

傾斜スロットにおける多重分岐

原 研 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)
UCLA R.E. ケリー (Robert E. Kelly)

1. はじめに

Rayleigh-Bénard 対流にせん断流が重畳された系における縦ロールと横ロールの間の非線形相互作用は、最近熱対流系におけるパターン選択機構に関連して興味を集めている。無限に広がった水平流体層の場合、最も不安定なモードは流れ方向に平行な軸を持つ縦ロールである。ところが鉛直流体層の場合、Prandtl 数 P の値に応じてスパン方向に一樣な横ロールもしくは横伝播波が最も不安定なモードとなる。

したがって、流体層が傾斜している場合、適当な傾斜角度に対しては縦モードと横モードの間の cross-over が生じるであろうことが予測されるが、実際、Gershuni & Zhukhovitskii、Hart や Korpela の線形安定性の解析から、最も不安定なモードとして傾斜スロットの場合縦モードと横モードが (P, δ) の組合わせを境にして入れ替わることが明かにされている。ここで、 δ は鉛直から測った傾斜角度である。なお、Gershuni & Zhukhovitskii によって斜めモードが最も不安定となることはないことが示されている。線形理論の枠内では、この 2 モードの cross-over は厳密に (P, δ) 平面内の曲線上でのみ生じるが、非線形理論に拡張すると cross-over がある有限の幅を持った帯領域の内部において可能となる。

ここでは、傾斜スロットにおける縦ロールと横ロール、縦ロールと横伝播波、並びに縦ロール、横ロール、横伝播波間の cross-over 領域における多重分岐を調べる。なお、横ロールと横伝播波の cross-over に関しては、鉛直スロットの cross-over point $p = 12.45425644$ 近傍において、すでに分岐特性が明かにされているので、[Fujimura & Mizushima、Kropp & Busse (1991a)、Fujimura] ここでは省略する。

2. 定式化

座標系 (x, y, z) として、2 枚の平板が $z = \pm H/2$ にあり、 x -軸を側壁と平行、 y -軸をスパン方向にとる。 $z = \pm H/2$ において一樣温度 $T = T_0 \mp \Delta T/2$ が保たれているものとする。

適当な無次元化を行うと基礎方程式が

$$\begin{aligned} P^{-1} R \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p + T \cos \delta \cdot \mathbf{e}_x + T \sin \delta \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{v}, \\ R \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] &= \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

のように書ける。境界条件は

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = \mp 1/2, \quad \text{at } z = \pm 1/2, \quad (2.2)$$

で与えられる。ここに $R = g\gamma\Delta TH^3/\nu\kappa$ は Rayleigh 数、 $P = \nu/\kappa$ は Prandtl 数である。
主流場としては次の熱伝導状態が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\bar{U}(z), 0, 0) = \left(\frac{1}{6}\left(z^3 - \frac{z}{4}\right)\cos\delta, 0, 0\right), \\ T &= \bar{T}(z) = -z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

速度と温度に対して摂動

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} = (\bar{U} + \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}), \quad T = \bar{T} + \hat{T}, \quad (2.4)$$

を導入し、さらに $\hat{p}$ を消去することにより、次の攪乱方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\partial_t(\hat{u}_y - \hat{v}_x) + \bar{U}\partial_x(\hat{u}_y - \hat{v}_x) + \bar{U}'\hat{w}_y \\ &= PR^{-1}[\hat{T}_y \cos\delta + \nabla^2(\hat{u}_y - \hat{v}_x)] - \partial_y(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{u} + \partial_x(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{v}, \\ &\partial_t\nabla^2\hat{w} + \bar{U}\partial_x\nabla^2\hat{w} - \bar{U}''\hat{w}_x \\ &= PR^{-1}[\nabla_x^2\hat{T} \cdot \sin\delta - \hat{T}_{xx} \cos\delta + \nabla^4\hat{w}] \\ &\quad - \{\nabla^2(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{w} - \partial_x[\partial_x(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{u} + \partial_y(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{v} + \partial_z(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{w}]\}, \\ &\partial_t\hat{T} + \bar{U}\hat{T}_x + \bar{T}_z\hat{w} = R^{-1}\nabla^2\hat{T} - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{T}, \\ &\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここにプライムは z 微分を意味し、 $\nabla_x^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 。

3. 線形安定性

ノーマルモード解析

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}]^T = [u(z), v(z), w(z), T(z)]^T e^{i\alpha(x-ct) + i\beta y}, \quad (3.1)$$

を行って線形安定性を調べよう。ただし、 α は横モードに対する波数であり、 β は縦モードに対する波数である。

縦ロール (L) に対する攪乱方程式は

$$\begin{aligned} S_{(\beta)}^2 w - \beta^2 \sin\delta \cdot T &= 0, \\ \bar{T}_z w - R^{-1} S_{(\beta)} T &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

