

作用素の近似について

茨城大 エ 中本律男

1. H を可分な無限次元ヒルベルト空間とし、 H 上で act する有界な線形作用素の全体を B で表わす。 $\mathcal{S}$ を B の subset とするとき、 $T \in B$ に対して

$$dist(T, \mathcal{S}) = \inf \{ \|T - S\| ; S \in \mathcal{S} \}$$

を考える。特に、 $dist(T, \mathcal{S}) = \|T - S_0\|$ なる $S_0 \in \mathcal{S}$ が存在するとき、 S_0 は T の *best approximant* と呼ばれる。

すべての T に対して、*approximant* S_0 が存在するとき $\mathcal{S}$ は B で *proximal* と言われている。

C, IP, IH, IN をそれぞれ、*compact, positive, hermitian, normal operators* の全体で表わしておけば、 C, IP, IH は *proximal* であることがよく知られている [11; 8; 7] (最近、 IN が *not proximal* であることが [13] で証明されている。)。しかも $dist$ が具体的に、

$$dist(T, IP) = \inf \{ r \geq \|C\| ; B + (r^2 - C^2)^{1/2} \geq 0, \\ T = B + iC \}$$

$$\text{dist}(T, H) = \left\| \frac{T - T^*}{2} \right\|$$

で与えられ, *best approximant* として, P のときは,

$P_0 = B + (\delta(T)^2 - C^2)^{1/2}$ ($\delta(T) = \text{dist}(T, P)$), H では B とか $B \pm (\|C\|^2 - C^2)^{1/2}$ 等がとれる。これより H, P での近似は同様にして任意の C^* -algebra で可能である。

$\mathbb{C}$ の場合は後で少しふれることにする。

ところで, IN の場合は dist を論ずるのは難しい。その一つの理由として, IN は B で *closed, non-dense cone* であるが *convex* でないので通常の近似論が使えない。そこで Holmes の論文 [10] を中心にして, 特殊な場合を扱う。

2. $\text{dist}(T, \mathcal{S}) = \|T\|$ なるとき, 即ち, 0 を *best approximant* としてもつときを考える。 $\mathcal{S} = \mathbb{C}$ のとき, Coburn [6] によって, *extremely non-compact (anti-compact)* と呼ばれ, Toeplitz operator 等がこれに当る。 P, H では, それぞれ, [2] と [5] によりスペクトル $\sigma(T)$ で *characterize* されている。例えば H のとき, 0 を *approximant* にもつ必要十分条件は $i\|T\|$ か $-i\|T\|$ が $\sigma(T)$ に入る, ということになっている。

IN のとき $\text{dist}(T, IN) = \|T\|$ なる作用素 T は *antinormal* と呼ばれる ($\|T - \alpha N\| \geq \|T\|$, $\forall \alpha$: スカラー, $\forall N \in IN$ の意味で IN に直交している作用素と考えられる)。

まず、*antinormal* などの位の class をみる為に、
次の定理を示す。ここで $\text{ind } T$ を、

$$\text{ind } T = \dim \ker T - \dim \ker T^*,$$

(ただし、 $\dim \ker T = \dim \ker T^* = \infty$ のときは 0 とみなす) で定義すれば、

定理 1. $\text{ind } T = 0$ であれば $\text{dist}(T, N) \leq \frac{1}{2} \|T\|$ となり、その結果 T は *not-antinormal* である。

系 1. T が compact であれば T は $\text{dist}(T, N) \leq \frac{1}{2} \|T\|$ を満たし *not-antinormal* となる。

系 2. T が *antinormal* であれば $\sigma(T) = \{\lambda; |\lambda| \leq \|T\|\}$ となる。

註 1. $\sigma(T) = \{\lambda; |\lambda| \leq \|T\|\}$ で $\text{ind } T \neq 0$ なる *not-antinormal operator* T が簡単に作れる。

註 2. *finite von Neumann algebra* ではすべての作用素は *not-antinormal* である。これは *finite algebra* では *invertible operators* の全体が *norm dense* であることからわかる [3]。

次に、 U を *unitary operators* の全体とすれば、

定理 2. (Holmes [10]). $\text{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ であれば $\text{dist}(T, N) = \|T\|$ を満足する。

証明は簡単なノルムだけの計算で、任意の C^* -algebra で成し遂げることが出来る。

定理 2 の条件を満す例としては、 T を *non-unitary isometry* にとればよい。一オ [9] で、 T を *partial isometry* とすれば、 $0 \leq \text{dist}(T, IN) \leq \frac{1}{2}$ か $\text{dist}(T, IN) = 1$ であることが知られている。

そこで、Holmes は次の予想を与えた。

予想: (non-normal) subnormal partial isometry T は $\text{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ を満たし、その結果、 T は *antinormal* である。

また、別に問題として、次のものを考えている。

問題: ノルム 1 の *antinormal operator* は *partial isometry* か？

ところで、最近、Rogers [14] は $\text{dist}(T, U)$ を完全に決定した。(この中で U が *not-proximinal* であることも証明している。)

定理 3. (Rogers [14]).

$$(1) \quad \text{ind } T = 0 \Rightarrow \text{dist}(T, U) = \max \{ \|T\| - 1, 1 - m(T) \}$$

$$\text{ここで、} m(T) = \inf \{ \|Tx\|; \|x\| = 1, x \in H \},$$

$$(2) \quad \text{ind } T < 0 \Rightarrow \text{dist}(T, U) = \max \{ \|T\| - 1, 1 + m_e(T) \}$$

