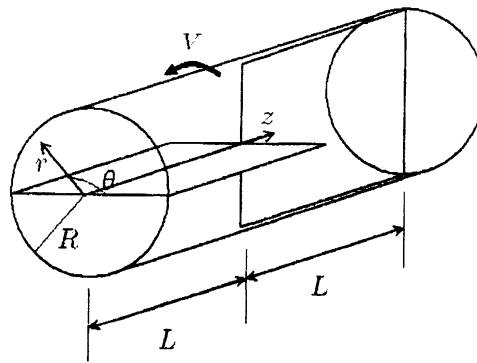


図 1: PPM の概略図

は比較的少ない。定常で比較的小さなレイノルズ数に対する流れを対象とした研究としては次のようなものがある。Fountain ら [6] は、モデル化された混合槽における流体混合について、実験および数値シミュレーションによって調べている。彼らの扱った混合槽にはトラス状の輸送障壁が出現するが、彼らはこの輸送障壁がレイノルズ数の増加に伴って、いったん拡大し、その後縮小するという非単調な振る舞いをすることを明らかにしている。また、Hobbs ら [7] は混合装置の一種であるスタティックミキサーにおける流体混合について数値シミュレーションによる研究を行っている。彼らは、このミキサーにおいて、レイノルズ数ごく小さい範囲では存在しない輸送障壁がレイノルズ数を増加させると出現し、更にレイノルズ数を増加させると再び消滅する、という現象が起こることを示した。ここでも、輸送障壁がレイノルズ数の増加に伴い非単調な振る舞いをするのがわかる。しかし、これらの輸送障壁の振る舞いの背後にあるメカニズムは明らかにされていない。そこで本研究では、レイノルズ数の増加に伴う速度場の変化から、このような輸送障壁の振る舞いを説明付けることを目標とする。

2 Partitioned-pipe mixer (PPM)

ここでは、スタティックミキサーのモデルである Partitioned-pipe mixer を考える [4]。このシステムは無限に長い円筒とその内部に互いに直交するように交互に配置された同じ長さの平板からなり、円筒の軸方向に周期的な構造をしている。図 1 に PPM の 1 周期分の概略図を示す。流体を圧力勾配により円筒内部に流すと同時に円筒壁を回転させて円筒の断面方向にも流れを生じさせ、内部の流体が軸方向に進むにつれて混合していくというシステムである。ここでは、円筒の半径を R 、平板の長さを L 、円筒の回転角速度を V/R とする。座標系は、図 1 に示されているように、円筒座標系 (r, θ, z) を用いる。速度場 $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ は軸方向に周期 $2L$ で周期的であるとする。圧力 p に対する軸方向の境界条件は、軸方向に圧力勾配を与えるため、一周期間の圧力降下を P_d (定数) とし、 $p(z=0) = p(z=2L) + P_d$ とする。

断面方向の長さや速度をそれぞれ R , V 、軸方向の長さや速度を L , VL/R 、圧力を P_d 、時間を R/V によって無次元化して得られる速度場の支配方程式は以下で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\beta R_e} \nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3)$$

ただし、

$$R_e = \frac{VR}{\nu}, \quad \beta = \frac{\rho \nu V}{P_d R},$$

ρ は流体の密度, ν は動粘性率である. R_e はレイノルズ数, β は圧力勾配にもとづくレイノルズ数 R_e^{prs}

$$R_e^{prs} = \frac{L R^2 P_d}{\rho \nu L}$$

とレイノルズ数 R_e の比である. すなわち, β は円筒壁の回転による流れと軸方向の圧力勾配による流れの強さの比を表わすパラメータとみなすことができる. ここでは $\beta = 0.01$ とした. また, アスペクト比 R/L は 0.5 とした.

境界条件は以下で与えられる.