横ロール (S) または 横伝播波 (T) に対する攪乱方程式は

$$[i\alpha(\bar{U} - c)S_{(\alpha)} - i\alpha\bar{U}'' - PR^{-1}S_{(\alpha)}^2]w + PR^{-1}(\alpha^2 \sin\delta + i\alpha \cos\delta \cdot D)T = 0,$$

$$[i\alpha(\bar{U} - c) - R^{-1}S_{(\alpha)}]T + \bar{T}_z w = 0, \quad (3.3)$$

のように与えられる。ここで $S_{(\alpha)} \equiv D^2 - \alpha^2$ 、 $S_{(\beta)} \equiv D^2 - \beta^2$ 、 $D \equiv d/dz$ である。境界条件としては $z = \pm 1/2$ において $w = Dw = T = 0$ を課す。

縦ロールに対する臨界条件は単純に

$$\beta = 3.1163236, \quad R_c^L = 1707.7618 / \sin \delta, \quad (3.4)$$

と与えられる。横ロールに対する臨界条件 R_c^S の δ 依存性を P をパラメーターに 図 1 に示す。 R_c^L と R_c^S の交点 (cross-over point) において両ロールは臨界条件を共有する。

(L) と (S)、(L) と (T)、(T) と (S) の間の P - δ 平面における cross-over points を 図 2 に示す。 $\delta < 90^\circ$ に対しては $P \leq 0.263897$ において (S) モードが常に臨界条件を与える。図 2 と同様の図はすでに Korpela (1974) によって求められているが、本図と詳細はかなり異なっている。さて、(S)、(T)、(L) 3 つのモードは $(P_c, \delta_c, R_c) = (12.420013, 1.0065474, 97216.060)$ において cross-over を生じる。

4. 振幅方程式の弱非線形理論による導出

3 つのモード (S)、(T) と (L) が同時に臨界となる場合の、3 モード間相互作用を記述する振幅方程式の導出を行う。 $[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}]^T \equiv \vec{\Psi}$ を crossover point (P_c, δ_c, R_c) のまわりに $P_c R_c^{-1} - P R^{-1} \equiv \epsilon^2$ 、 $P_c^{-1} - P^{-1} \equiv \epsilon^2 \bar{P}$ および $\delta - \delta_c \equiv \epsilon^2 \bar{\delta}$ で次のように展開する。

$$\begin{aligned} \vec{\Psi} = & (\epsilon \vec{\Psi}_1 + \epsilon^3 \vec{\Psi}_1^{(1)} + \dots) E_1 + (\epsilon \vec{\Psi}_2 + \epsilon^3 \vec{\Psi}_2^{(1)} + \dots) E_2 \\ & + (\epsilon \vec{\Psi}_3 + \epsilon^3 \vec{\Psi}_3^{(1)} + \dots) E_3 + (\epsilon \vec{\Psi}_4 + \epsilon^3 \vec{\Psi}_4^{(1)} + \dots) E_4 \\ & + \epsilon^2 \sum_{m,n=-4} \vec{\Psi}_{mn} E_m E_n + h.o.t. + c.c.. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに $E_n \equiv e^{i\alpha_n(x - c_n t) + i\beta_n y}$ であり $E_{-n} = E_n^{-1}$ とする。横伝播波の対を $n = 1, 2$ 、横ロールを $n = 3$ 、また、縦ロールを $n = 4$ とラベル付けする。簡単化のため

$$\alpha_m + \alpha_n + \dots \equiv \alpha_{mn\dots}, \quad \beta_m + \beta_n + \dots \equiv \beta_{mn\dots}, \quad \text{and} \quad \alpha_m c_m + \alpha_n c_n + \dots \equiv (\alpha c)_{mn\dots}$$

としておこう。

さらに次のような線形作用素を導入する。

$$L_{mn} \equiv \begin{pmatrix} \beta_{mn} M_{mn} & -\alpha_{mn} M_{mn} & i\beta_{mn} \bar{U}' & -i\beta_{mn} P_c R_c^{-1} \cos \delta_c \\ i\alpha_{mn} & i\beta_{mn} & D & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{mn} & P_c R_c^{-1} (\gamma_{mn}^2 \sin \delta_c + i\alpha_{mn} D \cos \delta_c) \\ 0 & 0 & \bar{T}_z & -i(\alpha c)_{mn} + i\alpha_{mn} \bar{U} - R_c^{-1} S_{mn} \end{pmatrix},$$

$$L_{mn,\delta} \equiv \begin{pmatrix} -\alpha_{mn} \beta_{mn} \dot{\bar{U}} & \alpha_{mn}^2 \dot{\bar{U}} & i\beta_{mn} \dot{\bar{U}}' & i\beta_{mn} P_c R_c^{-1} \sin \delta_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha_{mn} \dot{\bar{U}} S_{mn} - i\alpha_{mn} \dot{\bar{U}}'' & P_c R_c^{-1} (\gamma_{mn}^2 \cos \delta_c - i\alpha_{mn} D \cdot \sin \delta_c) \\ 0 & 0 & 0 & i\alpha_{mn} \dot{\bar{U}} \end{pmatrix},$$

