

2

任意物体のまわりのおそい非定常流

東大 生研 成瀬文雄

§ 1. 序

おそい非定常流の研究は、従来、球または円柱が、(i) 静止の状態から出発して連続的に変化する速度 (C 型の速度) あるいは、(ii) 静止の状態から一定の速度へ階段的に変化する速度 (S 型の速度) で一定の方向に運動するような場合が、ストークス方程式またはオセーン方程式で取扱われている。

まず、球が S 型の速度で運動する場合に対して、C.W. Oseen¹⁾ はストークス近似で球に働く力を求めた。また M. Bendrich と T. Milton²⁾ はオセーン近似で球のまわりの流れの模様がどのように変っていくかを調べているが、球に働く力はストークス近似の範囲内に留まっている。球が C 型の速度で運動する場合に対して、A. B. Basset³⁾ が、ストークス近似で球に働く力を決定している。J. R. Ockendon⁴⁾ は非定常の度合いを示すパラメータ $M (l^2/\nu t_0)$, l : 物体の代表的長さ, t_0 : 時間

の尺度、 ν : 動粘性係数) が $O(R_e^{-2})$ ($R_e = l u_0 / \nu$, u_0 : 代表的速度) のときを選んで、オセーン近似でこの問題を解き、球に働く力を決定している。その他、橋本⁵⁾ は非定常オセーン方程式の基本解を求め、これを用いて、物体に働く力が与えられたときの速度の式を求めている。

次に、円柱がS型の速度で運動する場合について、桑原⁶⁾ はオセーン近似で取扱い、時間 t が小さいとき及び大きいときに対し、円柱に働く力を決定している。また、高木⁷⁾ はストークス近似で円柱に働く力を、任意の時間に対し決定している。

本研究は、3次元物体としては、その物体が定常運動をするときをストークス近似で解析し、その解が既知であるような物体、2次元物体としては、断面形の円への写像関数が既知であるような物体を考へ、これらの物体がC型の速度で運動する場合を取扱う。このような任意物体のまわりの流れの解析を、 $M = O(R_e^\alpha)$ ($\alpha > 0$) の場合に限って、ナゼエ・ストークス方程式の R_e 数展開法により、非定常効果の初項を解析し、物体に働く力を静止の状態から定常状態まで時間の全領域にわたって決定する。次に、例として選ばれた速度分布に対し、この式を用いて非定常効果を数値的に計算し、その結果を図で示す。さうに、3次元物体の理論は、多くの3次元物体が運動する場合に拡張される。

§ 2. 基礎方程式

長さ、速度、時間の尺度として、 l 、 U_0 、 t_0 を選び、速度 q^* 、位置ベクトル r^* 、時間 t^* 、圧力 p^* を

$$\frac{q^*}{U_0} = \bar{q}, \quad \frac{r^*}{l} = \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad \frac{t^*}{t_0} = \bar{t}, \quad \frac{p^* l}{\mu U_0} = \bar{p} \quad (2-1)$$

のように無次元化する。物体は $\bar{x}$ 方向を $U(\bar{t})$ の速度で動いているとし、物体の中心を座標原点にとり、無限遠静止の座標系を考へるとき、非定常ナビエ・ストークス方程式及び境界条件は次のようになる。

$$M \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + Re \left[-U(\bar{t}) \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} + \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} \right] = -\nabla \bar{p} + \Delta \bar{q}, \quad \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (2-2)$$

$$\begin{aligned} \bar{r} = f(\theta, \varphi) : & \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{q} = U(\bar{t}) \mathbf{e}_1, \quad \bar{r} \rightarrow \infty : \bar{q} \rightarrow 0, \quad \bar{t} = 0 : \bar{q} = 0 \end{array} \right. \\ \bar{r} = f(\theta) : & \end{aligned} \quad (2-3)$$

ここで

$$M = l^2 / \nu t_0, \quad Re = U_0 l / \nu \quad (2-4)$$

であり、 $\mathbf{e}_1$ は $\bar{x}$ 方向の単位ベクトル、また物体の形は3次元または2次元の場合、 $\bar{r} = f(\theta, \varphi)$ または $\bar{r} = f(\theta)$ で表わすものとする。以下において、次の事を仮定して議論を進める。

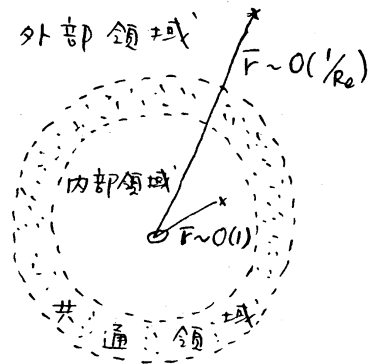
$$Re \ll 1, \quad M = K Re^\alpha \quad (\alpha > 0, K > 0) \quad (2-5)$$

§ 3. 非定常ナビエ・ストークス方程式の Re 展開法の概要

仮定(2-5)のもとに、(2-2)、(2-3)を Re 展開法で解き、非定常効果を求めようとするとき、定常の場合と違って、特に、

注意を要する。

定常の場合には、物体からの距離 $r \sim O(1)$ である内部領域及び $r \sim O(R_0^{-1})$ である外部領域に分けて、ミリッソ法で解かれる(第1図参照)。非定常の場合には、空間領域を分割することに加えて、時間領域を分割して解かねばならない。

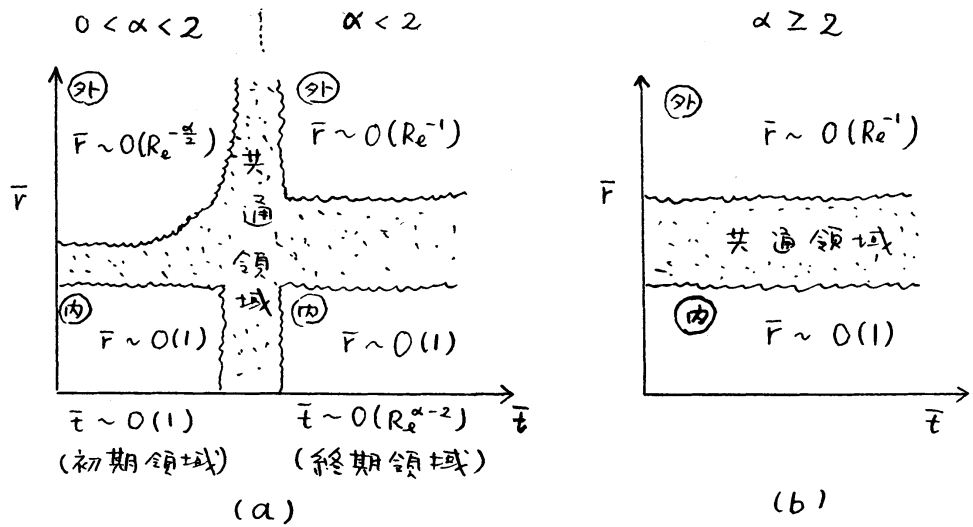


第1図

まず、 $0 < \alpha < 2$ の場合では、時間領域を $t \sim O(1)$ である初期領域と $t \sim O(R_0^{\alpha-2})$ である終期領域に分割する⁺。初期領域では $r \sim O(1)$ である内部領域と $r \sim O(R_0^{-\alpha})$ である外部領域に分割し、また、終期領域では $r \sim O(1)$ である内部領域と $r \sim O(R_0^{-1})$ である外部領域に分割し、時間、空間両方の共通領域でのマッチングを行って、展開の解を決定する。次に、 $\alpha \geq 2$ の場合では、時間領域に関する分割は不要で、定常の場合と同様、 $r \sim O(1)$ である内部領域と $r \sim O(R_0^{-1})$ である外部領域に分割して解けばよい。

以上の事を図に示すと、次頁の第2図のようになる。

非定常低レイノルズ数流れにおける時間的分割は、本論文とは異なった形で、文献(2)で示されている。筆者は本研究を遂行した後、文献(2)を読んで、異なった形ではあるが、時間的分割がなされていたのを知った。



第 2 図

第 2 図 (a) で、終期領域において $\alpha < 2$ となっているのは、終期領域の解は、 $0 < \alpha < 2$ の場合に限らず、 α のもっと広い範囲内で最終領域の解として有効であることが期待されるからである。

第 2 図に示されるように、初期領域と終期領域では外部領域の範囲が異なっている。従って展開のパラメーターも初期領域と終期領域では異なってくる。現在のように非定常効果の初項を考慮する場合には、まず初期領域の解が空間的共通領域のマッチングを考慮して解かれ、続いて終期領域の解が空間的および時間的両共通領域のマッチングを行って決定される。

§ 4. 3次元任意物体のあそび非定常運動

3次元物体として、初期領域では、その物体が定常運動を

するとこれをストークス近似で解析して、その解が既知である
ような物体を、終期領域では、前述の仮定を満たした上、さら
に軸対称性を持つ物体を考へ、(2-2), (2-3) を R_e 数展開で解
く。5.3 で述べられたように、 $0 < \alpha < 2$ の場合と $\alpha \geq 2$ の場
合では取扱いう法が異なるので、これらについて別々に考察
する。

[I] $0 < \alpha < 2$ の場合

(i) 時間について初期領域の解

時間 $t \sim O(1)$ の領域であるから、内外両域共に時間変数 t

$$t = \bar{t} \quad (4-1)$$

をとる。まず内部領域について考へる。内部領域は物体から
の距離 $r \sim O(1)$ の領域であるから、内部変数 $R(x, y, z)$ を

$$R(x, y, z) = \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (4-2)$$

と置く。展開のパラメータは $R_e^{1/2}$ であり、これにて $\bar{q}, \bar{p}$ を

$$\bar{q} = Q_0(R, t) + R_e^{1/2} Q_1(R, t) + \dots, \quad \bar{p} - p_\infty = P_0(R, t) + R_e^{1/2} P_1(R, t) + \dots \quad (4-3)$$

の如く展開し、(2-2), (2-3) に代入して、 Q_0, P_0, Q_1, P_1 に対して

$$\Delta Q_0 - \nabla P_0 = 0, \quad \nabla \cdot Q_0 = 0 \quad (4-4)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_0 = U(t)E_1; \quad R \rightarrow \infty : Q_0 = 0 \quad (4-5)$$

$$\Delta Q_1 - \nabla P_1 = 0, \quad \nabla \cdot Q_1 = 0 \quad (4-6)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : Q_1 = 0 \quad (4-7)$$

が得られる。(4-5)には定常流の時と同じ考へて、 $R \rightarrow \infty$ にか

8

ける Q_0 の境界条件が設定されている。(4-5)を満たす(4-4)の解は $R \gg 1$ で次のように形を持つ。

$R \gg 1$:

$$Q_0 \sim A U(t) \left(\frac{\hat{e}}{R} + \frac{(\hat{e} \cdot R) R}{R^3} \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad P_0 \sim \frac{2 A U(t) (\hat{e} \cdot R)}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad (4-8)$$

このとき物体に働く力はこのオーダーまで与えて

$$F = -8\pi A \mu_0 l U(t) \hat{e} \quad (4-9)$$

である。ここで $\hat{e}$ は単位ベクトルで、 $-\hat{e}$ が物体に働く力の方向を示す。なお、定常ストークス近似の解が既知であるとの仮定より、 A , $\hat{e}$ は既知であると与えてよい。

次に外部領域の解について与える。外部領域は $r \sim O(R_0^{-\frac{\alpha}{2}})$ の領域であるから、外部変数 $r(x, y, z)$ を

$$r(x, y, z) = R_0^{\frac{\alpha}{2}} \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (4-10)$$

の如く置いて、 $\bar{q}, \bar{p}$ を次のように展開し、

$$\bar{q} = R_0^{\frac{\alpha}{2}} q_1(r, t) + R_0^{\alpha} q_2(r, t) + \dots, \quad \bar{p} = R_0^{\alpha} (p_1(r, t) + R_0^{\frac{\alpha}{2}} p_2(r, t) + \dots) \quad (4-11)$$

(2-2), (2-3) に代入して、 q_1, p_1 に対する式が

$$\kappa \partial q_1 / \partial t = -\nabla p_1 + \Delta q_1, \quad \nabla \cdot q_1 = 0 \quad (4-12)$$

$$r \rightarrow \infty: q_1 \rightarrow 0, \quad p_1 \rightarrow 0, \quad t=0: q_1 = 0 \quad (4-13)$$

のようになる。なお、 $r \rightarrow 0$ における q_1, p_1 の形は、共通領域で(4.8)とのマッチングを与えて、次の形

$r \rightarrow 0$:

$$q_1 \rightarrow A U(t) \left(\frac{\hat{e}}{r} + \frac{(\hat{e} \cdot r) r}{r^3} \right), \quad p_1 \rightarrow \frac{2 A U(t) (\hat{e} \cdot r)}{r^3} \quad (4-14)$$

を保持する。 (4-13), (4-14) を満たす (4-12) の解は、
定常の場合と同じように、原点に集中力をおいた次の方程式
をフーリエ変換して解くことにより求められる。

$$k^2 \varphi_1 / \partial t - \Delta \varphi_1 = -\nabla p_1 + 8\pi A U(t) \delta(r) \hat{e}, \quad \nabla \cdot \varphi_1 = 0 \quad (4-15)$$