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \begin{cases} \theta = 0 \text{ and } \pi, & \text{for } 0 \leq r < 1, 0 \leq z \leq 1, \\ \theta = \pi/2 \text{ and } 3\pi/2, & \text{for } 0 \leq r < 1, 1 \leq z \leq 2, \end{cases} \quad (4)$$

$$u_r = u_z = 0 \text{ and } u_\theta = 1 \quad \text{on} \quad r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, z = 0) &= u(r, \theta, z = 2), \\ p(r, \theta, z = 0) &= p(r, \theta, z = 2) + 1, \end{aligned} \right\} \quad \text{for } 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (6)$$

条件 (4), (5) はそれぞれ平板と円筒壁上のすべり無し条件である. また, 条件 (6) は, $\mathbf{u}$ に関しては軸方向の周期境界条件, p に関しては軸方向に一定の圧力降下を与える条件を表す. ここでは式 (2)–(6) を満たす定常流を SMAC 法 [5] により定常状態に達するまで計算することによって数値的に求めた. 微分は 2 次精度中心差分により離散化した. また, 円筒壁 $r = 1$ 付近と平板の向きが変わる $z = 0, 1, 2$ 付近で速度場の変化が大きくなることから, これらの場所で格子間隔が細くなるような不等間隔格子を用い, 格子点数は断面方向に 40×40 , 軸方向に 80 とした. (詳細は [8])

図 2 は断面 $z = 0.1, 0.5, 0.9$ 上における $R_e = 10, 150$ に対する断面方向の速度場を示している. 図 2(a,b,c) に示されている $R_e = 10$ の場合は, いずれの断面上でも渦が 1 つだけ存在するのに対し, 図 2(d,e,f) に示されている $R_e = 150$ の場合は, 2 つの渦が現れているのがわかる. 図 3 は 3 つの断面上における $R_e = 10, 150$ に対する軸方向流速の等高線を示している. 図 3(a,c,d,f) より, $R_e = 10, 150$ のいずれの場合も平板の端付近では, 2 つの極値を持つことがわかる. また, 図 3(b,e) より, 平板の中間では, $R_e = 10$ の場合は 1 点で極大値を持つものに対し, $R_e = 150$ の場合には 2 点で極大値を持つことがわかる.

3 輸送障壁

PPM における各流体粒子の運動は, 数値的に得られた速度場 $\mathbf{u}$ を用いて式 (1) を積分することで得られる. ここでは, 速度場の補間には線形補間, 式 (1) の積分には 4 次精度のルンゲ・クッタ法を用いた. 図 4 は PPM において, 色素をある場所に定常的に注入したときの色素の時間発展のシミュレーションの例を示している. これら 2 つの図のいずれも $R_e = 10$ に対するもので, 色素を注入する場所が異なっている. 図 4(a) では, 注入された色素が軸方向に進むにしたがって断面方向に混合しているが, その一方で, (b) では, 注入された色素は周囲とは混合せずにリボン状の流跡を形成している様子がわかる. (b) の色素は軸方向に伸びた管状の輸送障壁に囲まれていると考えられる. 輸送障壁の場所を詳細に知るにはポアンカレ断面が有効である. ここでは, 速度場が周期的であることより, 参照する断面を水平平板の中間 $z = 0.5$ として, 流体粒子の軌道とこの断面との交点をプロットしたポアンカレ断面を考える. この断面から断面への流体粒子の断面方向の移動を表わす写像をポアンカレ写像と呼ぶ. 図 5 にいくつかのレイノルズ数に対するポアンカレ断面を示す. ポアンカレ断面は中心 $r = 0$ 周りの π の回転について対称であるので, これらの図では上半分だけを示してある. 点がランダムに分布している領域は流体がカオス的に振る舞う領域であり, したがって, この領域では流体の混合がよく起こっていると考えられる. また, 閉曲線状の点の集合がいくつか見られるが, これはポアンカレ写像の不変集合となっており, この内側にはポアンカレ写像の