$$L_{mn,P^{-1}R} \equiv \begin{pmatrix} -i\beta_{mn}S_{mn} & i\alpha_{mn}S_{mn} & 0 & -i\beta_{mn}\cos\delta_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{mn}^2 & \gamma_{mn}^2\sin\delta_c + i\alpha_{mn}D\cos\delta_c \\ 0 & 0 & 0 & -P_c^{-1}S_{mn} \end{pmatrix},$$

$$L_{mn,P} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_c R_c^{-1}S_{mn} \end{pmatrix}, \quad M_{mn} \equiv \begin{pmatrix} i\beta_{mn} & -i\alpha_{mn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\mathcal{L}_{mn} = i[\alpha_{mn}\bar{U} - (\alpha c)_{mn}]S_{mn} - i\alpha_{mn}\bar{U}'' - P_c R_c^{-1}S_{mn}^2,$$

$$\mathcal{M}_{mn} = (\alpha c)_{mn} - \alpha_{mn}\bar{U} - iP_c R_c^{-1}S_{mn},$$

$$\gamma_{mn}^2 = \alpha_{mn}^2 + \beta_{mn}^2, \quad \dot{\bar{U}} \equiv \partial\bar{U}/\partial\delta, \quad \text{and} \quad S_{mn} \equiv D^2 - \gamma_{mn}^2.$$

さて、多重尺度法を用いて

$$t_n = \epsilon^{2n}t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=0} \epsilon^{2j} \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad (4.2)$$

とおくと、 $O(\epsilon)$ で臨界点における線形方程式

$$L_j \vec{\Psi}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.3)$$

を得るが、これは (3.2) もしくは (3.3) と等価である。解 $\vec{\Psi}_j$ は

$$\vec{\Psi}_j = A_j(t_1, \dots) \vec{\Phi}_j(z), \quad (4.4)$$

の形で求められる。固有関数 $\vec{\Phi}_j(z)$ は $w_j(0) = 1$ のように規格化するものとする。

$O(\epsilon^3)$ では非同次方程式

$$L_j \vec{\Psi}_j^{(1)} = -M_j \vec{\Phi}_j \frac{\partial A_j}{\partial t_1} + A_j \sum_{k=1}^4 |A_k|^2 \vec{N}_{-k kj} + \sigma_j \vec{\Phi}_j \cdot A_j, \quad (4.5)$$

を得る。ここで $\sigma_j \equiv L_{j,P^{-1}R} - \tilde{\delta} L_{j,\delta} + \tilde{P} L_{j,P}$ であり、 $\vec{N}_{-k kj}$ は非線形項である。 $\vec{\Psi}_j^{(1)}$ に対する可解条件からつぎの振幅方程式

$$\frac{dA_j}{dt_1} = \tilde{\lambda}_j A_j + \sum_{k=1}^4 \lambda_{-k kj} |A_k|^2 A_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.6)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_j &\equiv \langle \sigma_j \vec{\Phi}_j \rangle_j = \langle L_{j,P^{-1}R} \vec{\Phi}_j \rangle_j + \tilde{\delta} \langle -L_{j,\delta} \vec{\Phi}_j \rangle_j + \tilde{P} \langle L_{j,P} \vec{\Phi}_j \rangle_j \\ &\equiv \lambda_j^{(G)} + \tilde{\delta} \lambda_j^{(\delta)} + \tilde{P} \lambda_j^{(P)}, \end{aligned}$$

であり、また

$$\lambda_{-kkj} \equiv \langle \vec{N}_{-kkj} \rangle_j,$$

ただし

$$\langle \vec{f}(z) \rangle_j \equiv \int_{-1/2}^{1/2} \vec{f}(z) \vec{\Phi}_j dz / \int_{-1/2}^{1/2} \vec{\Phi}_j M_j \vec{\Phi}_j dz,$$

であり $\vec{\Phi}_j(z) = [0, 0, \tilde{w}, \tilde{T}]^T$ は $\vec{\Phi}_j(z)$ の随伴関数である。

5. 分岐特性

以下の議論では緩やかな時間スケール t_n ($n \geq 1$) の代りに元々の時間スケール t を用いる。 $P < P_c^{(ST)}$ の場合の cross-over 領域近傍における (S) モードと (L) モードの相互作用からはじめよう。 $\epsilon A_j = a_j(t) e^{i\theta_j(t)}$ 、 $\epsilon^2 \tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ とおけば A_3 と A_4 に対する振幅方程式は

$$da_3/dt = a_3(\lambda_3 + \sum_{j=3}^4 \lambda_{-jj3} a_j^2), \quad da_4/dt = a_4(\lambda_4 + \sum_{j=3}^4 \lambda_{-jj4} a_j^2),$$