ここで $\delta(r)$ はデルタ関数である。 φ_1, p_1 のフーリエ変換 $\tilde{\varphi}, \tilde{p}$ を

$$\tilde{\varphi} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \tilde{p} = \iiint_{-\infty}^{\infty} p_1 \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4-16)$$

で定義するとき、(4-15) は次のようになる。

$$k^2 \tilde{\varphi} / \partial t = -i\tilde{p} k - k^2 \tilde{\varphi} + 8\pi A U(t) \hat{e}, \quad k \cdot \tilde{\varphi} = 0 \quad (4-17)$$

上式より $\tilde{p}$ は次のように求まる。

$$\tilde{p} = -i(8\pi A U(t) \hat{k} / k^2) \quad (4-18)$$

ここで $\hat{k} = (\hat{e} \cdot k) = l k_1 + m k_2 + n k_3$, ただし $(l, m, n), (k_1, k_2, k_3)$ は $\hat{e}, k$ の X, Y, Z 成分である。 (4-17), (4-18) より

$$\partial \tilde{\varphi} / \partial t + (k^2/k) \tilde{\varphi} = -8\pi A U(t) \hat{k} k / k^2 + 8\pi A U(t) \hat{e} / k \quad (4-19)$$

が得られ、この式を境界条件(4-13)を考慮して積分し

$$\tilde{\varphi} = -\frac{8\pi A}{k} \exp\left(-\frac{k^2 t}{k}\right) \int_0^t U(\tau) \exp\left(\frac{k^2 \tau}{k}\right) \left(\frac{\hat{k} k}{k^2} - \hat{e}\right) d\tau \quad (4-20)$$

の如くなる。(4-18), (4-20) を逆変換して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{A}{k\pi^2} \int_0^t U(\tau) d\tau \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-k^2(t-\tau)}{k} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right\} \left(\frac{\hat{k} k}{k^2} - \hat{e}\right) d\mathbf{k} \\ p_1 &= -\frac{i}{\pi^2} A U(t) \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{k}}{k^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \end{aligned} \right\} (4-21)$$

これよりさらに解析を進めるためには、 $r \rightarrow 0$ における Q_1 , P_1 の性質を知る必要がある。(4-21) より $r \rightarrow 0$ における Q_1 の振舞を求める計算は J. R. Ockendon の論文^{*)} の Appendix と同一の方法を用いて計算された。得られた結果は次の通りである。

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \\ Q_1 &\rightarrow A U(t) \left[\frac{\hat{e}}{r} + \frac{(\hat{e} \cdot r)r}{r^2} \right] - \frac{4}{3} A \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \left[\int_0^t \frac{dU/d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \right] (l e_1 + m e_2 + n e_3) \\ P_1 &\rightarrow 2 A U(t) (\hat{e} \cdot r) / r^3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{---(4-22)}$$

共通領域での Q_1, P_1 と Q_0, P_0, Q_1, P_1 のマッチングから、 $R \rightarrow \infty$ における Q_1, P_1 の境界条件が次のように得られる。

$$R \rightarrow \infty: \quad Q_1 \rightarrow A G_1 (l e_1 + m e_2 + n e_3), \quad P_1 \rightarrow 0 \quad (4-23)$$

$$G_1 = -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^t \frac{dU/d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (4-24)$$

ここで、境界条件 (4-7), (4-23) を満たす (4-6) の解を次のようにして求めることができる。いま考えている物体が圧力 p_∞ の静止流体中を U_k ($k=1, 2, 3$, 夫々 x, y, z 方向の単位ベクトル) の速度で運動した時の、流体の速度、圧力及び物体に働く力が夫々 V_k, π_k, F_k ($k=1, 2, 3$) であるとする (これらの値は定常ストークス近似の解が既知であるとの仮定より知られていると考えてよい)。このとき Q_1, P_1 は

$$\begin{aligned} Q_1 &= -A G_1 (l V_1 + m V_2 + n V_3) \\ P_1 &= -A G_1 \{ l (\pi_1 - p_\infty) + m (\pi_2 - p_\infty) + n (\pi_3 - p_\infty) \} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{---(4-25)}$$

となる。また、このオーグメントで誘起される力 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = R_e^{\frac{\alpha}{2}} A G_1 (l \mathcal{F}_1 + m \mathcal{F}_2 + n \mathcal{F}_3) \quad (4-26)$$

となる。いま、 $\mathcal{F}_i$ の x, y, z 成分を F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} 、 $\mathcal{F}_i$ の絶対値を F_i とすると、 l, m, n, A は次のようになる。

$$l = -F_{ix}/F_i, \quad m = -F_{iy}/F_i, \quad n = -F_{iz}/F_i, \quad A = F_i/8\pi\mu U_0 l \quad (4-27)$$

(4-9), (4-26), (4-27) から物体に働く力 $\mathcal{F}$ は $O(\sqrt{M})$ まで与えて、

$$\mathcal{F} = U(t) \mathcal{F}_1 + (\sqrt{M}/k G_1/8\pi\mu U_0 l) (F_{ix} \mathcal{F}_1 + F_{iy} \mathcal{F}_2 + F_{iz} \mathcal{F}_3) \quad (4-28)$$

のように決定できる。ここで G_1 は (4-24) で与えられている。

物体が球である場合には、(4-28) は Basset の結果^{3), 4)} と必要な精度において一致している。

(ii) 時間について終期領域の解

この領域では、物体の形に対する仮定として、物体が定常運動をするとそのストークス近似の解が既知であるという仮定に、物体は真対称の形を持つという仮定を追加する。この領域は時間について $O(R_e^{\alpha-2})$ の領域であるから時間変数 $\hat{t}$ を

$$\hat{t} = R_e^{2-\alpha} \bar{t} \quad (4-29)$$

と置く。まず内部領域について与えて見よう。内部変数 R は (4-2) と同様に与える。展開のパラメータは R_e であり、 $\bar{q}, \bar{p}$ を

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \hat{Q}_0(R, \hat{t}) + R_e \hat{Q}_1(R, \hat{t}) + R_e^2 \log R_e \hat{Q}_2(R, \hat{t}) + \dots \\ \bar{p} - p_\infty &= \hat{P}_0(R, \hat{t}) + R_e \hat{P}_1(R, \hat{t}) + R_e^2 \log R_e \hat{P}_2(R, \hat{t}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4-30)$$

のように展開し、(2-2), (2-3) に代入するとき、

$$\Delta \hat{Q}_0 - \nabla \hat{P}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \hat{Q}_0 = 0 \quad (4-31)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : \hat{Q}_0 = U(\hat{r}) \hat{e}, \quad R \rightarrow \infty : \hat{Q}_0 = 0 \quad (4-32)$$

$$\Delta \hat{Q}_1 - \nabla \hat{P}_1 = -U(\hat{r}) \frac{\partial \hat{Q}_0}{\partial x} + \hat{Q}_0 \cdot \nabla \hat{Q}_0, \quad \nabla \cdot \hat{Q}_1 = 0 \quad (4-33)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : \hat{Q}_1 = 0 \quad (4-34)$$

$$\Delta \hat{Q}_2 - \nabla \hat{P}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \hat{Q}_2 = 0 \quad (4-35)$$

$$R = f(\theta, \varphi) : \hat{Q}_2 = 0 \quad (4-36)$$

が得られる。(4-32)を満たす(4-31)の解は、(4-8)と同様で、

$R \gg 1$:

$$\hat{Q}_0 \sim A U(\hat{r}) \left(\frac{\hat{e}}{R} + \frac{(\hat{e} \cdot R)}{R^3} R \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \hat{P}_0 \sim \frac{2 A U(\hat{r}) (\hat{e} \cdot R)}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad (4-37)$$

の形を持ち、物体に働く力 F は、このオーダーまで与えて

$$F = -8\pi A \mu U_0 l U(\hat{r}) \hat{e} \quad (4-38)$$

である。また、(4-37)は時間の共通領域で(4-9)とマッチングしていることが分る。内部解は定常ストークス方程式の解であるから、物体に働く力の時間的マッチングによって内部解の時間的マッチングが保証される。

次に外部領域の解について考えて見よう。外部領域が $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ の領域であることを考慮して、外部変数 $\bar{r}$ を

$$\bar{r}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = R_e \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (4-39)$$

と置き、 $\bar{Q}, \bar{P}$ を次の如く R_e で展開する。

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= R_e \hat{Q}_1(\bar{r}, \bar{t}) + R_e^2 \hat{Q}_2(\bar{r}, \bar{t}) + \dots \\ \bar{P} - P_\infty &= R_e^2 \hat{P}_1(\bar{r}, \bar{t}) + R_e^3 \hat{P}_2(\bar{r}, \bar{t}) + \dots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{Q} &= R_e \hat{Q}_1(\bar{r}, \bar{t}) + R_e^2 \hat{Q}_2(\bar{r}, \bar{t}) + \dots \\ \bar{P} - P_\infty &= R_e^2 \hat{P}_1(\bar{r}, \bar{t}) + R_e^3 \hat{P}_2(\bar{r}, \bar{t}) + \dots \end{aligned}} \right\} \quad (4-40)$$

これを (2-2), (2-3) に代入すると、 $\hat{q}_1, \hat{p}_1$ に対する式

$$\kappa \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_1 + \nabla \hat{p}_1 - U(\hat{r}) \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{q}_1 = 0 \quad (4-41)$$

$$\hat{r} \rightarrow \infty : \hat{q}_1 \rightarrow 0, \quad \hat{p}_1 \rightarrow 0 \quad (4-42)$$

が得られる。空間的共通領域で (4-37) とマッチングする上記

の解は、初期領域の解と同じように、原点に集中力のあつた式

$$\kappa \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_1 - U(\hat{r}) \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{x}} = -\nabla \hat{p}_1 + 8\pi A U(\hat{r}) \delta(\hat{r}) \hat{e}, \quad \nabla \cdot \hat{q}_1 = 0 \quad (4-43)$$

をフーリエ変換して解けばよい。また、 $\hat{t} = 0$ における $\hat{q}_1$ の条件は、 $r \sim O(1/R_e)$ における (4-21) の振舞を調べるとき

$$\hat{t} = 0 : \hat{q}_1 = 0 \quad (4-44)$$

の初期条件で解けばよいことが分る。(4-15) の場合と同様に

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= -\frac{A}{\kappa \pi^2} \int_0^{\hat{t}} U(\hat{\tau}) d\hat{\tau} \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k^2(\hat{t}-\hat{\tau})}{\kappa} + i k_1(S(\hat{t})-S(\hat{\tau})) + i k_1 r\right\} \left(\frac{\hat{k} k}{k^2} - \hat{e}\right) dk \\ \hat{p}_1 &= -\frac{i}{\pi} A U(\hat{t}) \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{k}}{k^2} \exp(i k_1 r) dk \end{aligned} \quad (4-45)$$

が得られる。ここで

$$S(\hat{t}) = \frac{1}{\kappa} \int_0^{\hat{t}} U(\hat{\tau}) d\hat{\tau} \quad (4-46)$$

である。 $\hat{r} \rightarrow 0$ における $\hat{q}_1$ の振舞は、再び文献(4)の Appendix

と同一の方法により次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{r} \rightarrow 0 : \quad \hat{q}_1 &\Rightarrow A \left[U(\hat{t}) \left\{ \frac{\hat{e}}{\hat{r}} + \frac{(\hat{e} \cdot \hat{r})}{\hat{r}^3} \hat{r} \right\} + U^2(\hat{t}) \left\{ \frac{\ell}{4\hat{r}} \hat{r} - \frac{3\hat{x}}{4\hat{r}} \hat{e} + \frac{(\hat{e} \cdot \hat{r})}{4\hat{r}} \hat{e}_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hat{x}(\hat{e} \cdot \hat{r})}{4\hat{r}^3} \hat{r} \right\} + \ell \hat{G}_1 \hat{e}_1 + m \hat{G}_2 \hat{e}_2 + n \hat{G}_3 \hat{e}_3 \right] \\ \hat{p}_1 &\rightarrow 2 A U(\hat{t}) (\hat{e} \cdot \hat{r}) / \hat{r}^3 \end{aligned} \quad (4-47)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}_1 &= \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \left(\hat{E} - \frac{\gamma}{3} \hat{D} \right), \quad \hat{G}_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \left(\hat{H} - \frac{1}{2} \hat{E} - \frac{\gamma}{3} \hat{D} \right), \\ \hat{D} &= \int_0^{\hat{t}} \frac{dU/d\hat{t}}{(\hat{t}-\hat{\tau})^{\frac{1}{2}}} d\hat{\tau}, \quad \hat{E} = \int_0^{\hat{t}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{4\hat{s}}} \phi(\sqrt{\hat{s}}) - \exp(-\hat{s}) - \frac{2}{3}\hat{s} \right\} \frac{U(\hat{\tau}) d\hat{\tau}}{\hat{s}(\hat{t}-\hat{\tau})^{\frac{1}{2}}}, \\ \hat{H} &= \int_0^{\hat{t}} \left\{ \exp(-\hat{s}) - 1 \right\} \frac{U(\hat{\tau}) d\hat{\tau}}{(\hat{t}-\hat{\tau})^{\frac{1}{2}}}, \quad \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \\ \hat{s} &= \left[\int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}} U(\hat{t}') d\hat{t}' \right]^2 / 4\kappa(\hat{t}-\hat{\tau}) \end{aligned} \right\} \quad (4-48)$$