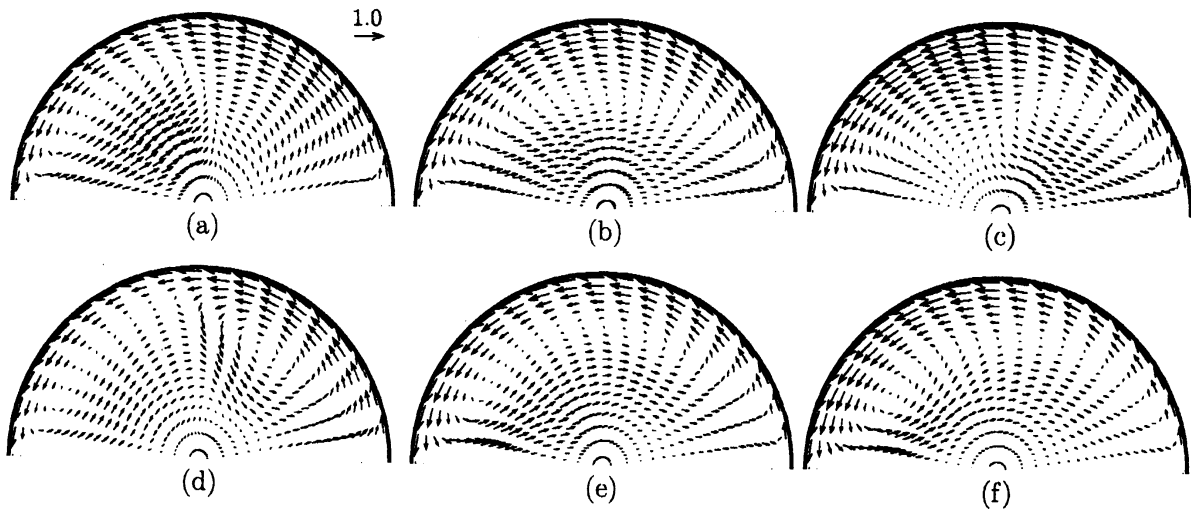


図 2: 断面方向の速度場. (a-c), (d-f) はそれぞれ $Re = 10, 150$ に対するもので, (a, d) は $z = 0.1$, (b, e) は $z = 0.1$, (c, f) は $z = 0.9$ 上の速度場を示している.

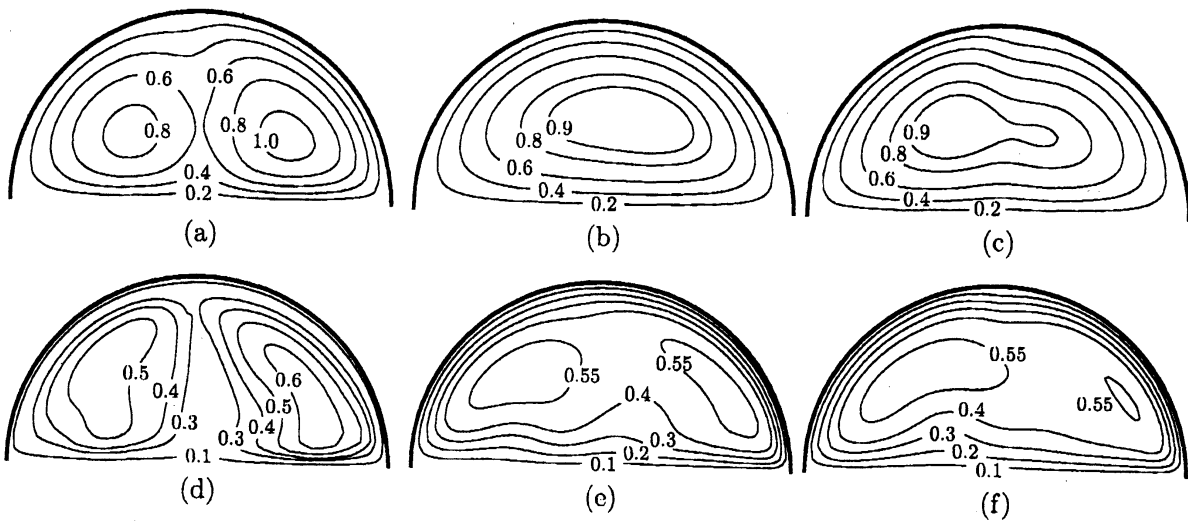


図 3: 軸方向流速の等高線. (a-c), (d-f) はそれぞれ $Re = 10, 150$ に対するもので, (a, d) は $z = 0.1$, (b, e) は $z = 0.1$, (c, f) は $z = 0.9$ 上の等高線を示している.

