

学 位 審 査 報 告 書

(ふ り が な) 氏 名	すずき さきえ 鈴木 咲衣
学位 (専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析専攻
(学位論文題目) On the universal sl_2 invariant of boundary bottom tangles (境界底タングルの普遍量子 sl_2 不変量について)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 葉 廣 和 夫 准教授 向 井 茂 教 授 大 槻 知 忠 教 授

京都大学	博士（ 理学 ）	氏名	鈴木 咲衣
論文題目	On the universal sl_2 invariant of boundary bottom tangles (境界底タングルの普遍量子 sl_2 不変量について)		
(論文内容の要旨) Jones 多項式の発見以来、量子不変量と呼ばれる、絡み目や 3 次元多様体の様々な不変量が導入され、活発に研究されてきている。量子 sl_2 不変量（色付き Jones 多項式）とは量子群 $U_h(sl_2)$ とその有限次元表現に付随する絡み目の不変量である。 量子群 $U_h(sl_2)$ は形式的べき級数環 $Q[[h]]$ 上、元 H, E, F で位相的に生成され、関係式 $[H, E]=2E, [H, F]=-2F, [E, F]=(K-K^{-1})/(q^{1/2}-q^{-1/2})$（ここで、$K=\exp(h/2), q=\exp h$）で定義される代数であり、リボン Hopf 代数の構造を持つ。 底タングルとは、立方体のなかの枠付きタングル（プロパーに埋め込まれた 1 次元部分多様体）$T=T_1 \cup \cdots \cup T_n$ であって、各成分 T_i が線分と同相であり、成分の端点が立方体の底面の中の線分上に隣り合って並ぶようなものをいう。一般にリボン Hopf 代数が与えられたとき、それに付随する底タングルの普遍不変量が存在する。n 成分底タングルの普遍 sl_2 不変量 J_T は、$U_h(sl_2)$ の n 重完備テンソル積 $U_h(sl_2)^{\otimes n}$ に値を持つ不変量であり、$U_h(sl_2)$ の普遍 R 行列を用いて定義される。3 次元球面の中の任意の絡み目 L は、ある底タングル T の各成分を閉じることにより得られる。このとき、L の量子 sl_2 不変量は、T の普遍 sl_2 不変量 J_T に $U_h(sl_2)$ の有限次元表現に付随する量子トレースを適用することによって得られる。このように底タングルの普遍 sl_2 不変量を考察することにより絡み目の量子 sl_2 不変量を研究することができる。 本論文では境界底タングルの普遍 sl_2 不変量の取りうる値について考察している。境界底タングルとは、各成分が互いに交わらない Seifert 曲面を張るような底タングルのことである。 $\bar{U}_q^{ev}$ を $U_h(sl_2)$ の $Z[q, q^{-1}]$-部分代数で、$K^2, K^{-2}, e=(q^{1/2}-q^{-1/2})E, f=(q-1)FK$ で生成されるものとする。これは De Concini と Procesi により導入された $U_h(sl_2)$ の整形式の変種である。 定理. T が n 成分からなる境界底タングルであるとき、T の普遍 sl_2 不変量 J_T は $\bar{U}_q^{ev}$ の n 重テンソル積 $(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}$ のある完備化 $((\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n})^\wedge$ に含まれる。 ここで定理の証明の概略を述べる。任意の n 成分境界底タングル T は、ある $2g$ 成分底タングル T' に幾何的な交換子作用素と乗法作用素を適用することによって得られることが葉廣によって知られている。この事実に対応して、普遍 sl_2 不変量 J_T は、T' の普遍 sl_2 不変量 $J_{T'}$ に、$U_h(sl_2)$ における代数的な交換子作用素と乗法作用素を適用することによって得られるので、その値が $((\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n})^\wedge$ に含まれることを示せばよい。この計算はかなり複雑なものであるが、申請者は量子群 $U_h(sl_2)$ の部分加群を取り扱うための、モノイダル圏を利用した図式的な方法を導入することによりこれを行っている。 上の定理は境界絡み目の量子 sl_2 不変量（色付き Jones 多項式）へ応用される。任意の境界絡み目 L はある境界底タングル T の各成分を閉じることにより得ることができる。申請者は、絡み行列が 0 の絡み目に対するある量子 sl_2 不変量の線形結合に関する葉廣による結果を、境界絡み目の場合に対して大幅に改良する結果を得ている。 以上が本論文の主要結果である。			

(続 紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

境界絡み目とは、互いに交わらない Seifert 曲面を各成分が許容するような絡み目のことである。境界絡み目は結び目理論において、かなり古くから研究されている重要な概念である。例えば 1960 年代に Smythe は、 n 成分境界絡み目を、その補空間の基本群から階数 n の自由群への、メリディアンを生成元に移す全射準同型を許容するような絡み目として特徴づけている。また、境界絡み目は、Milnor 不変量や Alexander 多項式が消えるなど、古典的な絡み目不変量に対して著しい性質を持っていることが知られている。

一方、1980 年代に発見された Jones 多項式をはじめとして、量子不変量と呼ばれる絡み目と 3 次元多様体の数多くの不変量が導入され、活発に研究されている。これらの不変量は、Milnor 不変量などの古典的な不変量と比較すると、絡み目を区別することについてはかなり強力であるものの、絡み目の位相的・幾何的な性質をどのように反映しているかについては、まだあまりよく理解されているとはいえない。

論文内容の要旨において述べたように、本論文の主結果は、 n 成分境界底タングルの普遍 sl_2 不変量は部分代数 $(\bar{U}_q^{ev})^{\otimes n}$ に含まれるというものである。 $\bar{U}_q^{ev}$ は、例えば Lusztig の整形式による左随伴作用によって閉じているなど、代数的に良い性質をもった重要な $U_h(sl_2)$ の部分代数である。

境界絡み目の量子不変量の性質に関しては、量子不変量の有限型不変量としての性質と境界絡み目の有限型不変量に関する一般的な性質とを合わせて得られることを超えたところでは、申請者の研究以前に知られていることはほとんどなかったのではないと思われる。主定理の系である境界底タングルの量子 sl_2 不変量についての結果は、この不変量が多くの変数 q の多項式の積 $\Phi_n(q)$, $n \geq 1$, で割りきれられることを言っているが、 $n \neq 1$ のときの $\Phi_n(q)$ で割りきれられることは有限型不変量の理論からは直接には得られないことであり、とても興味深い結果である。

参考論文において申請者は、本論文と同様の結果をリボン底タングルに対して証明している。ここでリボン底タングルとは、リボン特異点と呼ばれる種類の特異点を許すような有限個の円盤のはめ込みの境界となるような底タングルのことである。リボン底タングルは、Milnor 不変量が消えるという性質を境界底タングルと共有している。また、申請者は Milnor 不変量と普遍 sl_2 不変量との関連についての研究を計画しており、今後この方向での研究の進展が期待される。

本論文は、トポロジーの国際誌である Algebraic and Geometric Topology 誌に受理され、掲載が予定されている。

以上のように、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。また、平成 24 年 1 月 13 日に論文内容とそれに関連した事項についての試問を行った。その結果、合格と認めた。

要旨公開可能日： 年 月 日以降