これらの解は、 $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ の $\hat{t} \rightarrow 0$ における性質を調べることによって、時間の共通領域で (4-22) と必要なオ-グ-にマッチングしてゐることを確認することが出来る。(4-47) から $\hat{Q}_1$ の $R \rightarrow \infty$ に対する境界条件が次のように得られる。

$$R \rightarrow \infty: \hat{Q}_1 \rightarrow I + K, \quad \hat{P}_1 \rightarrow 0 \quad (4-49)$$

ここで

$$I = A U^2(\hat{t}) \left\{ \frac{l}{4R} R - \frac{3X}{4R} \hat{G} + \frac{(\hat{E} \cdot R) \mathbf{e}_1}{4R} - \frac{X(\hat{E} \cdot R) R}{4R^3} \right\} \quad (4-50)$$

$$K = A (l \hat{G}_1 \mathbf{e}_1 + m \hat{G}_2 \mathbf{e}_2 + n \hat{G}_2 \mathbf{e}_3)$$

境界条件 (4-34), (4-49) を満たす $\hat{Q}_1, \hat{P}_1$ の解を得たので、

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{12}, \quad \hat{P}_1 = \hat{P}_{11} + \hat{P}_{12} \quad (4-51)$$

と置いて、(4-33) を次の如く分解する。

$$\Delta \hat{Q}_{11} - \nabla \hat{P}_{11} = -U(\hat{t})^2 \hat{Q}_0 / X + \hat{Q}_0 \nabla \hat{Q}_0, \quad \nabla \cdot \hat{Q}_{11} = 0 \quad (4-52)$$

$$R \rightarrow \infty: \hat{Q}_{11} \rightarrow I, \quad \hat{P}_{11} \rightarrow 0, \quad R = f(\theta, \varphi): \hat{Q}_{11} = 0 \quad (4-53)$$

$$\Delta \hat{Q}_{12} - \nabla \hat{P}_{12} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{Q}_{12} = 0 \quad (4-54)$$

$$R \rightarrow \infty: \hat{Q}_{12} \rightarrow K, \quad \hat{P}_{12} \rightarrow 0, \quad R = f(\theta, \varphi): \hat{Q}_{12} = 0 \quad (4-55)$$

(4-53) を満たす (4-52) の解は定常のときと全く同一で、時間 $\hat{t}$

は $U(\hat{t})$ の中にパラメータとして入っているだけである。従って、真対称な物体、すなわち、流れの方向を逆転したときに物体に働く力の方向も逆転するような物体では、 $\hat{Q}_{11}$ の流れは物体に力を及ぼさず ($\hat{Q}_{11}$ は流れの方向を逆転したときに、全然変化をしないから)。⁸⁾ (4-55) を満たす (4-54) の解は、(4-7), (4-23) を満たす (4-6) の解と同じように求まることのでき、物体に働く力 F は次のように $O(R_e)$ まで決定される。

$$F = U(\hat{t}) F_1 + (R_e / 8\pi\mu U_0 l) [\hat{G}_1 F_{1x} F_1 + \hat{G}_2 (F_{1r} F_2 + F_{1z} F_3)] \quad (4-56)$$

ただし、 $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ は (4-48) で与えられるものである。

(4-35) を満たす $\hat{Q}_e$ に対する $R \rightarrow \infty$ の境界条件を決定し、(4-35) を解いて $O(R_e^2 \log R_e)$ まで抵抗を決定することは、定常の場合と全く同様である。従って、 $O(R_e^2 \log R_e)$ の抵抗は定常の場合の結果⁸⁾ がそのまま使え、物体に働く力 F は $O(R_e^2 \log R_e)$ まで

$$F = U(\hat{t}) F_1 + (R_e / 8\pi\mu U_0 l) [\hat{G}_1 F_{1x} F_1 + \hat{G}_2 (F_{1r} F_2 + F_{1z} F_3)] \quad (4-57) \\ + \frac{(R_e^2 \log R_e) U^3(\hat{t})}{(8\pi\mu U_0 l)^2} \left[\left(\frac{31}{60} F_{1x}^2 - \frac{7}{60} F_1^2 \right) F_1 + \frac{31}{60} F_{1x} (F_{1r} F_2 + F_{1z} F_3) \right] + O(R_e^3)$$

のまゝに決定できる。

なお、物体の形に対して与えられていた、真対称の仮定を排除し、その代り定常運動のときの R_e 級展開の解が $O(R_e)$ まで既知であるという仮定でも解くことができる。この場合、時間 $\hat{t}$ での速度を持つ定常運動のときの物体に働く力 F_s が

$$F_s = U(\hat{t}) F_1 + R_e F_R / 8\pi\mu U_0 l \quad \text{の如く } O(R_e) \text{ まで既知である}$$

とすれば、"そのまま"に与えられた方法と同じ方法を用いて、物体に働く力 F を $O(R_e)$ まで、次のように決定できる。

$$F = U(\bar{t}) F_1 + (R_e / 8\pi\mu U_0 l) [F_R + (\hat{G}_1 + U^2(\bar{t})/2) F_{1x} F_1 + (\hat{G}_2 + 3U^2(\bar{t})/4) \times (F_{1x} F_2 + F_{12} F_3)] \quad (4-58)$$

以上のようにして得られた終期領域の解は $0 < \alpha < 2$ の場合のみならず、 $\alpha \geq 0$ の場合や S 型の速度分布の場合でも、最終領域の解として有効であることが期待される。また上述の式に含まれる $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ は $\bar{t} \rightarrow 0$ するやち時間の共通領域で

$$\hat{G}_1 \rightarrow R_e^{\frac{\alpha}{2}-1} G_1, \quad \hat{G}_2 \rightarrow R_e^{\frac{\alpha}{2}-1} G_2 \quad (4-59)$$

を確かめることができる。これらから、(4-56) ~ (4-58) は (4-28) と時間の共通領域で必要精度において、マッチングしてゐることが分る。

(iii) $U(\bar{t}) = 1 - (1 + \bar{t})^{-\beta}$ ($\beta > 0$) の場合

上記の速度分布においては、非定常効果を表わす $G_1, \hat{G}_1, \hat{G}_2$ は $t \ll 1, t \gg 1, \bar{t} \ll 1, \bar{t} \gg 1$ のとき次の振舞を示す。

$$\left. \begin{aligned} t \ll 1: G_1 &= -(\frac{4}{3})\sqrt{\frac{K}{\pi}}\beta t^{\frac{1}{2}} \{ 2 - (\frac{4}{3})(\beta+1)t + (\frac{8}{15})(\beta+1)(\beta+2)t^2 + \dots \} \\ t \gg 1: G_1 &= -(\frac{4}{3})\sqrt{\frac{K}{\pi}} \{ t^{-\frac{1}{2}} + \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2(\beta-1)} + \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (4-60)$$

$$\bar{t} \ll 1: \hat{G}_1 = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{K}{\pi}}\bar{t}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{20}\frac{\bar{t}}{K} - \frac{1}{224}\frac{\bar{t}^2}{K^2} + \dots \right), \quad \hat{G}_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{K}{\pi}}\bar{t}^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{10}\frac{\bar{t}}{K} - \frac{3}{224}\frac{\bar{t}^2}{K^2} + \dots \right) \quad (4-61)$$

$$\bar{t} \gg 1: \hat{G}_1 = -\frac{1}{2} - 2K^2/\bar{t}^2 + \dots, \quad \hat{G}_2 = -\frac{3}{4} + K^2/\bar{t}^2 + \dots \quad (4-62)$$

特に、 $K=1, \beta=2$ の場合について、 G_1 と t との関係、及び $\hat{G}_1$,

$\hat{G}_2$ と $\hat{t}$ との関係が第3図に示されている。ここで図の右端に鎖線で示されている値は $\hat{t} \rightarrow \infty$ の値である (以下の図も同じ)。 (4-60) ~ (4-62) 及び第3図から次の事が分る。

(1) 初期解と終期解は時間の共通領域で、必要の精度でマッチングをしている。

(2) 終期解は $\hat{t} \rightarrow \infty$ で定常解と一致する。

(3) 物体に働く力 (4-28), (4-56) 及びいま考えている瞬間の速度を持つ定常流の場合での物体に働く力、この両者を比べて見るとき、次のような現象が見出される。時間的に単調に増加するような速度を持つ現在の例において、抵抗は常に前者が大きい値を持つが、揚力は $\hat{t}$ の大きい領域では後者が大きい値を持つ。

(4) 時間の全領域にわたって有効な解として、(i), (ii) から

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{t}) = U(\bar{t})\mathcal{F}_1 + \frac{1}{8\pi\mu U_\infty l} \left[\left\{ R_e^{\frac{\alpha}{2}} \left(G_1 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \right) + R_e \hat{G}_1 \right\} F_{1x} \mathcal{F}_1 \right. \\ \left. + \left\{ R_e^{\frac{\alpha}{2}} \left(G_1 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \right) + R_e \hat{G}_2 \right\} (F_{1r} \mathcal{F}_2 + F_{1z} \mathcal{F}_3) \right] \quad (4-63) \end{aligned}$$

が得られる。

(II) $\alpha \geq 2$ の場合

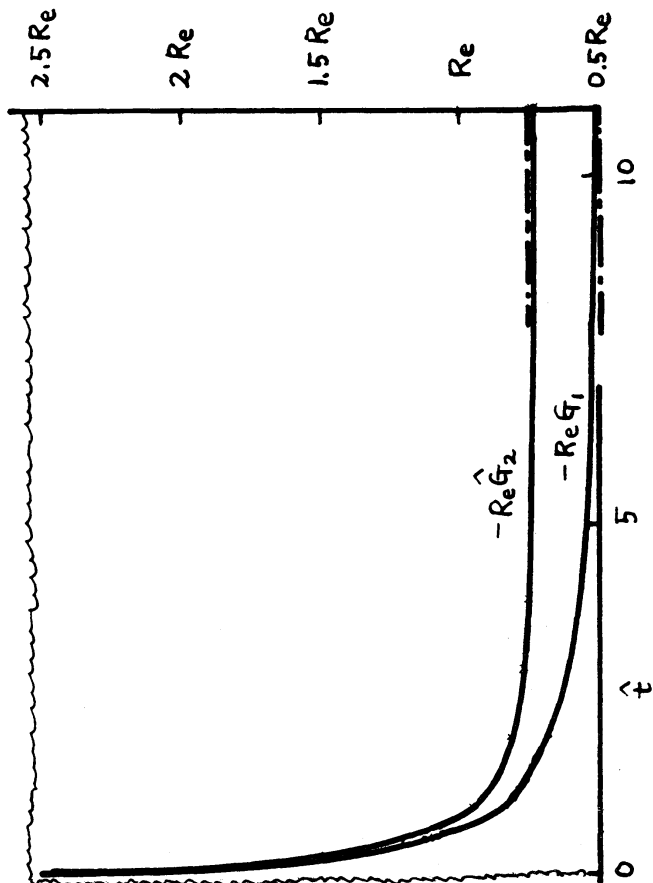
$0 < \alpha < 2$ の場合の終期領域の解で $\hat{t} = t = \bar{t}$ とおけば、この解が時間の全領域にわたって有効であり、(I) の場合の初期領域の解がなくなる。いま、物体の形に対する終期領域の仮定

$$(b) \quad \hat{t} \sim O(1)$$

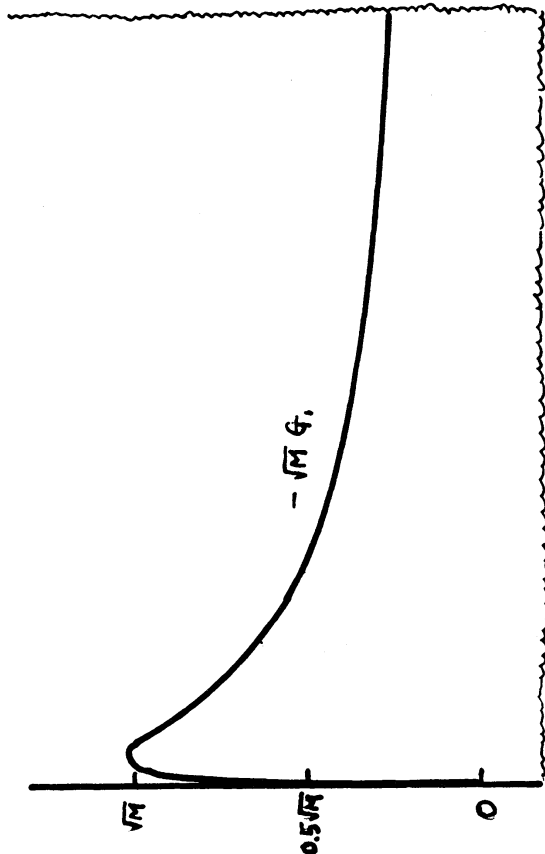
$$F(\hat{t}) = U(\hat{t}) F_1 + \frac{Re}{8\pi\mu U_0 Q} \left[\hat{G}_1 F_{1x} F_1 + \hat{G}_2 (F_{1y} F_2 + F_{1z} F_3) \right] + O(Re^2 \log Re)$$

$$\hat{t} = Re^{2-\alpha} t$$

共通領域



第3図



$$U = 1 - \frac{1}{(1+t)^2}, \quad K=1 \quad (a) \quad t \sim O(1)$$

$$F(t) = U(t) F_1 + \frac{\sqrt{M} G_1}{8\pi\mu U_0 Q} (F_{1x} F_1 + F_{1y} F_2 + F_{1z} F_3) + O(M)$$