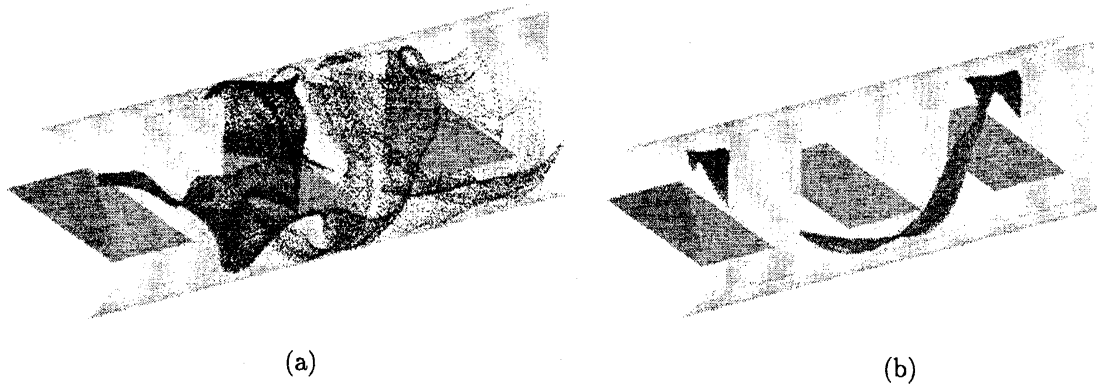


図 4: 色素を同じ場所に注入し続けた場合のシミュレーションの例. 流体は左から右に流れている. $Re = 10$. (a) と (b) は色素の注入する場所が異なる.

安定な周期点が存在する. このポアンカレ写像の不変集合である閉曲線の内側と外側の間の流体の出入りはなく, これらが管状の輸送障壁の断面となっている. このような閉曲線に囲まれる領域は規則領域あるいは島領域と呼ばれる.

図 5(a) は $Re = 10$ に対するポアンカレ断面を示している. まず三角形の島領域に着目すると, これらはレイノルズ数の増加に伴って, いったん拡大した後 (b), 消滅する (c,d). このようにレイノルズ数の増加に伴って, 輸送障壁が非単調な振る舞いをする例は, 第 1 節でも述べたように, 異なる 3 次元定常流にも共通して観察されている [6, 7]. 図 5(a) にみられるその他の島領域もレイノルズ数の増加に伴い, わずかに拡大し (b), その後は単調に縮小し消滅している (c,d).

一般に, このようなレイノルズ数の増加に伴う輸送障壁の非単調な振る舞いのメカニズムはまだ明らかにはなっていない. 次の節では, これを明らかにするために速度場の対称性に着目する.

4 速度場の対称性

速度場が 2 次元の場合には流体粒子の運動は, 流れ関数を導入することにより 1 自由度のハミルトン系により記述されるため, 流体のカオス的な運動は起こらない. したがって, このような速度場では効率的な流体混合は期待できない [1]. また, 流れが 3 次元であっても次のような場合には, 流体のカオス的な振る舞いが起こらない. 一般に, 定常流に対するナビエ・ストークス方程式は次のように書ける.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (7)$$

ここで, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度である. 上式の両辺と $\mathbf{u}$ との内積をとると,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + p \right) = \nu \mathbf{u} \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (8)$$

となり, $B \equiv |\mathbf{u}|^2/2 + p$ は上式の右辺が 0 となるときは, ラグランジュ的に保存することがわかる. このとき, 各流体粒子の軌道は B の等値面 (ベルヌイ面) 上を運動するため, やはりカオス的に振る舞うことができない [9]. このような場合には, トーラスあるいは管状の不変集合, すなわち, 輸送障壁が流体領域全体を占めることが示されている [9]. ただし例外的に, 全領域で $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0$ となるペルトラム流れの場合は, 式 (7) より, $\nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0$ ならば $\nabla B = 0$ となるため, 流体のカオス的な運動は可能である.

前節でみたように PPM においては, 流体のカオス的な混合が実現されていると同時に, 流体粒子の不変集合である輸送障壁も存在している. そこでここでは, 輸送障壁の存在する場所では局所的に流れが 2 次元