ここで、 $\mathcal{M}_e(T) = \inf \sigma_e(|T|)$ で $\sigma_e(\cdot)$ は Calkin algebra でのスペクトルを表わす。

$\text{ind } T > 0$ のときは、 T^* を考えればよい。

今、 $\text{dist}(T, U) = 1 + \|T\|$ とすれば、定理 3(2) より $\|T\| = \mathcal{M}_e(T)$ となり、 $\mathcal{M}_e(T) = \|T\| = \|\hat{T}\| \geq \|\hat{T}\|$ ($\hat{T}$ は Calkin image) で $\|\hat{T}\| = \mathcal{M}_e(T)$ を得る。
従って、問題については、 S を weight が全て 1 の unilateral shift, $0 < \alpha < 1$, K を有限次元のヒルベルト空間として、 $T = S \oplus \alpha (H \oplus K \text{ 上で})$ とおけば、 $\|T\| = 1 = \|\hat{T}\| = \mathcal{M}_e(T)$ となり、しかも T は antinormal である。

予想については、 T が non-normal subnormal partial isometry である必要十分条件は $T = V \oplus 0$ (V は non-unitary isometry) と直和に書ける、ということがよく知られている。そこで、例えば、上の S を使って、 $T = S \oplus 0 (H \oplus H \text{ 上で})$ とおけば $\text{ind } T = 0$ となり、 T は antinormal でない。このとき、 $T^*T = 1 \oplus 0$ で、 $\text{dist}(T, U) = 1$ になっている。また、 $\text{dist}(T, N) = \frac{1}{2}$ であることが容易に分かる。以上により、問題、予想、いずれも否定的である。

尚. Calkin algebra においては、定理に対応するものは、

$$-\infty < \text{ind } T < \infty \Rightarrow \text{dist}(\hat{T}, \hat{N}) \leq \frac{1}{2} \|\hat{T}\|$$

で、定理をもそのまま対応して成立する。

[14] において、Calkin algebra では、unitary elements の全体は proximal であることが証明されているが、normal elements の全体については未解決である。

3. 最後に、 $\mathbb{C}$ が B で proximal であることは、von Neumann algebra へ拡張される。

補題 (Zsido). $\mathcal{A}$ を von Neumann algebra とし、 J を norm closed two-sided ideal とする。
このとき、hermitian (positive) $H \in \mathcal{A}$ に対して、次の (i), (ii) を満足する $K \in J$ が存在する。

(i) $H + K$ は hermitian (positive) である。

(ii) $\sigma(H + K) = \sigma(\pi(H))$ 、ただし、 π は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/J$ への natural map とする。

定理 4. von Neumann algebra において、任意の norm closed two-sided ideal は proximal set である。

定理4は [1] にあいて C^* -algebra で既に解かれている。
 $B(H)$ にあいては、もっと強く、次が成立している。

定理5. (Chui, Smith, Smith & Ward). 任意の
 $T \in B$ に対して、 $\|T + K + \lambda\| = \|T + \lambda\|_e$ for $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,
 なる $K \in \mathbb{C}$ が存在する。

これは、[12] の予想：多項式 p に対して、 $\|p(T + K_p)\|$
 $= \|p(T)\|_e$ なる $K_p \in \mathbb{C}$ が存在する。と関連した興味深い
 結果である。尚、一般に C^* -algebra では、この予想が
 成立しないことが知られている。

References

- [1] C.A. Akemann, G.K. Pedersen and J. Tomiyama, Multipliers
 of C^* -algebras, J. Functional Analysis, 13(1972), 277-301.
- [2] T. Ando, T. Sekiguchi and T. Suzuki, Approximation by
 positive operators, Math. Z., 131(1973), 273-282.
- [3] H. Choda, An extremal property of the polar decomposition
 in von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 46(1970),
 341-344.
- [4] C.K. Chui, P.W. Smith, R.R. Smith and J.D. Ward, L-ideals
 and numerical range preservation, Ill. J. Math., 83(1977)
 , 365-373.
- [5] _____, _____ and J.D. Ward, Approximation with
 restricted spectra, Math. Z., 144(1975), 289-297.
- [7] K. Fan and J. Hoffman, Some metric inequalities in the
 space of matrices, Proc. A. M. S., 6(1955), 111-116.
- [8] P.R. Halmos, Positive approximant of operators, Indiana
 Univ. Math. J., 21(1972), 951-961.

- [9] _____ and J. McLaughlin, Partial isometries, Pacific J. Math., 13(1963), 585-596.
- [10] R.B. Holmes, Best approximation by normal operators, J. of Approximation Theory, 12(1974), 412-417.
- [11] _____ and B.R. Kripke, Best approximation by compact operators, Indiana Univ. Math. J., 21 (1971), 255-263.
- [12] C.L. Olsen and J.K. Plastiras, Quasialgebraic operators, compact perturbations and the essential norm, Michigan Math. J., 21(1974), 385-397.
- [13] D.D. Rogers, On proximinal sets of normal operators, Proc. A. M. S., 61(1976), 44-48.
- [14] _____, Approximation by unitary and essentially unitary operators, to appear in Acta Sci. Math.
- [15] L. Zsido, The Weyl-von Neumann theorem in semifinite factors, J. of Functional Analysis, 18(1975), 60-72.