

Extensions of Unbounded Representations

福岡大・理 黒瀬 秀樹

(Hideki Kurose)

§1 序

ある $*$ -多元環 A のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の (一般に有界でない) 表現が与えられた時、それと同じ $\mathcal{H}$ 上の表現に拡大する方法を考える。 $*$ -環の表現とは下の意味で使う。

定義 π が (多元)環 A のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に於ける表現であるとは $\mathcal{H}$ の dense な部分空間 $\mathcal{D}(\pi)$ があって

i) 任意の $a \in A$ に対し、 $\pi(a)$ は $\mathcal{D}(\pi)$ を定義域とする可閉線型作用素、

ii) $\pi(a)\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi)$ ($\forall a \in A$)

iii) $\pi: A \rightarrow \pi(A)$ は 準同型

を満たすときを言う。さらに A が $*$ -環であり、 $\pi(a^*) \subset \pi(a)^*$ ($a \in A$) を満たすとき π は $*$ -preserving または π を $*$ -表現という。環 A の 2 つの表現 π, ρ が 同じヒルベルト空間において与えられたとき、 ρ が π の拡大 ($\rho \supset \pi$) であるとは

$\mathfrak{A}(\rho) \supset \mathfrak{A}(\pi)$ かつ $\rho(a)|_{\mathfrak{A}(\pi)} = \pi(a) \quad (a \in \mathcal{A})$
 と置けるとしよう。

我々の問題を述べる前に、実に簡単な例をあげる。
 $\mathcal{P}(x)$ と x の複素係数多項式全体のなす $*$ -環とし、

$$\mathcal{H} = L^2[0, 1]$$

$$\mathfrak{A}(\pi) = \{f \in C^\infty[0, 1]; \quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)\}$$

$$\mathfrak{A}(\rho) = \{f \in C^\infty[0, 1]; \quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) \quad (n=0, 1, 2, \dots)\}$$

$$\pi(\sum C_k x^k) = \sum C_k (i \frac{d}{dx})^k |_{\mathfrak{A}(\pi)}$$

$$\rho(\sum C_k x^k) = \sum C_k (i \frac{d}{dx})^k |_{\mathfrak{A}(\rho)}$$

とすれば π, ρ は $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現で ρ は π の拡大になっている。

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(x)$ の表現、特に $*$ -表現の状況は非常に簡単である。
 π を $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現とすれば $\pi(x)$ は $\mathfrak{A}(\pi)$ を不変にする対称作用素であり、 π の $*$ -表現としての拡大は、 $\pi(x)$ の対称作用素としての拡大とその不変定義域と問題にすればよい。従って $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現の拡大の議論は、Cayley 変換を用いた対称作用素の拡大の議論に帰着される。しかし $\mathcal{P}(x)$ 以外の $*$ -環に対する $*$ -表現とその拡大については事情が一変する。例えば 2 変数の多項式環 $\mathcal{P}(x, y)$ の $*$ -表現 π を考えた時、 $\pi(x), \pi(y)$ は $\mathfrak{A}(\pi)$ を不変定義域とする可換な対称作用素であ

るが、その構造は非常に複雑であることは良く知られている
し、可換性を保つたまま $\pi(x), \pi(y)$ の対称作用素として拡張
することも非常に困難である。我々がここで問題にしたいのは、
ある $*$ -環 $\mathcal{A}$ の $*$ -表現が与えられた時、それを $*$ -
表現として拡張する一つの方法を与えることである。特にそ
れを用いて、対称作用素の自己共役作用素への拡張と同じこ
とと、 $*$ -表現に於いて考えるのが目的である。

§2 環 $\mathcal{A}$ の表現の議論は、前セクションの話から類推される
ように、可換作用素の議論とある程度平行に行なうことが
できる。

定義 $\mathcal{A}$ を環、 π を $\mathcal{A}$ のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における表現とす
る。

$$\|\xi\|_a = \|\pi(a)\xi\| + \|\xi\| \quad (a \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{D}(\pi))$$

と定義し、semi-norms $\{\|\cdot\|_a : a \in \mathcal{A}\}$ による $\mathcal{D}(\pi)$ の位相を $\pi(\mathcal{A})$
による induced 位相 (t_π) と呼ぶ。 $\mathcal{D}(\pi)$ の t_π による完備化を
 $\mathcal{D}(\widehat{\pi})$ と書けば $\mathcal{D}(\widehat{\pi}) \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\widehat{\pi}) \subset \mathcal{D}(\overline{\pi(x)})$ である。

$$\widehat{\pi}(x) = \overline{\pi(x)}|_{\mathcal{D}(\widehat{\pi})} \quad (x \in \mathcal{A})$$