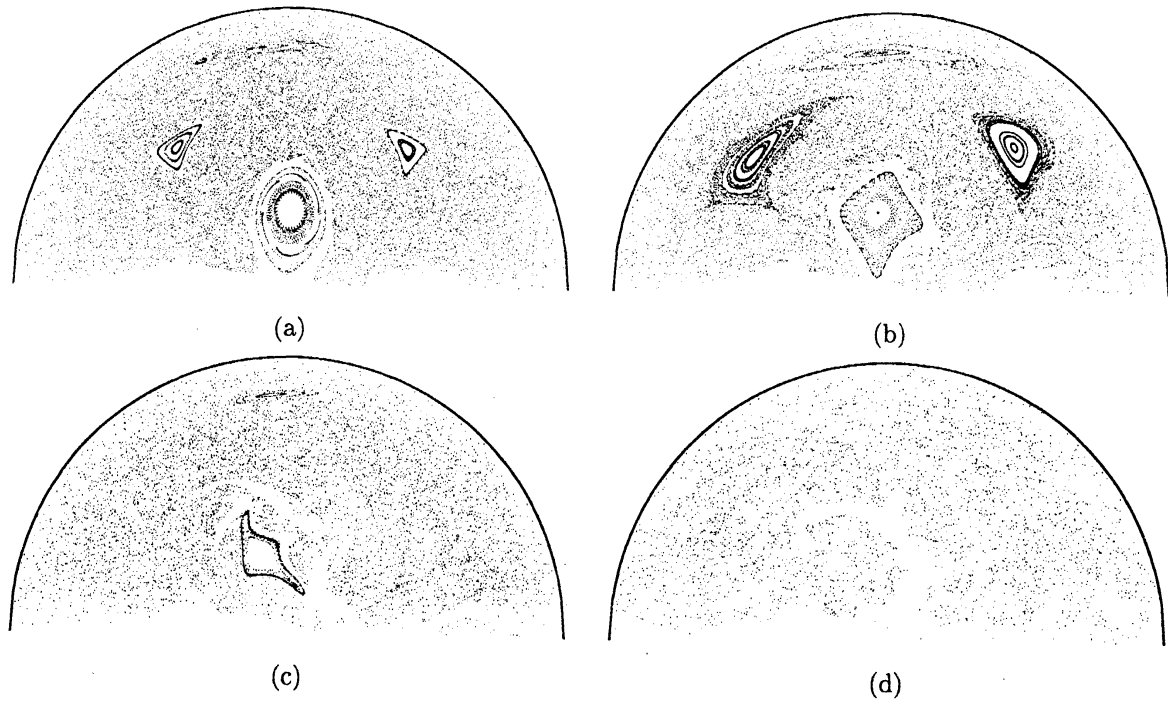


図 5: ポアンカレ断面. (a) $R_e=10$, (b) 30, (c) 70, (d) 150.

的かあるいは B が保存量となっており，流体粒子の運動が 2 次元曲面に制限されている，という仮定をおくことにする [10]．この仮定に基づき，以下では輸送障壁のレイノルズ数への依存性について調べる．

図 5(a) に現れている三角形の島領域に対応する管状の輸送障壁は軸方向にほぼ直線的に伸びているため，この輸送障壁には速度場の軸方向への並進対称性が関係していることが予想される． $|\frac{\partial u}{\partial z}| = 0$ となる領域では速度場は軸方向への依存性がないことから，ここでは， $S_g \equiv \frac{1}{2} \int_0^2 |\frac{\partial u}{\partial z}| dz$ の分布を調べることにする．図 6 は $R_e = 10, 30, 150$ に対する S_g の分布を示している．図 5(a,b) と図 6(a,b) との比較により，三角形の島領域が存在する場所と S_g が小さな値をとる領域が一致していることがわかる．したがって，これらの島領域に対応する輸送障壁の付近では局所的に速度場は軸方向への依存性が弱くなっていることがわかる．また，レイノルズ数の増加とともに S_g は減少しており，このことが島領域の拡大に起因していることがわかる．ただし， $R_e = 150$ の場合には，速度場は局所的に非常に 2 次元的に近い分布になっているにもかかわらず (図 6(c))，ポアンカレ断面には島領域は存在しない (図 5(d))．これは，内部の周期軌道が R_e の増加に伴って不安定化するためである．したがって， S_g が局所的に小さい値をとることは，その場所に輸送障壁が存在するための必要条件に過ぎないことがわかる．

また，その他の 2 つの輸送障壁が存在する場所では， B が保存量となるような速度場に近いことが確認された． $|\nabla^2 \mathbf{u}| = 0$ となる領域では， B が保存量となることを考慮し，ここでは $S_d \equiv \frac{1}{R_e} |\nabla^2 \mathbf{u}|$ の分布を調べる．図 7 は $R_e = 30, 70, 150$ に対する S_d のポアンカレ断面と同じ断面上での分布を示している．図 5(b,c) との比較により， S_d が小さい領域に島領域が存在していること，そして， S_d もレイノルズ数の増加に伴って全体的に小さくなることがわかる．対応する 2 つの島領域がわずかに拡大することは S_d が減少することが原因であると考えられる．ただし， $R_e = 150$ の場合には S_d が非常に小さくなっているにもかかわらず (図 6(c))，島領域は存在しない (図 5(d))．このことから， S_d が局所的に小さな値をとることは， S_g の場合と同様に，その場所に輸送障壁が存在するための必要条件にすぎないことがわかる．