と書ける。この方程式の平衡解とその安定性は容易に求めることが出来る。平衡解のみを書く、

a) pure transverse roll (P_S) :

$$a_3^2 = -\lambda_3/\lambda_{-333}, \quad a_4 = 0;$$

b) pure longitudinal roll (P_L) :

$$a_3 = 0, \quad a_4^2 = -\lambda_4/\lambda_{-444};$$

c) mixed mode (M) :

$$a_3^2 = \frac{\lambda_4 \lambda_{-443} - \lambda_3 \lambda_{-444}}{\lambda_{-333} \lambda_{-444} - \lambda_{-334} \lambda_{-443}}, \quad a_4^2 = \frac{\lambda_3 \lambda_{-334} - \lambda_4 \lambda_{-333}}{\lambda_{-333} \lambda_{-444} - \lambda_{-334} \lambda_{-443}}.$$

$P = 7$ の場合の分岐曲線を図 3 に示す。定性的に全く同一の分岐特性が $P = 0.7$ についても得られる。

次に $P > P_c^{(ST)}$ において重要となる (T) モードと (L) モードの間の相互作用を考える。再び $\epsilon A_j(t) = a_j(t) e^{i\theta_j(t)}$ を $j = 1, 2, 4$ についておくことにより連立方程式

$$da_1/dt = a_1(c_1 + c_{111}u + c_{221}v + c_{441}w) \equiv a_1 p_1,$$

$$da_2/dt = a_2(c_1 + c_{221}u + c_{111}v + c_{441}w) \equiv a_2 p_2,$$

$$da_4/dt = a_4(c_4 + c_{114}u + c_{114}v + c_{444}w) \equiv a_4 p_4,$$

が得られる。ここで $c_j \equiv \text{Re } \lambda_j$ ($j = 1, 2, 4$)、 $c_{kkj} \equiv \text{Re } \lambda_{-kkj}$ ($k = 1, 2, 4$)、 $u = a_1^2$ 、 $v = a_2^2$ 、 $w = a_4^2$ である。平衡解は

a) traveling wave (P_T) :

$$u = -c_1/c_{111}, \quad v = w = 0;$$

b) pure longitudinal roll (P_L) :

$$u = v = 0, \quad w = -c_4/c_{444};$$

c) standing wave (SW) :

$$u = v = -c_1/(c_{111} + c_{221}), \quad w = 0;$$

d) mixed mode ($M^\pm$) :

$$u = \frac{c_4 c_{441} - c_1 c_{444}}{c_{111} c_{444} - c_{114} c_{441}}, \quad v = 0, \quad w = \frac{c_1 c_{114} - c_4 c_{111}}{c_{111} c_{444} - c_{114} c_{441}};$$

e) mixed mode (M) :

$$u = v = \frac{(c_1 c_{444} - c_4 c_{441})(c_{221} - c_{111})}{2c_{114} c_{441}(c_{221} - c_{111}) - c_{444}(c_{221}^2 - c_{111}^2)},$$

$$w = \frac{-c_4(c_{111}^2 - c_{221}^2) - 2c_1 c_{114}(c_{221} - c_{111})}{2c_{114} c_{441}(c_{221} - c_{111}) - c_{444}(c_{221}^2 - c_{111}^2)}.$$

図4 に分岐曲線の例として $P = 100$ に対するものを示す。

結局、図2の cross-over point ($\delta = \delta(P)$) より大きな δ に対しては縦ロールが常に安定な解として存在し、横モードが達成されることはない。他方、小さな δ に対しては、Rayleigh 数を大きくしてゆくとまず最初に横モードに対する臨界点から安定な横モードが分岐するが (T-L 相互作用の場合には SW が安定で、一方向への伝播波は常に不安定である)、まもなく縦ロールに対する臨界 Rayleigh 数よりはるかに低い Rayleigh 数から mixed mode が分岐し、横モードは安定性を失う。さらに Rayleigh 数を増加させると、縦ロールに対する臨界点から縦モードが分岐するがこれは不安定であり、mixed mode の横成分が0になった時点から縦ロールが安定となり、十分大きな Rayleigh 数では縦ロールが安定に存在する。mixed mode のパターン (planform) は Rayleigh-Bénard 対流における bimodal convection pattern と同様である。Kropp & Busse (1991b) は回転環状流体層の自然対流において図3と定性的に同一の分岐曲線を求めているので、縦ロールの臨界点からみて亜臨界から分岐する mixed mode を含む図3は、このようなモード間相互作用においてかなり普遍性を有しているといえるかもしれない。