定常ストークス方程式の解

物体の速度 物体に働く力

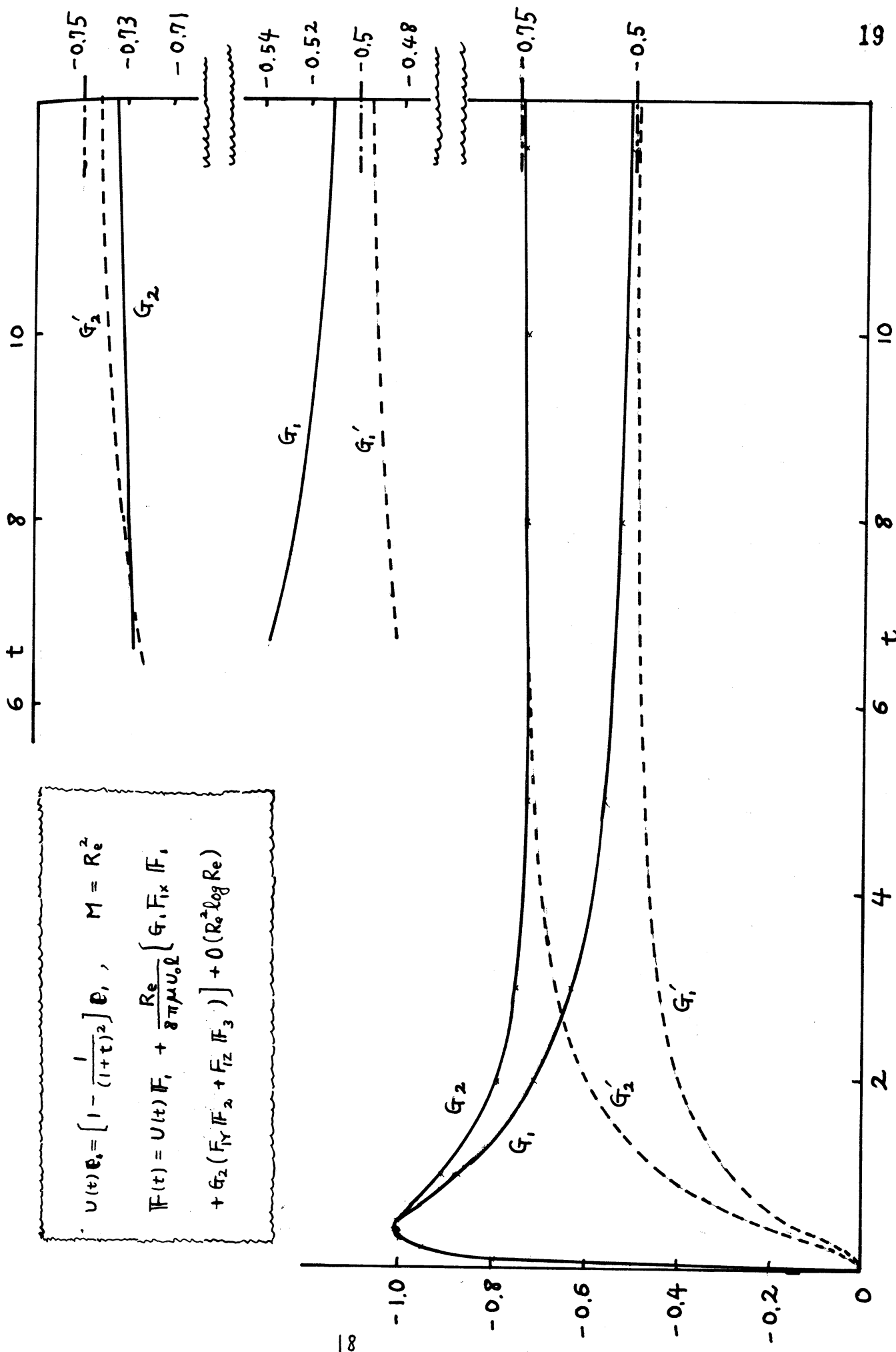


e_x F_1
 e_y F_2
 e_z F_3

F_1 の X, Y, Z 成分: F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}

$$U(t) \mathbf{e}_1 = \left[1 - \frac{1}{(1+t)^2} \right] \mathbf{e}_1, \quad M = R_0^2$$

$$\mathbf{F}(t) = U(t) \mathbf{F}_1 + \frac{R_0}{8\pi\mu U_0 L} \left\{ G_1 \mathbf{F}_1 + G_2 \left(\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \right) \right\} + O(R_0^2 \log R_0)$$



第 4 图

するわけに定常ストークス近似の解が既知及び対称性を仮定し、(4-57), (4-48) の $U(\mathbf{r})$, $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$, $\hat{E}$, $\hat{H}$, $\hat{D}$, $\hat{J}$ の中に現われる $\hat{t}$, $\hat{\tau}$, $\hat{t}'$, $\hat{\tau}'$ を夫々 t , τ , t' , τ' と書き、 $\hat{G}_1, \dots, \hat{J}$ を $G_1, \dots, J$ と書換之れば (4-57), (4-48) が時間の全領域にわたって有効である。もし物体が球であれば、これらの式は J.R. Ockendon によって得られている結果⁴⁾と一致する。また物体の形に対する対称性の仮定を取除いた場合の式 (4-58) についても (4-57), (4-48) と同様のことが成立つ。

再び (I), (iii) の速度分布の場合には

$$t \ll 1: \quad \left. \begin{aligned} G_1 &= -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \beta t^{\frac{1}{2}} \left[2 - \frac{4}{3} (\beta+1)t + \frac{8}{15} (\beta+1)(\beta+2)t^2 + \dots \right] \\ G_2 &= -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \beta t^{\frac{1}{2}} \left[2 - \frac{4}{3} (\beta+1)t + \frac{8}{15} (\beta+1)(\beta+2)t^2 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-64)$$

$$t \gg 1: \quad G_1 = -\frac{1}{2} + t^{-\beta} - 2\kappa^2 t^{-2} + \dots, \quad G_2 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} t^{-\beta} + \kappa^2 t^{-2} + \dots \quad (4-65)$$

が成立する。特に $\kappa=1$, $\beta=2$ の場合の G_1 , G_2 と t の関係を第4図で示す。この図の点線で示されている G_1' , G_2' は次の意味を持つ。いま考えている瞬間の速度を持つ定常流の場合に物体に働く力は、 G_1 , G_2 の代りに G_1' , G_2' を代入すれば得られる事を示す。以上の結果から、 $\alpha \geq 2$ の場合において、 $0 < \alpha < 2$ の場合の (ii) の (2), (3) がそのまま成立することが分る。

§5. 3次元物体が運動する場合に対する種々の拡張

まず初期領域において、1個の3次元物体が任意の方向に運動する場合と多くの3次元物体が任意の方向に運動する場合への拡張がなされる。次に終期領域において多くの3次元物体が運動する場合を議論する。

(I) $0 < \alpha < 2$ の場合の初期領域における拡張

(i) 1個の3次元物体が任意の方向へ運動する場合

物体の速度 $V(t)$ を次のように分解する。

$$V(t) = V_1(t)e_1 + V_2(t)e_2 + V_3(t)e_3 \quad (5-1)$$

初期領域の基礎方程式は(4-4)、(4-6)、(4-12)で示されるように、ストークス方程式である。従って、物体に働く力は、物体が e_1, e_2, e_3 各方向を夫々 $V_1(t), V_2(t), V_3(t)$ の速度で運動した場合に働く力(4-28)を重ね合わせることにによって得られる。いま、 $F_i (i=1, 2, 3)$ を §4, (I) (i) で定義された通り用いるとき、この場合の物体に働く力 F は $\sqrt{M}$ のオーダーまで求めて、

$$F = F_0 - \frac{\sqrt{M}}{6\pi^{1/2}\mu_0 l} \left(\int_0^t \frac{dF_0/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \right) \cdot (e_1 F_1 + e_2 F_2 + e_3 F_3) \quad (5-2)$$

ここで

$$F_0 = V_1(t)F_1 + V_2(t)F_2 + V_3(t)F_3$$

で与えられる。

(ii) 多くの物体が任意の方向に運動する場合

m 個の物体が内部領域で任意の方向に運動している場合を

考える。いま上記の場合を定常ストークス方程式で解いて、 i 物体に働く力を F_0^i で定義し、これは既知であると考える。

内部、外部両領域の共通領域において、 i 物体によって誘起される e_k ($k=1, 2, 3$) 方向の速度は、(5-2) を参考にして、

$$\frac{\sqrt{M}}{6\pi^{3/2}\mu U_0 l} \left(\int_0^t \frac{dF_0^i/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \right) \cdot e_k \quad (5-3)$$

で与えられる。基礎方程式は前述の如くストークス方程式であるから、 m 個の物体によって誘起される速度は個々の物体の運動によって誘起される速度を重ね合わせることに、

$$\frac{\sqrt{M}}{6\pi^{3/2}\mu U_0 l} \left(\int_0^t \frac{dF_0/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \right) \cdot e_k \quad (5-4)$$

ここで

$$F_0 = \sum_{i=1}^m F_0^i \quad (5-5)$$

のように得られる。いま考えている m 個の物体が、そのまゝの位置関係を保ちながら、すべて同一の速度 e_k ($k=1, 2, 3$) で運動しているとそのストークス近似の解が既知であるとし、このときの i 物体に働く力を F_k^i ($k=1, 2, 3$) で表わす。上記のように定義された F_0^i , F_k^i を用い、(5-4) を考慮して、 i 物体に働く力 F^i は次のように与えられる。

$$F^i = F_0^i - \frac{\sqrt{M}}{6\pi^{3/2}\mu U_0 l} \left(\int_0^t \frac{dF_0/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \right) \cdot (e_1 F_1^i + e_2 F_2^i + e_3 F_3^i) \quad (5-6)$$

なお、(5-6) は m 個の物体が内部領域にあることを仮定して

証明した。しかし、別の証明法（長くなることを避けるため省略する）によれば、 i 物体と j 物体の間隔を R_{ij} とするとき、 $R_{ij}^2 M \ll 1$ の条件さえあれば (5-6) は成立つ。従って、 m 個の物体の存在範囲を共通領域を含めた内部領域と看做しても (5-6) は成立する。

(II) $0 < \alpha < 2$ の場合の終期領域における拡張

m 個の物体が内部領域にある場合を考へる。1 個の物体の場合には物体の形に対する点対称の仮定より、(4-52) を満たす $\hat{Q}_{||}$ が物体に働く力に寄与するのことが利用されたが、 m 個の物体の運動の場合、このような点対称性の仮定が難しくなる。従って、定常運動のときの R_e 数展開の解が $O(R_e)$ まで既知と仮定して話を進めよう。

内部領域を支配する方程式は定常ストークス方程式である。

i 物体の速度 $\bar{v}^i$ を次のように分け

$$\bar{v}^i = \psi^i(\vec{r}) + \omega(\vec{r}) \quad (i=1, \dots, m) \quad (5-7)$$

ψ^i で運動する場合と物体による速度 $\omega(\vec{r})$ で運動する場合の重ね合せと考へる。いま、 m 個の物体が $\psi^1(\vec{r}), \dots, \psi^m(\vec{r})$ 及び m 個の物体が同一の速度 $\omega(\vec{r})$ で運動する場合を、夫々定常ストークス近似で解いて、その解が既知であるとし、 i 物体に働く力を π_{01}^i, π_{02}^i と書く。ここで $\sum_{i=1}^m \pi_{01}^i = 0$ となるように ψ^i 及び $\omega(\vec{r})$ を選ぶ。このような条件がかけられるとき、物

体の速度 $\bar{q}^i(t)$ が与えられれば $v^i(t)$ 及び $\omega(t)$ は一義的に決まる。 $v^i(t)$ による運動は $\sum_{i=1}^m F_{0i}^i = 0$ であるから、外部解に影響を及ぼさない。いま、 F_0^i 及び F_0 を

$$F_0^i = F_{01}^i + F_{02}^i, \quad F_0 = \sum_{i=1}^m F_0^i = \sum_{i=1}^m F_{02}^i \quad (5-8)$$

の如く定義し、仮定からこれは既知であると存する。

このような流れの外部解に及ぼす影響は F_0 の力を受ける 1 個の物体が運動してゐるときと同様である。以後において、速度 $\omega(t)$ が一定の方向を持つ場合を考へよう（終期領域では、普通、 $\bar{q}^i(t)$ が時間によらずな場合が多い、このような時は、勿論、 $\omega(t)$ は時間によらずな）。この場合

$$\omega(t) = \omega(t) e, \quad F_0 = -8\pi\mu U_0 l A \omega(t) \hat{e} \quad (5-9)$$

と置いて、 $A, \omega(t), e, \hat{e}$ を定義し、§4, (I) (ii) での解析をそのまゝ繰り返す時、 i 物体に働く力 F^i を表示する式として、

$$F^i = F_0^i + \frac{Re}{8\pi\mu U_0 l} \left[F_R^i + \left(\frac{\hat{G}_1}{U(t)} + \frac{1}{2} \omega(t) \right) F_0 \cdot e F_1^i + \left(\frac{\hat{G}_2}{U(t)} + \frac{3}{4} \omega(t) \right) F_0 \cdot (e_2 F_2^i + e_3 F_3^i) \right] \quad (5-10)$$