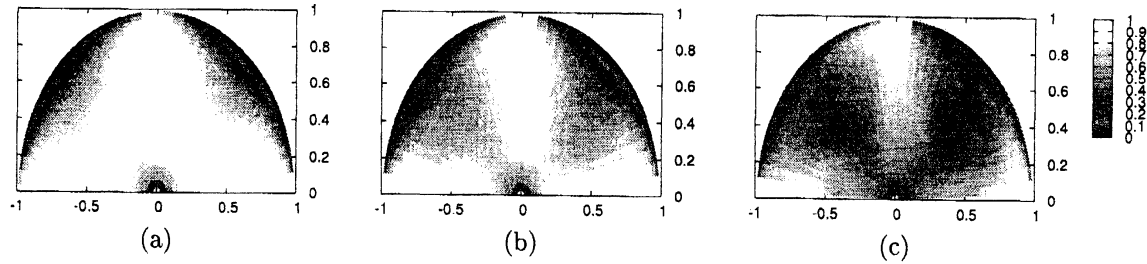


図 6: S_g の分布. (a) $Re=10$, (b) 30, (c) 150.

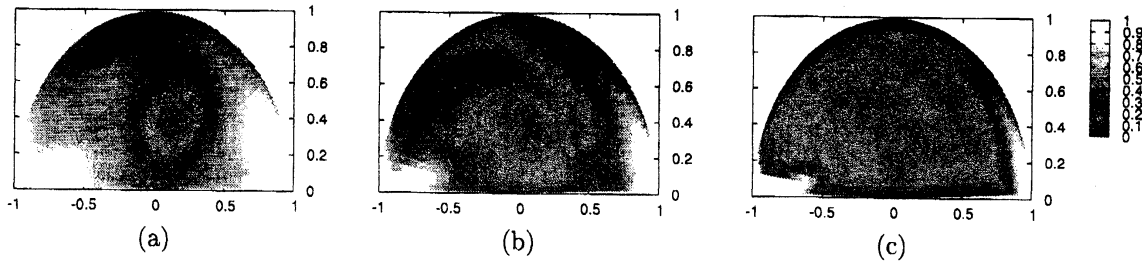


図 7: 断面 $z=0.5$ 上の S_d の分布. (a) $Re=30$, (b) 70, (c) 150.

5 まとめ

いくつかの異なる 3 次元定常流において、流体の混合の妨げとなる輸送障壁のレイノルズ数の変化に対する非単調な振る舞いが観察されている。そこで本研究では PPM に対して、速度場が局所的に対称性を有することと障壁が存在することが対応することに着目し、速度場のレイノルズ数への依存性を調べることで、レイノルズ数の変化に対する輸送障壁の変化を説明付けることを行った。その結果として、レイノルズ数の増加に伴い速度場の対称性が強くなる傾向があり、それが輸送障壁の拡大を引き起こしていることがわかった。この説明が他のシステムに現れる輸送障壁の振る舞いにも適用できるかどうかについては今後の課題である。

参考文献

- [1] Aref, H., J. Fluid Mech., vol.143, pp.1–21, 1984.
- [2] Ottino, J. M., Ann. Rev. Fluid Mech., vol.22, pp.207–253, 1990.
- [3] Aref, H. and El Naschie, M. S., *Chaos Applied to Fluid Mixing*, Pergamon, 1995.
- [4] Khakhar, D. V. *et al.*, Chem. Eng. Sci., vol.42, pp.2909–2926, 1987.
- [5] Harlow, F. H. and Welch, J. E., Phys. Fluids, vol.8 pp.2182–2189, 1965.
- [6] Fountain, G. O. *et al.*, J. Fluid Mech., vol.417, pp.265–301, 2000.
- [7] Hobbs, D. M. and Muzzio, F. J., Chem. Eng. J., vol.70, pp.93–104, 1998.
- [8] Mizuno Y. and Funakoshi M., J. Phys. Soc. Japan, vol.74, pp.1479–1489, 2005.
- [9] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1989.
- [10] Yannacopoulos, A.N. *et al.*, Phys. Rev. E, vol.57, pp.482–490, 1998.