最後に (S), (T), (L) の3モード間相互作用を考えるために、 $\epsilon A_j(t) = a_j(t)e^{i\theta_j(t)}$ とおくと、連立方程式が

$$da_1/dt = a_1(c_1 + c_{111}f + c_{221}g + c_{331}u + c_{441}v) \equiv a_1 p_1,$$

$$da_2/dt = a_2(c_1 + c_{221}f + c_{111}g + c_{331}u + c_{441}v) \equiv a_2p_2,$$

$$da_3/dt = a_3(c_3 + c_{113}f + c_{113}g + c_{333}u + c_{443}v) \equiv a_3p_3,$$

$$da_4/dt = a_4(c_4 + c_{114}f + c_{114}g + c_{334}u + c_{444}v) \equiv a_4p_4,$$

のように得られる。ここで $c_j \equiv \text{Re } \lambda_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$)、 $c_{kkj} \equiv \text{Re } \lambda_{-kkj}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) である。 $f \equiv a_1^2$ 、 $g \equiv a_2^2$ 、 $u \equiv a_3^2$ 、 $v \equiv a_4^2$ とおくと平衡解は次の 11 とおり存在することがわかる。

- 1) pure mode (P_T): $f \neq 0, g = u = v = 0$;
- 2) standing wave (SW): $f = g \neq 0, u = v = 0$;
- 3) pure mode (P_S): $f = g = v = 0, u \neq 0$;
- 4) pure mode (P_L): $f = g = u = 0, v \neq 0$;
- 5) transverse mixed mode (M_T): $f = g \neq 0, u \neq 0$, and $v = 0$;
- 6) mixed mode (M_O): $f = g \neq 0, u = 0$, and $v \neq 0$;
- 7) transverse mixed mode ($M_T^\pm$): $f \neq 0, g = v = 0$, and $u \neq 0$;
- 8) mixed mode ($M_O^\pm$): $f \neq 0, g = u = 0$, and $v \neq 0$;
- 9) mixed mode (M): $f = g \neq 0, u \neq 0$, and $v \neq 0$;
- 10) mixed mode (M_S): $f = g = 0, u \neq 0$, and $v \neq 0$;
- 11) mixed mode ($M^\pm$): $f \neq 0, g = 0, u \neq 0$, and $v \neq 0$.

平衡解と安定性の条件に関する具体的な表現は数式処理言語を用いることにより容易に求められるが、詳細は省略し、典型的な分岐曲線を図 5 - 10 に説明なしに示した。ここでも、十分大きな Rayleigh 数に対しては縦ロールが達成されることが結論される。

6. まとめ

ここに求めた cross-over 領域における分岐特性はあくまで cross-over point 近傍の局所理論の枠内で妥当なものであり、決して大域的な性質ではない。例えば図 3 の場合について、 $\delta \rightarrow 0$ では鉛直スロットに帰着されるので、横ロールが最終的に達成されなければならないが、本解析は最終的に安定な縦ロールの存在を示しており、鉛直の場合との接続は今後の課題である。それに対して、 $\delta \rightarrow \pi/2$ では縦ロールが予測され、これは主流を伴う Rayleigh-Bénard 対流の場合と一貫している。また、高次不安定性に対する情報も一切含んでいない。鉛直の場合、Nagata & Busse と Chait & Korpela によって横ロールの高次不安定性が、また水平の場合には Clever & Busse (1991, 92) によって縦ロールの高次不安定性がすでに議論されており、さらに傾斜の場合にも Clever & Busse (1977)、Busse & Clever (1992) によって縦ロールの高次不安定性が調べられた。しかし、ここで求めた mixed mode の高次不安定性に関する議論は行われておらず、これも今後の課題である。

References

- Busse, F.H. & Clever, R.M. 1992 to appear in *J. Eng. Math.*
 Chait, A. & Korpela, S.A. 1989 *J. Fluid Mech.* **200** 189-216.
 Clever, R.M. & Busse, F.H. 1977 *J. Fluid Mech.* **81**, 107-127.
 Clever, R.M. & Busse, F.H. 1991 *J. Fluid Mech.* **229**, 517-529.
 Clever, R.M. & Busse, F.H. 1992 preprint.
 Fujimura, K. 1991 to appear in *Eur. J. Mech. B/Fluids*
 Fujimura, K. & Mizushima, J. 1991 *Eur. J. Mech. B/Fluids* **10** No.2-Suppl., 25-30.
 Gershuni, G.Z. & Zhukhovitskii, E.M. 1969 *Prikl. Mat. i Mekh.* **33**, 855-860.
 Hart, J.E. 1971 *J. Fluid Mech.* **47**, 547-576.
 Korpela, S.A. 1974 *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 215-222.
 Kropp, M. & Busse, F.H. 1991a In *Bifurcation and Chaos* (ed. R. Seydel & F.W. Schneider, T. Küpper, H. Troger), pp.217-223. Birkhäuser.
 Kropp, M. & Busse, F.H. 1991b preprint
 Nagata, M. & Busse, F.H. 1983 *J. Fluid Mech.* **135** 1-26.