が得られる。ここで $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ は (4-48) で定義されてゐる。また、 F_R^i は m 個の物体が $\bar{q}^i(t) (i=1, \dots, m)$ で定常運動をしてゐるときを、 Re 展開で解いて、 i 物体に働く力 F^i が $O(Re)$ まで $F^i = F_0^i + (Re/8\pi\mu U_0 l) F_R^i$ の形になつたとし、これは既知と存する。なお、 $F_k^i (k=1, 2, 3)$ については、(I) で定義されてゐる。さらに、 $\alpha \geq 2$ の拡張は、1 個の物体のときと同様に考へてよい。

§6. 2次元任意物体のおそい非定常運動

2次元物体としては、初期領域及び終期領域共に、その断面形の円柱への写像関数が既知であるような物体を考へ、

(2-2), (2-3) を R_e 数展開で解く。3次元の場合と同様に $0 < \alpha < 2$ の場合と $\alpha \geq 2$ の場合とを別々に考へる。

(I) $0 < \alpha < 2$ の場合

(i) 時間について初期領域の解

3次元の場合と同様に、内部領域、外部領域共に、時間変数 t を (4-1) の如くとする。まず内部領域について考へる。内部変数 $R(X, Y)$ は、3次元の場合と同様に、次式で定義する。

$$R(X, Y) = \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (6-1)$$

展開のパラメータとして $R_e^{\frac{\alpha}{2}}$ を用いて、 $\bar{Q}, \bar{P}$ を次の如く

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= U(t)\mathbf{e}_1 + Q_1(R, t) + R_e^{\frac{\alpha}{2}} Q_2(R, t) + \dots \\ \bar{P} - P_\infty &= P_1(R, t) + R_e^{\frac{\alpha}{2}} P_2(R, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

展開し、(2-2), (2-3) に代入すると、 Q_1, P_1 に対する式として

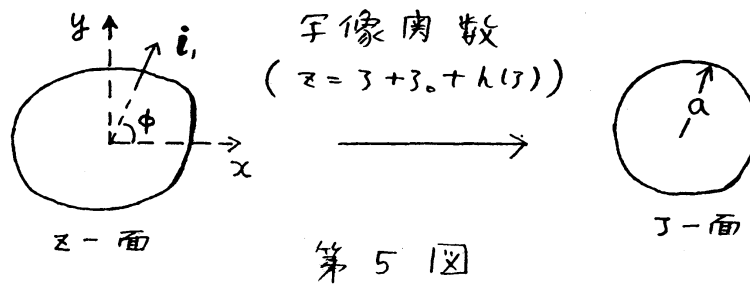
$$\Delta Q_1 - \nabla P_1 = 0, \quad \nabla \cdot Q_1 = 0 \quad (6-3)$$

$$R = f(\theta) : \quad Q_1 = 0 \quad (6-4)$$

が得られる。(6-4) を満たす (6-3) の解は $R \gg 1$ で次の形を持つことが知られている。⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} R \gg 1 : \\ Q_1 &\sim A_1 [(-\log R/a_1 + b_1(R))\mathbf{e}_1 + (b_1(R)R/R^2 + c_1(R)\mathbf{g}_1] + O(1/R) \\ P_1 &\sim 2A_1(b_1 \cdot R)/R^2 + O(1/R^2) \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

ここで i, j は互いに直交する単位ベクトルであり、 A_1 と共に外部解とのマッチングにより決定される。また、 $a, b(i), c(i)$ (以後断面係数と呼ぶ) は物体の断面形によって異なり、断面形の円柱への写像関数 ($z = z_0 + h(\zeta)$, $z \gg 1$ で $h(\zeta) \sim O(1)$ とする。第5図参照) と次の関係にある。



$$a_1 = a, \quad b_1(i) = -\frac{1}{2}(1+\epsilon) \cos(\beta+2\phi), \quad c_1(i) = \frac{\delta}{2} \sin(\beta+2\phi),$$

$$\delta e^{i\beta} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}(1+h'(ae^{i\theta}))} d\theta \quad (6-6)$$

またこれらの断面係数は断面の形が楕円、円弧形、正n星形、矩形、二等辺三角形、楔形、菱形、レンズ形などである場合には計算されている。

$R \gg 1$ での速度、圧力の振舞が (6-5) で与えられるとき、物体に働く力 (単位長さ当たり、以下同じ) F は次式となる。

$$F = -4\pi\mu U_0 A_1 \bar{z}_1 \quad (6-7)$$

次に外部領域での解について考えて見よう。外部変数

$f(x, y)$ なる次元の場合と同様に

$$f(x, y) = R_e^{\frac{\alpha}{2}} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (6-8)$$

の如く置き、 $\bar{q}, \bar{p}$ を次のように展開し

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= R_e^{\frac{1}{2}} q_1(r, t) + R_e^{\alpha} q_2(r, t) + \dots \\ \bar{p} - p_{\infty} &= R_e^{\alpha} (p_1(r, t) + R_e^{\frac{\alpha}{2}} p_2(r, t) + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

(2-2), (2-3) に代入する時、次式が得られる。

$$\kappa \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \Delta q_1, \quad \nabla \cdot q_1 = 0 \quad (6-10)$$

$$r \rightarrow \infty : q_1 = 0, \quad p_1 = 0; \quad t = 0 : q_1 = 0 \quad (6-11)$$

$r \rightarrow 0$ での q_1 の境界条件は共通領域で内部解 (6-5) とのマッチングで決まる。いま、 $\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}$ を x, y 方向の単位ベクトルとし

$$A_1 \mathbf{e} = U(t) (H(t) \mathbf{e} + I(t) \boldsymbol{\theta}) \quad (6-12)$$

の如く置くとき、 q_1, p_1 は $r \rightarrow 0$ で次の形

$$\left. \begin{aligned} r \rightarrow 0 : \quad q_1 &\rightarrow -U(t) \left[H(t) \{ (\log r) \mathbf{e} - x \mathbf{r} / r^2 \} + I(t) \{ (\log r) \boldsymbol{\theta} - y \mathbf{r} / r^2 \} \right] \\ p_1 &\rightarrow 2U(t) (H(t) x + I(t) y) / r^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

を取らねばならない。(6-11), (6-13) を満たす (6-10) の解は、

3次元の場合の如くに、原点に集中力を置いて得られる次の方程式をフーリエ変換して解くことにより求められる。

$$\kappa \frac{\partial q_1}{\partial t} - \Delta q_1 = -\nabla p_1 + 4\pi A_1 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}, \quad \nabla \cdot q_1 = 0 \quad (6-14)$$

q_1, p_1 のフーリエ変換 $\tilde{q}, \tilde{p}$ を (4-16) 式と同様に、ただし 3

次元と2次元を置き変えて定義するとき、(4-18), (4-19) に相

当する式は次の如くに存する。

$$\kappa \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + (\hat{k}^2 / \kappa) \tilde{q} = -4\pi A_1 \hat{k} / \kappa \hat{k}^2 + 4\pi A_1 \mathbf{e}, \quad \tilde{p} = -i 4\pi A_1 \hat{k} / \hat{k}^2 \quad (6-15)$$

ここで

$$\hat{k} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1) = (U(t) / A_1) (H(t) \mathbf{e}_1 + I(t) \mathbf{e}_2) \quad (6-16)$$

である。これを (6-11) を用いて積分し、さらに逆変換して

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{\kappa\pi} \int_0^t U(\tau) d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k^2(t-\tau)}{\kappa} + i k \cdot r\right\} \left\{ H(t) \left(\frac{k_1 k_2}{k^2} - i\right) + I(t) \left(\frac{k_2 k_2}{k^2} - j\right) \right\} dk \\ p_1 &= -\frac{i U(t)}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(H(t) k_1 + I(t) k_2)}{k^2} \exp(i k \cdot r) dk \end{aligned} \quad (6-17)$$

が得られる。 $r \rightarrow 0$ における q_1, p_1 の振舞は、3次元の場合

と同じように文献(4)の Appendix と同一方法で計算される。

ただし、3次元の場合、 A は定数であるが、2次元の場合、

H, I は t の関数であるため、その分だけ3次元の場合より

も複雑な結果となる。得られた結果は次の通りである。

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \quad q_1 &\rightarrow -U(t) \left[H(t) \{ (\log r) i - x y / r^2 \} + I(t) \{ (\log r) j - y y / r^2 \} \right. \\ &\quad \left. + (K + D)(H(t) i + I(t) j) \right] \\ p_1 &\rightarrow 2U(t) \{ H(t) x + I(t) y \} / r^2 \end{aligned} \quad (6-18)$$

なお、以下に示されるように、 K は定数、 D はオペレーターである。

$$K = \log 2 - \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \log \kappa \quad (\delta: \text{オイラーの定数}) \quad (6-19)$$

$$D X(t) = \frac{1}{2U(t)} \int_0^t \left(\frac{dX(\tau) U(\tau)}{d\tau} \right) \log(t-\tau) d\tau \quad (6-20)$$

(6-18) とマッチングすべき内部領域の解は、(6-2), (6-5), (6-8)

より次のように外部変数を用いて表示できる

$$\begin{aligned} q &\sim A_1 \left[(-\lambda - \log r + b_1(r)) i + (i, r) r / r^2 + c_1(r) j \right] + U(t) i \\ p &\sim 2A_1 (i, r) / r^2 \end{aligned} \quad (6-21)$$

$$\text{ただし} \quad \lambda = \log(1/a R e^{\frac{\delta}{2}}) = 1/\varepsilon \quad (6-22)$$

(6-18), (6-21), (6-12) を用いてマツチンクを行い、かつ断面係数 $b_1(\mathbf{e}_1)$, $C_1(\mathbf{e}_1)$, $b_1(\mathbf{e})$, $C_1(\mathbf{e})$ の間に存在する次の関係式⁹⁾

$$A_1 b_1(\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + A_1 C_1(\mathbf{e}_1) \mathbf{j}_1 = U(t) \left[\{ b_1(\mathbf{e}) H(t) + C_1(\mathbf{e}) I(t) \} \mathbf{e} + \{ -(1+b_1(\mathbf{e})) I(t) + C_1(\mathbf{e}) H(t) \} \mathbf{j} \right] \quad (6-23)$$

を用いるとき、 $H(t)$, $I(t)$ に対し次式が成立する。

$$-\lambda (H(t) \mathbf{e} + I(t) \mathbf{j}) + (b_1(\mathbf{e}) H(t) + C_1(\mathbf{e}) I(t)) \mathbf{e} + \{ -(1+b_1(\mathbf{e})) I(t) + C_1(\mathbf{e}) H(t) \} \mathbf{j} + \mathbf{i} = (K + D) (H(t) \mathbf{e} + I(t) \mathbf{j}) \quad (6-24)$$

上式は (6-22) を考慮して、次のように変換できる。

$$\left. \begin{aligned} \{ 1 + \varepsilon (-b_1(\mathbf{e}) + K + D) \} H(t) - \varepsilon C_1(\mathbf{e}) I(t) &= \varepsilon \\ -\varepsilon C_1(\mathbf{e}) H(t) + \{ 1 + \varepsilon (1 + b_1(\mathbf{e}) + K + D) \} I(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

(6-25), (6-7), (6-12) から物体に働く力 $\mathbf{F}$ は (6-26)

$$\mathbf{F} = -4\pi\mu U_0 U(t) (H(t) \mathbf{e} + I(t) \mathbf{j}) = - \frac{4\pi\mu U_0 U(t) \varepsilon \left[\{ 1 + \varepsilon (1 + b_1(\mathbf{e}) + K + D) \} \mathbf{e} + C_1(\mathbf{e}) \mathbf{j} \right]}{\{ 1 + \varepsilon (-b_1(\mathbf{e}) + K + D) \} \{ 1 + \varepsilon (1 + b_1(\mathbf{e}) + K + D) \} - \varepsilon^2 C_1^2(\mathbf{e})}$$

のようにオペレーター $-D$ を使って表示できる。これらの値を具体的に求めるには、 $\varepsilon \ll 1$ の性算を用いて、(6-26) の分母を ε について展開し、分子の大括弧内の式に左から作用させて求めるか、または $H(t)$, $I(t)$ を

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H_n, \quad I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n I_n \quad (6-27)$$

の如く展開し、(6-25) を用いて H_n , I_n を決定すればよい。

求められた H_n , I_n を $n=4$ まで記述すれば、以下のようになる。

$$H_1 = 1, \quad I_1 = 0, \quad H_2 = b_1(\mathbf{e}) - K - D, \quad I_2 = C_1(\mathbf{e}) \quad (6-28)$$

$$\begin{aligned}
H_3 &= (b_1(i) - K)^2 + C_1^2(i) - 2(b_1(i) - K)ID1 + ID1ID1 \\
I_3 &= -C_1(i)(2K + 1 + 2ID1) \\
H_4 &= (b_1(i) - K)^3 + C_1^2(i)(b_1(i) - 3K - 1) - 3\{(b_1(i) - K)^2 + C_1^2(i)\}ID1 \\
&\quad + 3(b_1(i) - K)ID1ID1 - ID1ID1ID1 \\
I_4 &= C_1(i)[1 + b_1(i) + b_1^2(i) + C_1^2(i) + 3K + 3K^2 + 3(1 + 2K)ID1 + 3ID1ID1]
\end{aligned}
\tag{6-28}$$

