

Hurwitz ゼータ関数の区間 $(0, 1)$ における実零点とその挙動について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 遠藤健太, 鈴木雄太
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 導入と主結果

Hurwitz ゼータ関数は, $s = \sigma + it$ を複素変数, $0 < a \leq 1$ を実パラメータとしたとき,

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

で定義される級数である. この級数は, 半平面 $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対かつ広義一様に収束し, 複素全平面に有理型関数として解析接続され, $s = 1$ において 1 位の極を持ち, その留数は 1 であることが知られている. $a = 1$ のときは, Riemann ゼータ関数となる. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $0 < \sigma < 1$ の範囲に実零点を持たないことが知られている. 一方で, Hurwitz ゼータ関数は, 同じ範囲においてパラメータ a の値によっては, 実零点を持つことがあり, 中村隆氏により次の結果が得られている.

Theorem 1.1 ([3]).

- (1) $1/2 \leq a \leq 1$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma, a)$ は区間 $(0, 1)$ において非零である.
- (2) $0 < a < 1/2$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma, a)$ は区間 $(0, 1)$ において少なくとも一つの零点を持つ.

この定理により, Hurwitz ゼータ関数の区間 $(0, 1)$ での実零点の非零条件が明らかにされた. 筆者らは, この結果に対して, 実零点が存在するとき, すなわち, $0 < a < 1/2$ のときについて詳しく調べ, Theorem 1.1 を精密化し, 次の結果を得た.

Theorem 1.2 ([2]). $0 < a < 1/2$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma, a)$ は区間 $(0, 1)$ においてただ一つの零点を持つ. また, それらの零点はすべて一位の零点である.

さらに, この零点がパラメータ a に関してどのような挙動をするか調べ, 以下の結果を得ることができた.

Theorem 1.3 ([2]). $0 < a < 1/2$ にたいして, $\beta(a)$ を区間 $(0, 1)$ における $\zeta(\sigma, a)$ のただ一つの零点とする. このとき, $\beta: (0, 1/2) \rightarrow (0, 1)$ は単調減少な C^∞ -微分同相関数である. さらに, 漸近公式

$$\beta(a) = 1 - a + a^2 \log a + O(a^2) \quad (a \rightarrow 0+) \tag{1}$$

が成り立つ.

また, Theorem 1.3 の $\beta(a)$ の漸近展開はいくらでも続けることができる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

Theorem 1.4 ([2]). ある $A_{k,\ell}$ が存在して, 任意の正の整数 N にたいして,

$$\beta(a) = 1 + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 0 \leq \ell \leq k-1}} A_{k,\ell} a^k \log^\ell a + O_N(a^{N+1} |\log a|^N) \quad (a \rightarrow 0+)$$

が成り立つ.

ゼータ関数の実零点は, 多くの研究者によって研究され, 数論的な問題において重要な意味を持つ. その一つの例として, Dirichlet の L -関数が挙げられ, $s = 1$ の周りの実零点は, “Siegel 零点” として知られている. この零点が存在するか否かというのは解析的整数論の重要な問題の一つである. Hurwitz ゼータ関数と Dirichlet L -関数には,

$$L(s, \chi) = q^{-s} \sum_{r=1}^q \chi(r) \zeta(s, r/q)$$

という関係式がある. ただし, χ は mod q の Dirichlet 指標である. この関係式から Hurwitz ゼータ関数の実零点に関する問題は Siegel 零点に関する問題の一種の toy version と見なせるかもしれない. また, 筆者らの研究が実零点の研究の一つのモデルケースとなることを期待する.

Remark 1.5. Hurwitz ゼータ関数の負の実軸上の零点にたいして, 中村隆氏 [4] は $(-1, 0)$ の非零条件を得ている. その結果を松坂俊輝氏 [5] が一般化し $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とするとき, $\sigma \in (-N-1, -N)$ においての Theorem 1.1 と同様な結果が成り立つことが証明されている. これらの条件は, Bernoulli 多項式の根を用いて記述される.

2 証明の概略

まず, 中村氏が示した Theorem 1.1 の証明のスケッチをする. 証明の鍵となるのは以下の点である:

1. $0 < \sigma < 1$ のとき, 積分表示

$$\Gamma(\sigma) \zeta(\sigma, a) = \int_0^\infty H(a, x) x^{\sigma-1} dx \quad (2)$$

が成り立つ. ただし,

$$H(a, x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{(1-a)x} - e^x + 1}{x(e^x - 1)}, \quad x > 0$$

である.

2. 任意の $x > 0$ にたいして $H(a, x)$ が負であることは, $1/2 \leq a \leq 1$ であることに同値である.
3. $\zeta(s, a)$ の特殊値は,

$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 1-0} \zeta(\sigma, a) = -\infty$$

となる.