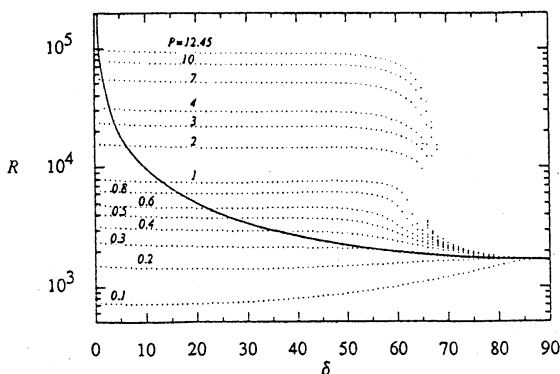


Fig.1. Critical Rayleigh number for longitudinal rolls (solid line) and for transverse stationary rolls (dotted line).

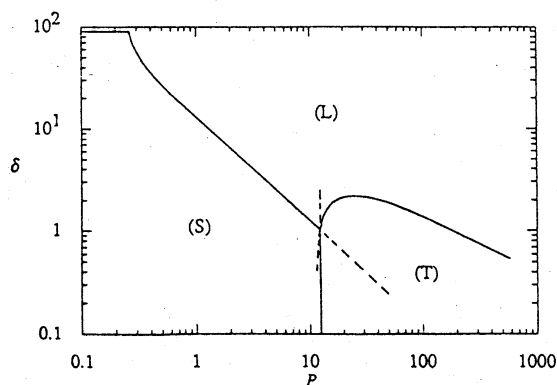


Fig.2. Cross-over point between different modes.

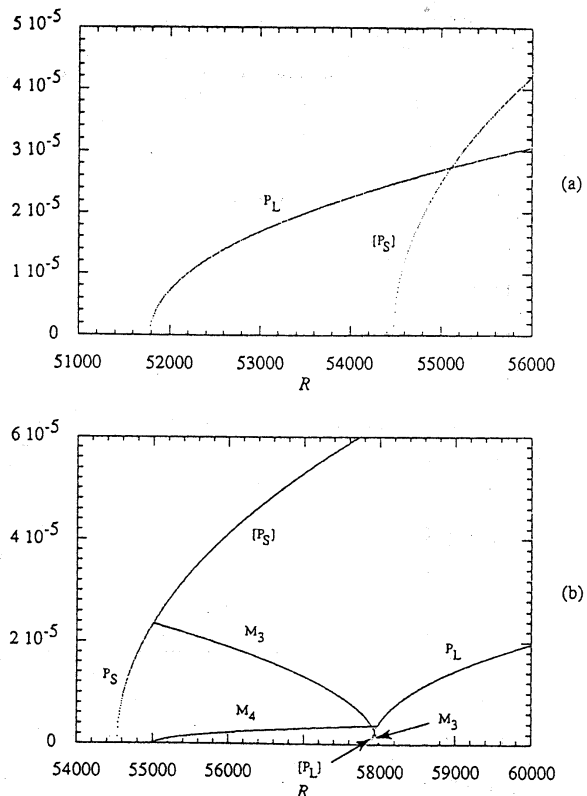


Fig.3. Bifurcation diagram for two mode interaction between transverse stationary rolls and longitudinal rolls. Letters attached to each branch denote the different types of stable equilibrium solution. Letters in a bracket denote unstable equilibrium solutions. $P = 7$. (a) : $\delta = 1.89^\circ$, (b) : $\delta = 1.69^\circ$.

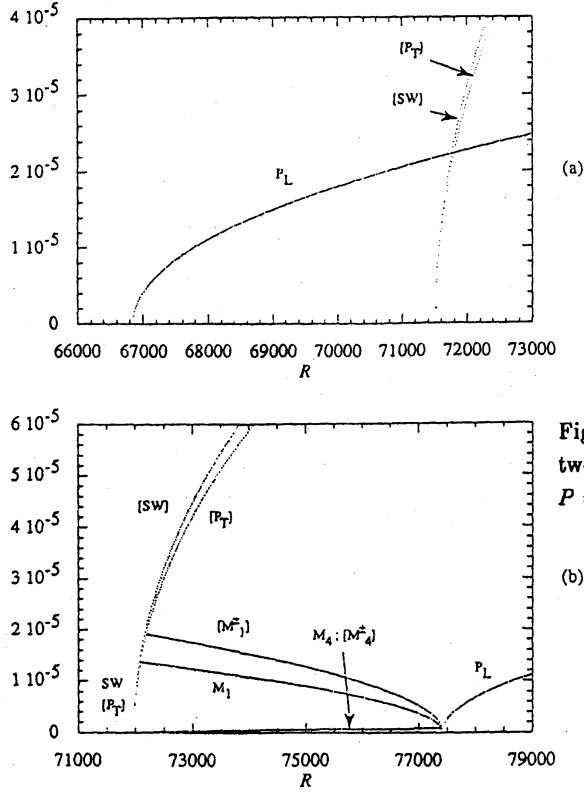


Fig.4. Bifurcation diagram for two mode interaction between transverse traveling waves and longitudinal rolls. $P = 100$. (a) : $\delta = 1.464^\circ$, (b) : $\delta = 1.264^\circ$.