具体的に速度分布が与えられた場合、初期領域の解から終期領域の解、さらに定常オセーレ方程式の解へとどのように移ってゆくかを調べるためには、(6-26)は適切ではなく、その代り次式を用いれば、非定常効果の概算を容易に調べる事ができる。ただし、この式は $O(\varepsilon^3)$ で (6-26) と異なっている。

$$\overline{F} = - \frac{4\pi\mu U_0 U(t) \{(\lambda' + 1 + b_1(i) + G_1)i + C_1(i)\dot{i}\}}{(\lambda' - b_1(i) + G_1)(\lambda' + 1 + b_1(i) + G_1) - C_1^2(i)} \tag{6-29}$$

$$\text{ここで} \quad \lambda' = \log \frac{1}{a\sqrt{M}}, \quad G_1 = \frac{1}{2} \log K + K + ID1 \tag{6-30}$$

(ii) 時間についての終期領域の解

内部領域、外部領域とも、終期領域の時間変数 $\hat{t}$ を 3 次元の場合と同様、(4-29) で定義する。まず内部領域について考へよう。内部変数 R は初期領域と同様、(6-1) で定義し、 $\hat{\varepsilon}$ を

$$\hat{\varepsilon} = [\log \frac{1}{aR_e}]^{-1} \tag{6-31}$$

と置く。展開のパラメータは、非線形項の処理を考慮するとき、 $\hat{\varepsilon}$ とする。 $\bar{q}, \bar{p}$ を $\hat{\varepsilon}$ で次のように展開し

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} &= U(\hat{r})\hat{r} + \hat{\varepsilon}\hat{\varphi}_1(R, \hat{r}) + \dots + \hat{\varepsilon}^n\hat{\varphi}_n(R, \hat{r}) + \dots \\ \bar{P} - P_\infty &= \hat{\varepsilon}\hat{P}_1(R, \hat{r}) + \dots + \hat{\varepsilon}^n\hat{P}_n(R, \hat{r}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6-32)$$

(2-2), (2-3) に代入するとき, $\hat{\varphi}_n, \hat{P}_n$ は次の式として

$$\Delta \hat{\varphi}_n - \nabla \hat{P}_n = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\varphi}_n = 0 \quad (6-33)$$

$$R = f(0) : \hat{\varphi}_n = 0 \quad (6-34)$$

が得られる。(6-34)を満たす(6-33)の解は $R \gg 1$ で(6-5)と

同じ形を持つ。すなわち

$$\left. \begin{aligned} R \gg 1 : \quad \hat{\varphi}_n &\sim A_n [(-\log R/a + b, (\hat{i}_n)) \hat{i}_n + (\hat{i}_n \cdot R) R/R^2 + c, (\hat{i}_n) \hat{i}_n] + O(1/R) \\ \hat{P}_n &\sim 2A_n (\hat{i}_n \cdot R)/R^2 + O(1/R^2) \end{aligned} \right\} \quad (6-35)$$

ここで $a, b, (\hat{i}_n), c, (\hat{i}_n)$ は(6-6)で定義される断面係数である。

また $A_n, \hat{i}_n$ はマッチングによって決まり、これが決定される

とき、物体に働く力 $\mathcal{F}_n$ は次式で与えられる。

$$\mathcal{F}_n = -4\pi\mu U_0 A_n \hat{i}_n \quad (6-36)$$

内部解は定常ストークス方程式の解であるから、初期領域の内部解と終期領域の内部解の時間的共通領域におけるマッチングは、物体に働く力のマッチングで保証される。物体に働く力のマッチングについては後で示す。

次に外部領域の解について示そう。外部変数 $\hat{r}(\bar{x}, \bar{y})$ を

$$\hat{r}(\bar{x}, \bar{y}) = \text{Re } \bar{r}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (6-37)$$

の如く、3次元と同様に定義し、 $\bar{\varphi}, \bar{P}$ を $\hat{\varepsilon}$ で次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_t &= \hat{\varepsilon} \hat{q}_t(\hat{r}, \hat{t}) + \dots + \hat{\varepsilon}^n \hat{q}_n(\hat{r}, \hat{t}) + \dots \\ \bar{p} - p_\infty &= \text{Re} \left[\hat{\varepsilon} \hat{p}_t + \dots + \hat{\varepsilon}^n \hat{p}_n(\hat{r}, \hat{t}) + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-38)$$

上式を (2-2), (2-3) に代入して以下の式が得られる。

$$n=1: \quad \kappa \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_1 + \nabla \hat{p}_1 - U(\hat{t}) \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{q}_1 = 0 \quad (6-39)$$

$$\hat{r} \rightarrow \infty: \quad \hat{q}_1 \rightarrow 0, \quad \hat{p}_1 \rightarrow 0 \quad (6-40)$$

$n \geq 2$:

$$\kappa \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_n + \nabla \hat{p}_n - U(\hat{t}) \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial \hat{x}} = -(\hat{q}_1 \cdot \nabla \hat{q}_{n-1} + \dots + \hat{q}_{n-1} \cdot \nabla \hat{q}_1), \quad \nabla \cdot \hat{q}_n = 0 \quad (6-41)$$

$$\hat{r} \rightarrow \infty: \quad \hat{q}_n \rightarrow 0, \quad \hat{p}_n \rightarrow 0 \quad (6-42)$$

さて、内部、外部両域の共通領域でのマッチングを1周1のため、共通領域での内部解の振舞を見よう。(6-35), (6-41), (6-37) より、 $R \gg 1$ における $\hat{Q}_n, \hat{P}_n$ を外部変数 $\hat{r}$ で表わして

$$\left. \begin{aligned} R \gg 1: \quad \hat{Q}_n &\sim A_n \left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \log \hat{r} + b_1(\varepsilon_n)\right) \hat{i}_n + \frac{(\varepsilon_n \cdot \hat{r}) \hat{r}}{\hat{r}^2} + c_1(\varepsilon_n) \hat{j}_n \right] \\ \hat{P}_n &\sim 2 \text{Re} A_n \frac{(\varepsilon_n \cdot \hat{r})}{\hat{r}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-43)$$

のようになる。特に $n=1$ の場合には、上式に含まれる $-(1/\varepsilon)A_1 \hat{i}_1$ の $\bar{q}$ への寄与は $O(1)$ とする。他に $O(1)$ の項は (6-32) の $U(\hat{t}) \hat{i}$ しかないから、この項は $U(\hat{t}) \hat{i}$ を打ち消さねばならない。このことから $A_1, \hat{i}_1$ が次のように

$$A_1 = U(\hat{t}) \quad \hat{i}_1 = \hat{i} \quad (6-44)$$

決まる。いま

$$A_n \hat{i}_n = U(\hat{t}) (H_n(\hat{t}) \hat{i} + I_n(t) \hat{j}) \quad (6-45)$$

の如く置くと、(6-43) から、 $\hat{q}_n, \hat{p}_n$ は $\hat{r} \rightarrow 0$ で

$$\left. \begin{aligned} \hat{r} \rightarrow 0: \quad \hat{q}_n &\rightarrow -U(\hat{r}) \left[H_n(\hat{r}) \left\{ (\log \hat{r}) \hat{z} - \frac{\hat{x} \hat{r}}{\hat{r}^2} \right\} + I_n(\hat{r}) \left\{ (\log \hat{r}) \hat{y} - \frac{\hat{y} \hat{r}}{\hat{r}^2} \right\} \right] \\ \hat{p}_n &\rightarrow 2U(\hat{r}) \frac{\{ H_n(\hat{r}) \hat{x} + I_n(\hat{r}) \hat{y} \}}{\hat{r}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6-46)$$

の形を持つねばならない。また $\hat{t} = 0$ における $\hat{q}$ の条件は、

$r \sim O(1/R_0)$ における (6-17) の振舞を調べて、次のようにとればよいことが分る。

$$\hat{t} = 0, \quad \hat{q}_n = 0 \quad (6-47)$$

以上のような境界条件を満たす解を得るために、次の如く解を

$$\hat{q}_n = \hat{q}_{n1} + \hat{q}_{n2}, \quad \hat{p}_n = \hat{p}_{n1} + \hat{p}_{n2} \quad (6-48)$$

分け、 $\hat{q}_{n1}, \hat{p}_{n1}, \hat{q}_{n2}, \hat{p}_{n2}$ は夫々次の方程式及び境界条件を満たすものとする。

$$K \frac{\partial \hat{q}_{n1}}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_{n1} + \nabla \hat{p}_{n1} - U(\hat{r}) \frac{\partial \hat{q}_{n1}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{q}_{n1} = 0 \quad (6-49)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{r} \rightarrow 0: \quad \hat{q}_{n1} &\rightarrow -U(\hat{r}) \left[H_n(\hat{r}) \left\{ (\log \hat{r}) \hat{z} - \frac{\hat{x} \hat{r}}{\hat{r}^2} \right\} + I_n(\hat{r}) \left\{ (\log \hat{r}) \hat{y} - \frac{\hat{y} \hat{r}}{\hat{r}^2} \right\} \right] \\ \hat{r} \rightarrow \infty: \quad \hat{q}_{n1} &\rightarrow 0, \quad \hat{p}_{n1} \rightarrow 0; \quad \hat{t} = 0, \quad \hat{q}_{n1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-50)$$

$$K \frac{\partial \hat{q}_{n2}}{\partial \hat{t}} - \Delta \hat{q}_{n2} + \nabla \hat{p}_{n2} - U(\hat{r}) \frac{\partial \hat{q}_{n2}}{\partial \hat{x}} = -(\hat{q}_1 \nabla \hat{q}_{n1} + \dots + \hat{q}_{n1} \nabla \hat{q}_1), \quad \nabla \cdot \hat{q}_{n2} = 0 \quad (6-51)$$

$$\hat{r} \rightarrow 0: \quad \hat{q}_{n2} \rightarrow \hat{a}_n(\hat{r}); \quad \hat{r} \rightarrow \infty: \quad \hat{q}_{n2} \rightarrow 0, \quad \hat{p}_{n2} \rightarrow 0; \quad \hat{t} = 0: \quad \hat{q}_{n2} = 0 \quad (6-52)$$

ここで $\hat{a}_n(\hat{r})$ は (6-52) のもとに (6-51) を解いて初めて決定される時間 $\hat{t}$ の関数である。(6-50) を満たす (6-49) の解 $\hat{q}_{n1}, \hat{p}_{n1}$ は、

初期領域の場合と同じように原点に集中力をおいた式をフー

リエ変換して、解いて、次のようにする。

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_{n1} &= -\frac{1}{\kappa\pi} \int_0^{\hat{t}} U(\hat{t}) d\hat{\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k^2(\hat{t}-\hat{\tau})}{\kappa} + i k_1 (S(\hat{t}) - S(\hat{\tau})) + i k \cdot \hat{r} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ H_n(\hat{t}) \left(\frac{k_1 k}{k^2} - i \right) + I_n(\hat{t}) \left(\frac{k_2 k}{k^2} - j \right) \right\} dk \right\} \\ \hat{p}_{n1} &= -\left(i U(\hat{t}) / \pi \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{H(\hat{t}) k_1 + I(\hat{t}) k_2}{k^2} \right) \exp(i k \cdot \hat{r}) dk \end{aligned} \right\} \quad (6-53)$$

ここで $S(\hat{t})$ は (4-46) で与えられる。 $\hat{r} \rightarrow 0$ における $\hat{q}_n, \hat{p}_n$ の値は (6-17) の場合と同じ方法で計算され、その結果は

$$\left. \begin{aligned} \hat{r} \rightarrow 0: \quad \hat{q}_{n1} &\rightarrow -U(\hat{t}) \left[\hat{H}_n(\hat{t}) \{ (\log \hat{r}) i - \hat{x} \hat{r} / \hat{r}^2 \} + I_n(\hat{t}) \{ (\log \hat{r}) j - \hat{y} \hat{r} / \hat{r}^2 \} \right. \\ &\quad \left. + (K + \hat{IP}_1) H_n(\hat{t}) i + (K + \hat{IP}_2) I_n(\hat{t}) j \right] \\ \hat{p}_{n1} &\rightarrow 2 U(\hat{t}) (H_n(\hat{t}) \hat{x} + I_n(\hat{t}) \hat{y}) / \hat{r}^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-54)$$

となる。ここで $\hat{IP}_1, \hat{IP}_2$ は以下で定義されるオペレーターである。

$$\hat{IP}_1 = \hat{ID} + \hat{IE}, \quad \hat{IP}_2 = \hat{ID} - \hat{IE} + \hat{IH}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{ID} X(\hat{t}) &= \frac{1}{2U(\hat{t})} \int_0^{\hat{t}} \frac{d(X(\hat{\tau})U(\hat{\tau}))}{d\hat{\tau}} \log(\hat{t}-\hat{\tau}) d\hat{\tau}, \quad \hat{IH} X(\hat{t}) = \frac{1}{U(\hat{t})} \int_0^{\hat{t}} \frac{X(\hat{\tau})U(\hat{\tau})}{(\hat{t}-\hat{\tau})} \left(e^{-\frac{\kappa \hat{s}}{4(\hat{t}-\hat{\tau})}} - 1 \right) d\hat{\tau} \\ \hat{IE} X(\hat{t}) &= \frac{2}{\kappa U(\hat{t})} \int_0^{\hat{t}} \frac{X(\hat{\tau})U(\hat{\tau})}{\hat{s}} \left(1 - \frac{\kappa \hat{s}}{4(\hat{t}-\hat{\tau})} - e^{-\frac{\kappa \hat{s}}{4(\hat{t}-\hat{\tau})}} \right) d\hat{\tau}, \quad \hat{s} = \left(\int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}} \frac{U(\hat{t}')}{\kappa} d\hat{t}' \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-55)$$