これらにより, $1/2 \leq a \leq 1$ のとき, $\zeta(\sigma, a) < 0$ が成り立ち, $0 < a < 1/2$ のときは, 特殊値が $\zeta(0, a) = 1/2 - a > 0$, $\lim_{\sigma \rightarrow 1-0} \zeta(\sigma, a) = -\infty$ となるので, 中間値の定理より, 零点を持つことが示される.

Theorem 1.1 の鍵となっているのは, 積分表示 (2) とその被積分関数を調べたことである. 零点の存在が一意的であるかを確かめようとすると, $\zeta(\sigma, a)$ の微分の挙動を調べてみるのが, 自然に出てくる考えである

が、微分をすると和を計算する必要がある、それでは十分な情報を得ることができなかった。そこで、筆者らは再び積分表示 (2) に注目し、詳しく調べることによって、零点の存在が一意的であることを示すことができた。そこで、鍵となったのは以下の二つの lemma である。

Lemma 2.1. 任意の $0 < a < 1/2$ にたいして、ある $x_0 > 0$ が唯一つ存在して、

$$H(a, x_0) = 0, \quad H(a, x) > 0 \quad (0 < x < x_0 \text{ のとき}), \quad H(a, x) < 0 \quad (x_0 < x \text{ のとき})$$

が成り立つ。

この lemma の証明は省略する。

Lemma 2.2. $0 < a < 1/2$ とし、 $x_0 > 0$ を Lemma 2.1 で与えられるものとする。このとき

$$x_0^{-\sigma} \Gamma(\sigma) \zeta(\sigma, a)$$

は $0 < \sigma < 1$ に関して狭義単調減少である。

Proof. $\zeta(\sigma, a)$ の積分表示から

$$x_0^{-\sigma} \Gamma(\sigma) \zeta(\sigma, a) = \int_0^{x_0} H(a, x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \frac{dx}{x} + \int_{x_0}^{\infty} H(a, x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \frac{dx}{x}$$

となる。最初の積分について、被積分関数は

$$H(a, x) > 0, \quad \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \text{ は } 0 < \sigma < 1 \text{ に関して単調減少,}$$

であるので

$$\int_0^{x_0} H(a, x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \frac{dx}{x}$$

は、 $0 < \sigma < 1$ に関して単調減少となる。2 項目の積分についても、同じような議論をすることにより、 $0 < \sigma < 1$ に関して単調減少となり結論を得る。□

Proof of Theorem 1.2. $0 < a < 1/2$ とする。このとき、

$$\zeta(0, a) = 1/2 - a > 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 1-} \zeta(\sigma, a) = -\infty$$

となる。これより、

$$F(\sigma, a) = x_0^{-\sigma} \Gamma(\sigma) \zeta(\sigma, a)$$

とおくと、

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} F(\sigma, a) = \infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 1-} F(\sigma, a) = -\infty$$

が成り立つ。よって、Lemma 2.2 より、区間 $(0, 1)$ において $F(\sigma, a)$ の零点が唯一つであることが示される。この零点を $\beta(a)$ とおく。 $x_0^{-\sigma} \Gamma(\sigma)$ は区間 $(0, 1)$ において零点も極も持たないので、 $F(\sigma, a)$ と $\zeta(\sigma, a)$ の零点とその位数が一致することがわかる。したがって、あとは $F(\sigma, a)$ の零点 $\beta(a)$ の位数が一一位であることを示せばよい。任意の $0 < \sigma < 1$ にたいして、

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} F(\sigma, a) = \left(\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} \right) H(a, x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \log \left(\frac{x}{x_0} \right) \frac{dx}{x} < 0$$

が成り立つ。なぜなら、任意の $x \neq x_0$ にたいして、Lemma 2.1 より

$$H(a, x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\sigma} \log \left(\frac{x}{x_0} \right) < 0$$

が成り立つからである。これより、 $F(\sigma, a)$ の零点の位数が一一位であることもわかる。□

Remark 2.3. この Lemma 2.2 の手法は, Mellin 変換された形の関数の実零点を調べる際に, 被積分関数の零点が唯一つでありその零点の前後で値の符号が変化するとき適用できるので, Hurwitz ゼータ関数だけでなく, 他のゼータ関数の実零点を調べる際にも応用できるのではないかと考えられる.