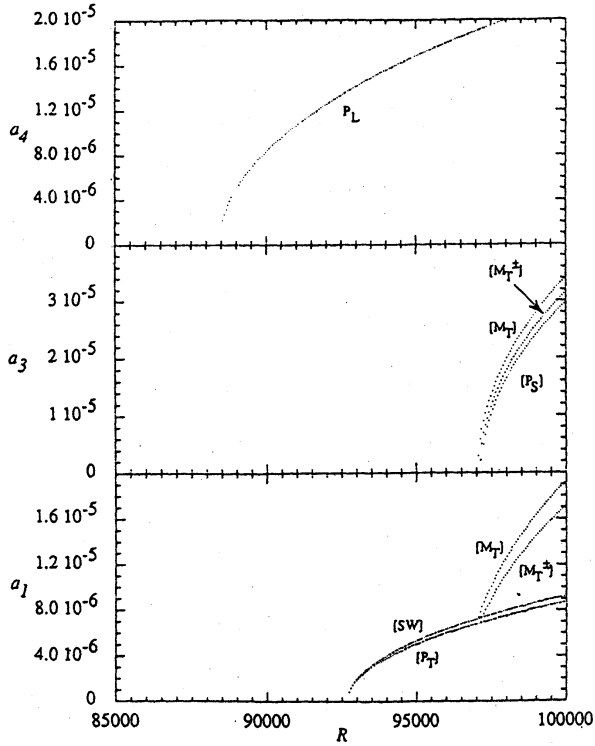


Fig.5. Bifurcation diagram for three mode interaction. $P = 12.5$, $\delta = 1.1^\circ$.