また (6-51), (6-52) を解かれ、 $\hat{\omega}_n(\hat{t})$ が決定されたとき、 $\hat{a}_n(\hat{t})$ は

$$\hat{a}_n(\hat{t}) = U(\hat{t}) (\hat{e}_n(\hat{t}) i + \hat{g}_n(\hat{t}) j) \quad (6-56)$$

のようになる。このとき $\hat{r} \rightarrow 0$ で $\hat{q}_n$ は

$$\left. \begin{aligned} \hat{r} \rightarrow 0: \quad \hat{q}_{n1} &\rightarrow -U(\hat{t}) \left[H_n(\hat{t}) \{ (\log \hat{r}) i - \hat{x} \hat{r} / \hat{r}^2 \} + I_n(\hat{t}) \{ (\log \hat{r}) j - \hat{y} \hat{r} / \hat{r}^2 \} \right. \\ &\quad \left. + (K + \hat{IP}_1 + \hat{e}_n(\hat{t})) H_n(\hat{t}) i + (K + \hat{IP}_2 + \hat{g}_n(\hat{t})) I_n(\hat{t}) j \right] \end{aligned} \right\} \quad (6-57)$$

のようになる。ここで (6-43), (6-57) を用い、 $\hat{e}^n \hat{Q}_n, \hat{e}^{n+1} \hat{Q}_{n+1}$,

$\hat{\varepsilon}^n \hat{q}_n$ は $O(\hat{\varepsilon}^n)$ を抜き取り、内部解と外部解とのマッチング
を行ひ、かつ断面係数に対する関係式 (6-23) を用いて、

$H_n(\hat{t})$, $I_n(\hat{t})$ に対する次の漸化式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} H_{n+1}(\hat{t}) &= (b_1(\hat{t}) - K - \hat{P}_1) H_n(\hat{t}) + C_1(\hat{t}) I_n(\hat{t}) - \hat{e}_n(\hat{t}) \\ I_{n+1}(\hat{t}) &= C_1(\hat{t}) H_n(\hat{t}) + (-b_1(\hat{t}) - 1 - K - \hat{P}_2) I_n(\hat{t}) - \hat{g}_n(\hat{t}) \end{aligned} \right\} (6-58)$$

このとき、物体に働く力 $\mathcal{F}$ は次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}^n \mathcal{F}_n = -4\pi\mu U_0 U(\hat{t}) (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \\ \text{ただし} \quad F_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}^n H_n(\hat{t}), \quad F_y = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}^n I_n(\hat{t}) \end{aligned} \right\} (6-59)$$

いま $\hat{E}$, $\hat{G}$ を次式で定義する。

$$\hat{E} = -\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\varepsilon}^n \hat{e}_n(\hat{t}), \quad \hat{G} = -\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\varepsilon}^n \hat{g}_n(\hat{t}) \quad (6-60)$$

(6-44), (6-58) ~ (6-60) を用いて、 F_x , F_y を決定する方程式が

$$\left. \begin{aligned} \{1 + \hat{\varepsilon}(-b_1(\hat{t}) + K + \hat{P}_1)\} F_x - \hat{\varepsilon} C_1(\hat{t}) F_y &= \hat{\varepsilon} (1 + \hat{E}) \\ -\hat{\varepsilon} C_1(\hat{t}) F_x + \{1 + \hat{\varepsilon}(b_1(\hat{t}) + 1 + K + \hat{P}_2)\} F_y &= \hat{\varepsilon} \hat{G} \end{aligned} \right\} (6-61)$$

のようになれる。(6-61) を解いて、 F_x , F_y は次の如く

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{\hat{\varepsilon} \{1 + \hat{\varepsilon}(b_1(\hat{t}) + 1 + K + \hat{P}_2) + \hat{N}_x\}}{\{1 + \hat{\varepsilon}(b_1(\hat{t}) + 1 + K + \hat{P}_2)\} \{1 + \hat{\varepsilon}(-b_1(\hat{t}) + K + \hat{P}_1) - \hat{\varepsilon}^2 C_1^2(\hat{t})\}} \\ F_y &= \frac{\hat{\varepsilon} (\hat{\varepsilon} C_1(\hat{t}) + \hat{N}_y)}{\{1 + \hat{\varepsilon}(-b_1(\hat{t}) + K + \hat{P}_1)\} \{1 + \hat{\varepsilon}(b_1(\hat{t}) + 1 + K + \hat{P}_2) - \hat{\varepsilon}^2 C_1^2(\hat{t})\}} \end{aligned} \right\} (6-62)$$

決定される。ただし $\hat{N}_x$, $\hat{N}_y$ は非線形項の計算より導出される項で

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_x &= \{1 + \hat{\varepsilon}(b_1(\hat{t}) + 1 + K + \hat{P}_2)\} \hat{E} + C_1(\hat{t}) \hat{G} \\ \hat{N}_y &= C_1(\hat{t}) \hat{E} + \{1 + \hat{\varepsilon}(-b_1(\hat{t}) + K + \hat{P}_1)\} \hat{G} \end{aligned} \right\} (6-63)$$

の形を持つ。いま F_x, F_y において、 $O(\varepsilon^3)$ より寄与する非線形効果 $\hat{N}_x, \hat{N}_y$ を省略して考えよう。このとき、 F_x, F_y は分母を $\hat{\varepsilon}$ で展開し、分子に左から作用させることにより計算できる。また、 $H_n(\hat{r}), I_n(\hat{r})$ は漸化式 (6-61) を用いて計算できる。これらの方法により決定された $H_n(\hat{r}), I_n(\hat{r})$ を $n=4$ まですべて記述すれば次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 1, & I_1 &= 0, & H_2 &= b_1(\hat{r}) - K - \hat{P}_1 1, & I_2 &= c_1(\hat{r}) \\ H_3 &= (b_1(\hat{r}) - K)^2 + c_1^2(\hat{r}) - 2(b_1(\hat{r}) - K)\hat{P}_1 1 + \hat{P}_1 \hat{P}_1 1 \\ I_3 &= -c_1(\hat{r})(2K + 1 + \hat{P}_1 1 + \hat{P}_2 1) \\ H_4 &= (b_1(\hat{r}) - K)^3 + c_1^2(\hat{r})(b_1(\hat{r}) - 3K - 1) - \{3(b_1(\hat{r}) - K)^2 + 2c_1^2(\hat{r})\}\hat{P}_1 1 \\ &\quad - c_1^2(\hat{r})\hat{P}_2 1 + 3(b_1(\hat{r}) - K)\hat{P}_1 \hat{P}_1 1 - \hat{P}_1 \hat{P}_1 \hat{P}_1 1 \\ I_4 &= c_1(\hat{r})\{1 + b_1(\hat{r}) + b_1^2(\hat{r}) + c_1^2(\hat{r}) + 3K + 3K^2 + (1 - b_1(\hat{r}) + 3K)\hat{P}_1 1 \\ &\quad + (2 + b_1(\hat{r}) + 3K)\hat{P}_2 1 + \hat{P}_1 \hat{P}_1 1 + \hat{P}_2 \hat{P}_1 1 + \hat{P}_2 \hat{P}_2 1\} \end{aligned} \right\} \quad (6-64)$$

具体的な速度分布に対し、初期領域の解、終期領域の解を通して、どのように定常オセーラ方程式の解へ移ってゆくかの非定常効果の概略を調べるためには、下記の式が都合である。ただし、この式は (6-62) と比べて、 $O(\varepsilon^3)$ が省略されている。

$$\overline{F} = - \frac{4\pi\mu U_0 U(\hat{r}) \{(\hat{\lambda} + b_1(\hat{r}) + 1 + \hat{G}_2)\hat{r} + c_1(\hat{r})\hat{r}\}}{(\hat{\lambda} - b_1(\hat{r}) + \hat{G}_1)(\hat{\lambda} + b_1(\hat{r}) + 1 + \hat{G}_2) - c_1^2(\hat{r})} \quad (6-65)$$

$$\text{ここで} \quad \hat{\lambda} = \log(1/aRe), \quad \hat{G}_1 = K + \hat{P}_1 1, \quad \hat{G}_2 = K + \hat{P}_2 1 \quad (6-66)$$

このようにして得られた終期領域の解は、3次元の場合と

同様、 $0 < \alpha < 2$ の場合のみならず、 $\alpha \geq 0$ の場合においても、また、S型の速度分布の場合でも、最終領域の解として有効であることが期待される。また、(16-62)に現われるオペレーター $\hat{I}P_1, \hat{I}P_2$ は、 $\hat{t} \rightarrow 0$ すなわち時間の共通領域で

$$\hat{I}P_1 \rightarrow \log Re^{1-\frac{\alpha}{2}} + 1D, \quad \hat{I}P_2 \rightarrow \log Re^{1-\frac{\alpha}{2}} + 1D \quad (16-67)$$

のよう振舞うことを確かめることができる、この式が(16-62)は(16-26)と、また、(16-65)は(16-29)と時間の共通領域でマッチングしてゐることが分る。

(iii) $U(\hat{t}) = 1 - (1 + \hat{t})^{-\beta}$ ($\beta > 0$) の場合

上記の速度分布に対し、(16-62)に現われるオペレーター $\hat{I}P_1, \hat{I}P_2$ は、定数に作用するとき、 $\hat{t} \rightarrow \infty$ において

$$\hat{t} \rightarrow \infty: \hat{I}P_1 \rightarrow \log 2 - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log K, \quad \hat{I}P_2 \rightarrow \log 2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log K \quad (16-68)$$

のように定数と存してよいことが分る。(16-68)を(16-62)に代入し、非線形項 $\hat{N}_x, \hat{N}_r$ を省略すれば、(16-62)は定常オセーシ方程式の解と一致することが分る。

(16-29)、(16-65)に現われ、非定常効果を表わす $G_1, \hat{G}_1, \hat{G}_2$ は $t \ll 1, t \gg 1, \hat{t} \ll 1, \hat{t} \gg 1$ のとき、次の様を振舞を示す。

$t \ll 1$:

$$G_1 \sim \frac{1}{2} \log t + \log 2 - \frac{\beta}{2} - 1 + \frac{(\beta+1)}{8} t - \frac{5}{72} (\beta+1)(\beta+2) t^2 + \frac{1}{16} (\beta+1)^2 t^2 + \dots \quad (16-69)$$

$t \gg 1$:

$$G_1 \sim \frac{1}{2} \log t + K + \frac{1}{2} \log K - t^{-1/2(\beta-1)} + O(t^{-\beta}) \quad (16-70)$$

$$\hat{t} \ll 1: \hat{G}_1 \sim \frac{1}{2} \log \hat{t} + K - \frac{\hat{t}}{16K} + \frac{\hat{t}^2}{384K^2} + \dots, \quad \hat{G}_2 \sim \frac{1}{2} \log \hat{t} + K - \frac{3\hat{t}}{16K} + \frac{5\hat{t}^2}{384K^2} + \dots \quad (16-71)$$

$$\hat{t} \gg 1: \quad \hat{G}_1 \sim 2 \log 2 - \delta - 2K/\hat{t} + \dots, \quad \hat{G}_2 \sim 2 \log 2 - \delta - 1 + 2K/\hat{t} + \dots \quad (6-72)$$

特に、 $K=1$, $\beta=2$ の場合について、 G_1 と t との関係及び $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ と $\hat{t}$ との関係が第6図に示されてゐる。(6-69)~(6-72)及び第6図から、3次元の場合(§4. (I) (iii)) の(1), (2), (3)で述べられたことはそのまま2次元の場合にも成立することが分る。また、時間の全領域にわたって有効な解として、(6-29), (6-65), (6-70), (6-71)から次式が得られる。

$$\Pi = - \frac{4\pi\mu U_0 U(t) \{ (\lambda' + b_1(\hat{t}) + 1 + G_1 + \hat{G}_2 - \frac{1}{2} \log \hat{t} - K) \hat{t} + c_1(\hat{t}) \}}{(\lambda' - b_1(\hat{t}) + G_1 + \hat{G}_1 - \frac{1}{2} \log \hat{t} - K)(\lambda' + b_1(\hat{t}) + 1 + G_1 + \hat{G}_2 - \frac{1}{2} \log \hat{t} - K) - c_1^2(\hat{t})} \quad (6-73)$$

(II) $\alpha \geq 2$

3次元の場合と同様に、 $0 < \alpha < 2$ の場合の終期領域の解で $\hat{t} = t = \bar{t}$ と置けば、この解が時間の全領域にわたって有効であり、(I) の場合の初期領域の解がなくなる。すなわち、

(6-55), (6-62)~(6-65) で、 $U(\hat{t})$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{H}$, $\hat{s}(\hat{t})$ のかわりに現われる $\hat{t}$, $\hat{t}'$, $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}'$ を夫々 $\hat{t} = t$, $\hat{t}' = t'$, $\hat{\tau} = \tau$, $\hat{\tau}' = \tau'$ と書き、かつ $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, ..., $\hat{s}(\hat{t})$ を P_1 , P_2 , ..., $s(t)$ と置き、 $\hat{t}$ はそのまま用いれば、