Proof of Theorem 1.3. $\beta: (0, 1/2) \rightarrow (0, 1)$ が単調減少な C^∞ -微分同相関数であることの証明は省略させてもらい, ここでは $\beta(a)$ の性質から漸近公式がどのように導かれるかを解説する. まず, $\beta(a) \rightarrow 1 - (a \rightarrow 0+)$ となることから, $\beta(a) \geq 1/2$ として良い. Euler-Maclaurin の和公式より,

$$\zeta(s, a) = a^{-s} + \frac{(a+1)^{1-s}}{s-1} + \frac{(a+1)^{-s}}{2} - s \int_0^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) (x+a+1)^{-s-1} dx$$

が任意の $0 < \sigma < 1$ にたいして成り立つ. $s = \sigma$ のとき, 任意の $0 < \sigma < 1$ に対して一様に,

$$\left| \sigma \int_0^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) (x+a+1)^{-\sigma-1} dx \right| \ll \sigma \int_0^\infty (x+a+1)^{-\sigma-1} dx \ll 1$$

が成り立つ. よって,

$$\zeta(\sigma, a) = a^{-\sigma} + \frac{(a+1)^{1-\sigma}}{\sigma-1} + O(1)$$

が成り立つ. $\beta = \beta(a)$ と略記し, $\sigma = \beta$ を代入すると,

$$\beta - 1 = -a^\beta (a+1)^{1-\beta} + O((1-\beta)a^\beta) \quad (3)$$

が成り立つ. いま $\beta \geq 1/2$ としていたので, この (3) より $\beta - 1 \ll a^\beta \ll a^{1/2}$ となることに注意すると,

$$a^\beta = a \exp((\beta-1) \log a) = a + (\beta-1)a \log a + O((\beta-1)^2 a |\log a|^2) \quad (4)$$

が成り立つ. 特に,

$$a^\beta \ll a \quad (5)$$

が成り立つ. また,

$$(a+1)^{1-\beta} = \exp((1-\beta) \log(1+a)) = 1 + O((1-\beta)a) \quad (6)$$

も成り立つ. (3) に (4), (5), (6) を代入することにより,

$$\beta - 1 = -a + (1-\beta)a \log a + O((1-\beta)a) \quad (7)$$

を得る. 特に,

$$1 - \beta \ll a \quad \text{および} \quad \beta - 1 = -a + O(a^2 |\log a|)$$

が成り立つ. この評価を (7) に代入することで,

$$\begin{aligned} \beta - 1 &= -a + (a + O(a^2 |\log a|)) a \log a + O(a^2) \\ &= -a + a^2 \log a + O(a^2) \end{aligned}$$

を得る. □

一般 Stieltjes 定数を用いることで $\beta(a)$ のさらなる漸近展開を求めることができる.

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(a) (s-1)^n$$

を $\zeta(s, a)$ の $s = 1$ での Laurent 展開とする. $s = \beta(a)$ を代入することで,

$$\beta(a) = 1 - \frac{1}{\gamma_0(a)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(a) (\beta-1)^{n+1} \right) \quad (8)$$

を得る. 一般 Stieltjes 定数の変数 a についての漸近展開と公式 (8) を再帰的に用いることにより, Theorem 1.4 を得ることができる. この定理の証明はここでは行わないことにし, その代わりとして, 以下に $N = 2$ のときの具体例を挙げる. この具体例だけでも, 証明のエッセンスをわかってもらえるだろう.

Example 2.4.

$$\gamma_0(a) = \frac{1}{a} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(n+1) a^n$$

となることが知られている. ただし, γ はオイラー定数である. これより,

$$\frac{1}{\gamma_0(a)} = a(1 - \gamma a + O(a^2)).$$

を得る. また, Berndt[1] により,

$$\gamma_n(a) = \frac{(-\log a)^n}{an!} + O(1) \asymp \frac{|\log a|^n}{an!},$$

となることが知られている. これらと (1) により,

$$\gamma_1(a)(\beta(a) - 1)^2 = -a \log a + O(a^2 |\log a|^2),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n(a)(\beta(a) - 1)^{n+1} \ll a^2 |\log a|^2$$

を得る. これらを (8) に代入することにより,

$$\begin{aligned} \beta(a) &= 1 - a(1 - \gamma a + O(a^2))(1 - a \log a + O(a^2 |\log a|^2)) \\ &= 1 - a + a^2 \log a + \gamma a^2 + O(a^3 |\log a|^2) \end{aligned}$$

を得る.

Remark 2.5. この計算からわかるように, $N \geq 3$ にたいして $A_{k,l}$ を決定するには, $\gamma_n(a)$ の漸近展開の明示式が必要となる.

参考文献

- [1] B. C. Berndt, *On the Hurwitz zeta-function*, Rocky Mountain J. Math. **2** (1972), no. 1, 151-157.
- [2] K. Endo and Y. Suzuki, *Real zeros of Hurwitz zeta-functions and their asymptotic behavior in the interval $(0, 1)$* , arXiv:1705.08102, preprint (2017).
- [3] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **160** (1) (2016), 39-50.
- [4] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval $(-1, 0)$* , J. Math. Anal. Appl. **438** (1) (2016), 42-52.
- [5] T. Matsusaka, *Real zeros of the Hurwitz zeta function*, arXiv:1610.07945, preprint (2016). To appear in *Acta Arith.*