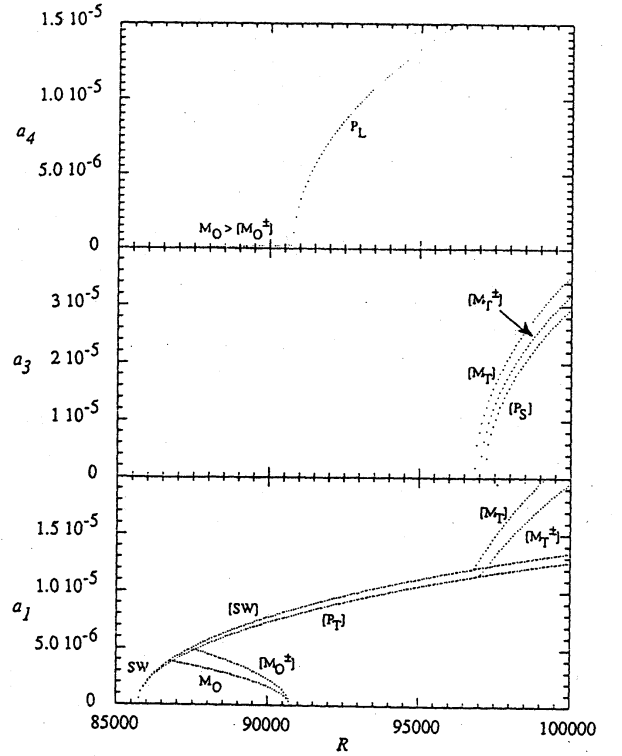
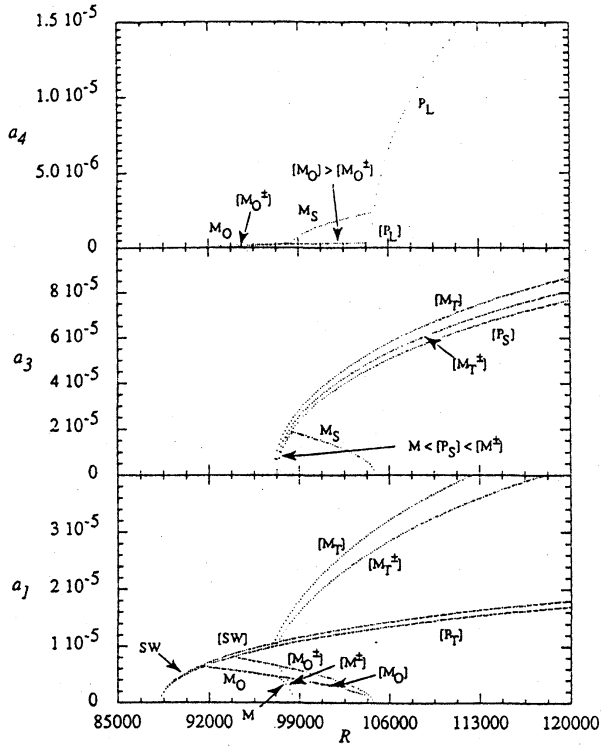
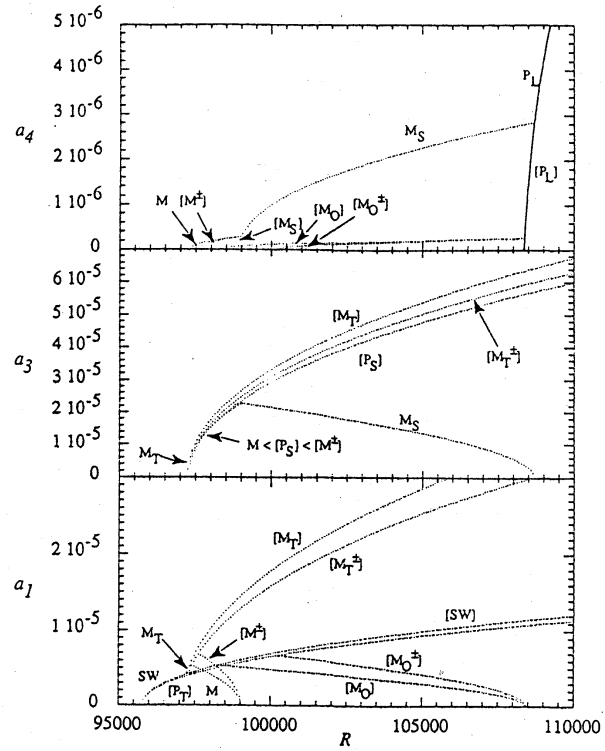
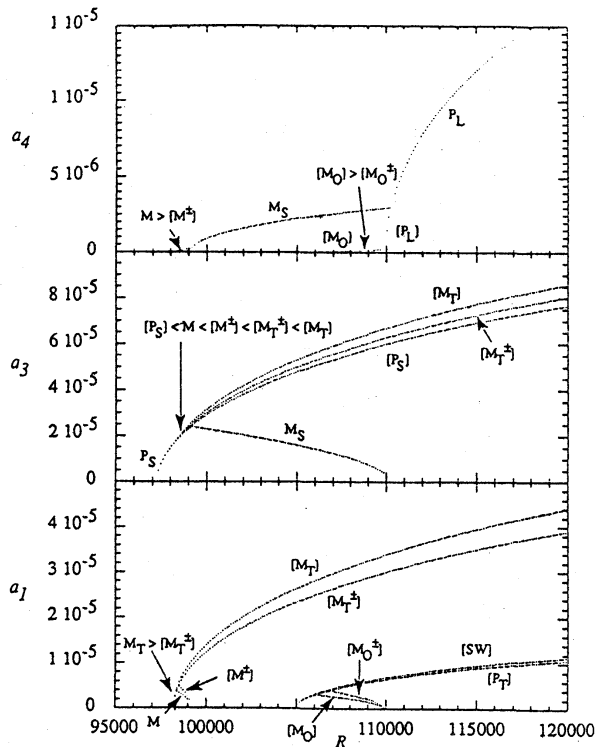
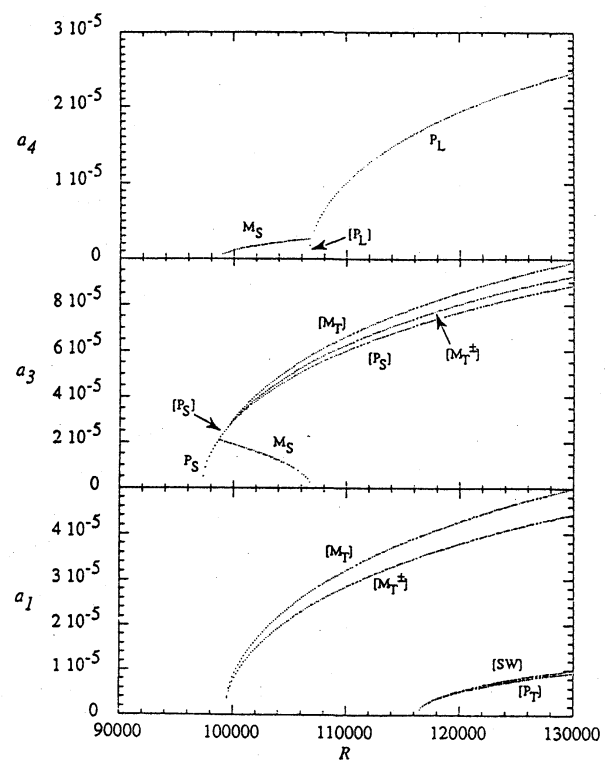


Fig.6. $P = 12.65$, $\delta = 1.06^\circ$.

Fig.7. $P = 12.6$, $\delta = 0.92^\circ$.Fig.8. $P = 12.45$, $\delta = 0.9^\circ$.Fig.9. $P = 12.3$, $\delta = 0.9^\circ$.Fig.10. $P = 12.15$, $\delta = 0.94^\circ$.