(6-55), (6-62)~(6-65) は時間の全領域にわたって有効である。 $U(\bar{t}) = 1 - (1 + \bar{t})^{-\beta}$ の場合には、

$t \ll 1$, $t \gg 1$ における G_1 , G_2 の振舞は次のようになる。

$$\begin{aligned} t \ll 1: \quad G_1 &\sim \frac{1}{2} \log t + K - \frac{1}{2} + \frac{(\beta+1)t}{8} - \frac{5}{72}(\beta+1)(\beta+2)t^2 + \frac{1}{16}(\beta+1)^2 t^3 + \dots \\ G_2 &\sim \frac{1}{2} \log t + K - \frac{1}{2} + \frac{(\beta+1)t}{8} - \frac{5}{72}(\beta+1)(\beta+2)t^2 + \frac{1}{16}(\beta+1)^2 t^3 + \dots \end{aligned} \quad (6-74)$$

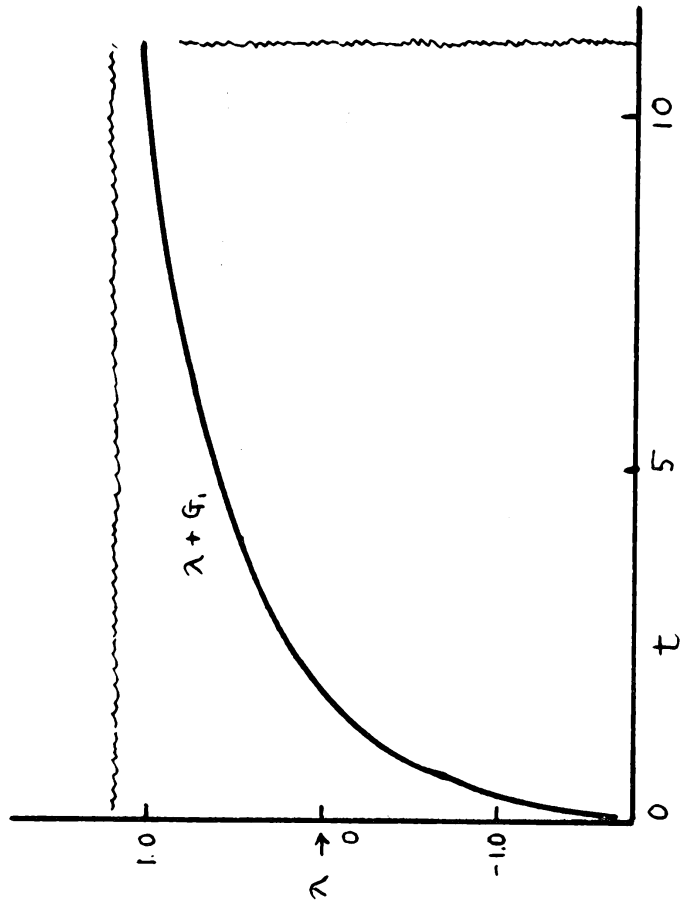
$$U^*(t)i = \left[1 - \frac{1}{(1+t)^2}\right]U_0i, \quad M = R_e^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2$$

$$t \sim O(1)$$

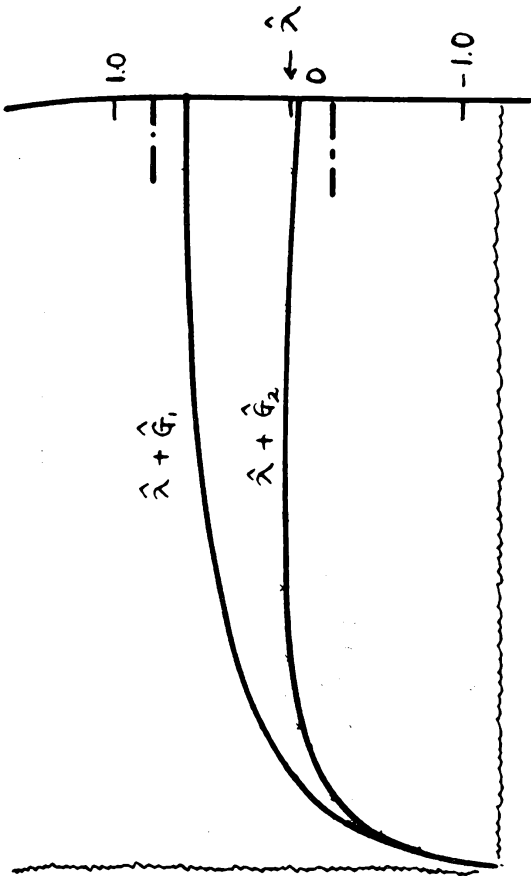
$$F = - \frac{4\pi\mu U^*(t) [(\lambda' + 1 + b_1 + G_1)i + C_1j]}{(\lambda' + 1 + b_1 + G_1)(\lambda' - b_1 + G_1) - C_1^2}$$

$$\lambda' = \log(1/a_1 R_e^{\frac{\alpha}{2}})$$

38



共 通 領 域

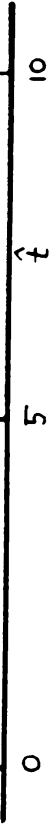


$$\hat{t} = R_e^{2-\alpha} t \sim O(1)$$

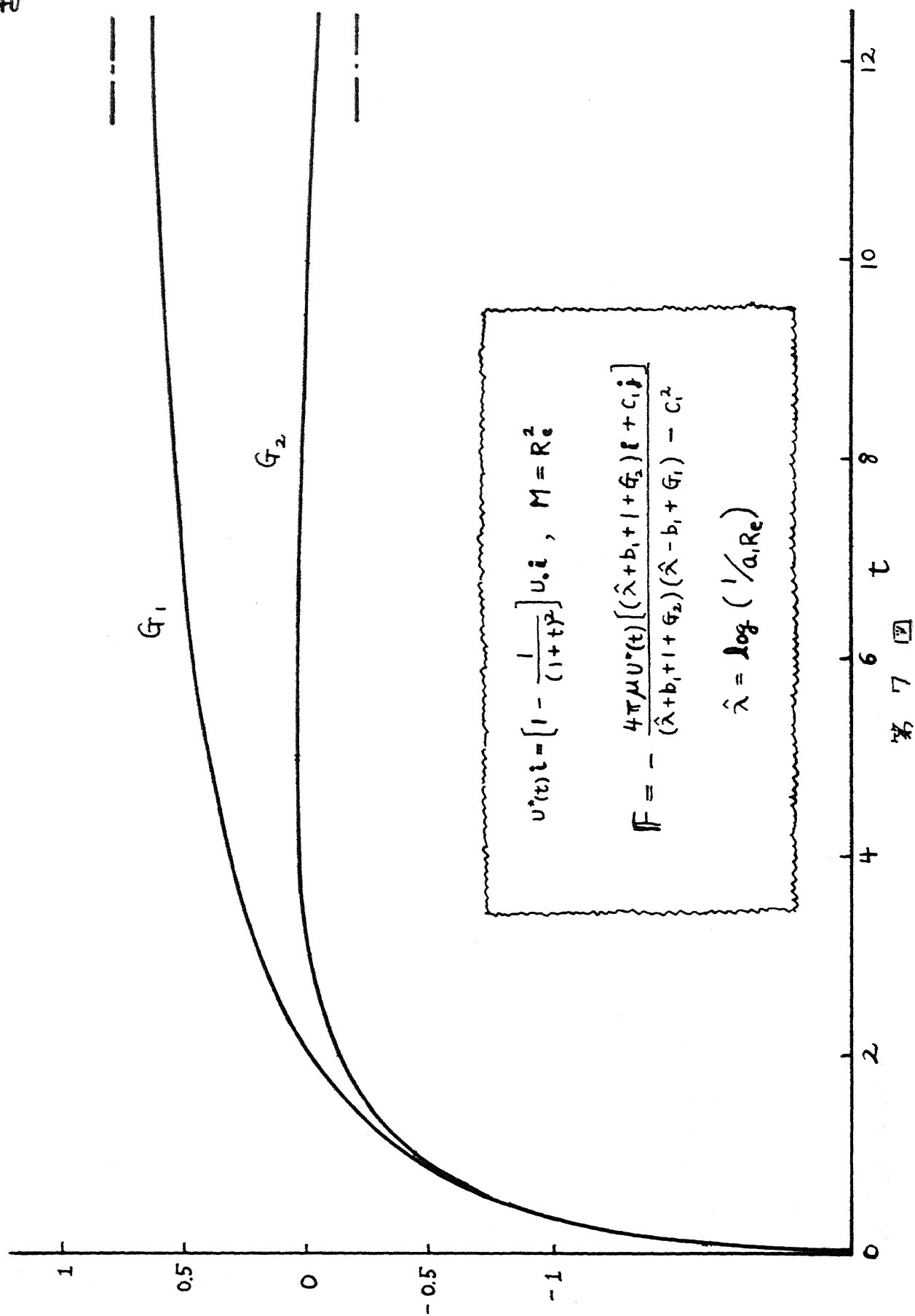
$$F(\hat{t}) = - \frac{4\pi\mu U^*(\hat{t}) [(\hat{\lambda} + b_1 + 1 + \hat{G}_1)i + C_1j]}{(\hat{\lambda} + b_1 + 1 + \hat{G}_1)(\hat{\lambda} - b_1 + \hat{G}_1) - C_1^2}$$

$$\hat{\lambda} = \log(1/a_1 R_e)$$

39



第 6 图



$$\begin{aligned}
 t \gg 1: \quad & G_1 \sim 2 \log 2 - \sigma - 2\kappa/\varepsilon + \dots \\
 & G_2 \sim 2 \log 2 - \sigma - 1 + 2\kappa/\varepsilon + \dots
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} G_1 \sim 2 \log 2 - \sigma - 2\kappa/\varepsilon + \dots \\ G_2 \sim 2 \log 2 - \sigma - 1 + 2\kappa/\varepsilon + \dots \end{aligned}} \right\} (6-15)$$

また、 $\kappa=1$, $\beta=2$ の場合について、 G_1 , G_2 と t との関係が第7図に示されている。この場合においても §4, (I), (ii) の (2), (3) がそのまま成立することが分る。

§7. 結論

物体が静止から出発して連続的に変化するような速度で運動しているときの非定常低レイノルズ数流れを、非定常の度合を表わすパラメータ M が小さい場合について、 $M = \kappa Re^\alpha$ ($\alpha > 0$) と表示して、ナビエ・ストークス方程式のレイノルズ数展開で解く。この場合、定常流のときになされる空間分割に加えて、時間的分割を併せ行い、空間及び時間両共通領域におけるマッチングにより、展開の解を決定してゆくのが特徴である。このようにして求められた物体に働く力の式は、非定常効果の初項を含み、かつ静止から定常状態に到達する時間の全領域にわたって有効な式である。これら力の式は、3次元物体が運動する場合には、同物体が定常運動をするときのストークス近似が既知であるとし、その定常ストークス近似の知識のみを使って表示されている。また、2次元物体が運動する場合には、物体の断面形を円に写像する写像関数によつ

て決定される断面係数を含む形で得られている。また、 $0 < \alpha < 2$ の場合に得られた時間的終期領域の解は、 M が大きいとき、階段的速度分布を持つときの時間的最終領域の解としても有効であることが期待される。なお、 $\alpha \geq 2$ の場合には、時間的分割は必要でなく、 $0 < \alpha < 2$ の場合の終期領域の解が時間の全領域にわたって有効となる。

特に、速度分布が $U(\bar{t}) = 1 - (1 + \bar{t})^{-\beta}$ ($\beta > 0$) の場合について、静止から定常状態に至る全領域にわたって非定常効果が調べられた。その結果、非定常として計算された物体に働く力とその瞬間の速度を持つ定常流として計算された物体に働く力を比較するとき、抵抗は常に前者が大きいことが、揚力は充分時間が経過した後では後者が大きいことが示された。上記の様に常に加速されている速度分布の場合において、抵抗と揚力が夫々異なった振舞を示すことは、注目されておる。

また、3次元物体の場合には、多くの物体が運動する場合への拡張がなされた。

最後に、 $\epsilon \ll 1$ に近いときは、2次元の場合の $\epsilon \ll 1$ における G_1 の振舞を考慮して、本論文の解法とは別の考察が必要であるように思われることを注意しておく。

文 献

- (1) C. W. Oseen : Hydrodynamik, 132-134, Leipzig :
Akademische Verlag, 1927.
- (2) M. Bentwich & T. Milton : J. Fluid Mech. Vol. 88 (1978),
17.
- (3) A. B. Basset : Phil. Trans. Vol. 179 (1888), 43
- (4) J. R. Ockendon : J. Fluid Mech. Vol. 74 (1968), 229
- (5) H. Hashimoto : Theoretical and Applied Mechanics,
Vol. 22 (Proceedings of the 22nd Japan National
Congress for Applied Mechanics, 1972), 287
- (6) S. Kuwabara : J. Phys. Soc. Japan, Vol. 16 (1961), 1762
- (7) H. Takagi : J. Phys. Soc. Japan, Vol. 37 (1974), 558
- (8) H. Narnse : J. Phys. Soc. Japan, Vol. 38 (1975), 1501
- (9) 成瀬文雄 : 数理解析研究所講究録, 第 234号
(1975), 4