とあれば $\widehat{\pi}$ は $\mathcal{A}$ の表現となる。 $\widehat{\pi}$ を π の閉包、 $\widehat{\pi} = \pi$ のとき
 π は閉であるという。

定義 $\mathcal{A}$, π は前のとおりとし,

$$\mathfrak{A}(\pi^*) = \bigcap_{x \in \mathcal{A}} \mathfrak{A}(\pi(x)^*) , \quad \pi^*(x) = \pi(x^*)^*|_{\mathfrak{A}(\pi^*)} \quad (x \in \mathcal{A})$$

とする。 $\mathfrak{A}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で dense なとき、 π^* はやはり $\mathcal{A}$ の表現になっている。 π^* を π の adjoint 表現という。

$*$ -環 $\mathcal{A}$ の表現 π が $*$ -preserving であることは $\pi \subset \pi^*$ と同値である。非有界作用素との対応をかんぱんに書いておく。

可閉作用素 $T \longleftrightarrow$ 表現 π

$\overline{T} \longleftrightarrow \tilde{\pi}$

$T^* \longleftrightarrow \pi^*$

対称作用素 $\longleftrightarrow$ $*$ -表現

π が $*$ -表現ならば、対称作用素と同様に、 $\pi \subset \tilde{\pi} \subset \pi^*$ となっている。自己共役作用素に相当する表現は $\pi = \pi^*$ で定義すればよいであろうである。(実際にこれを満たすとき自己共役表現と呼ぶ。) 2. の $*$ -表現 π, ρ が $\pi \subset \rho$ ならば $\pi \subset \rho \subset \rho^* \subset \pi^*$ であるから、自己共役表現 π は $*$ -表現として極大なものである。しかし、自己共役表現にはある意味で病的なものもたくさん含むから、実際には自己共役作用素に相当するものではない。いくつかの $*$ -環のクラスに対し、自己共役作用素に相当する表現と、その表現への拡大の方法を次セクション以下で考える。

§ 3 可換 $*$ -環 と π の表現の induced extension

$\mathcal{A}$ は $*$ -環. π と π の $*$ -表現 とする.

$$\pi(\mathcal{A})'_\omega = \{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; (B\pi(x)\xi, \eta) = (B\xi, \pi(x^*)\eta) \\ \text{for } \forall x \in \mathcal{A}, \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi) \}$$

$$\pi(\mathcal{A})'_s = \{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; B\pi(x) \subset \pi(x)B \text{ for } \forall x \in \mathcal{A} \}$$

とある. $\xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)$ $\pi(\mathcal{A})$ の weak, strong commutant と呼ぶ. 換言すれば

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_\omega \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi^*), B\pi(x) = \pi(x^*)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_s \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi), B\pi(x) = \pi(x)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

かんたんにかかるように

$\pi(\mathcal{A})'_\omega$ は $*$ -不変, 弱閉, 線型空間 (一般に環ではない.)

$\pi(\mathcal{A})'_s$ は (π : 閉な) 強閉線型空間 (一般に $*$ -不変ではない.)

3-1. $\pi(\mathcal{A})'_\omega$ を使って表現 π の拡大の方法を与える.

$I \in \mathcal{H} \subset \pi(\mathcal{A})'_\omega$ なる任意の $\mathcal{M}$ について

$$\mathcal{D}(\pi_m^\circ) = \text{linear span of } \mathcal{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi_m^\circ(x) (\sum c_k \xi_k) = \sum c_k \pi(x) \xi_k \quad (c_k \in \mathcal{H}, \xi_k \in \mathcal{D}(\pi))$$

とかくと π_m° は π の表現として $\mathcal{A}$ の拡大となる, である. ($\pi_m^\circ(x)$

$\subset \pi^*(x)$ for $\forall x \in \mathcal{A}$ に注意) $\pi_m = \widetilde{\pi_m^\circ}$ (π_m° の閉包) は π の

$\mathcal{H}$ による induced extension という.

一般に $\pi(\mathcal{A})'_s \subset \pi(\mathcal{A})'_\omega$ であるが, 上の $\mathcal{M}$ が, $\mathcal{M} \not\subset \pi(\mathcal{A})'_s$

のとき, π_m は π の真の拡大となる, である.

3-2 命題 3-1 において 表現 π_M が $*$ -preserving とするには $M^*M \subset \pi(A)'_\omega$ が必要十分。

($M \subset \pi(A)'_\omega$ ならば $M^* \subset \pi(A)'_\omega$ であるが、一般に $\pi(A)'_\omega$ は積で閉じているので、 $M^*M \subset \pi(A)'_\omega$ も一般には成立しない。)

3-3 定義 A を可換な $*$ -環とする。 A の表現 π が standard であるとは $\overline{\pi(x)} = \pi(x^*)^*$ が任意の $x \in A$ で成立するところ。これは任意の A のエルミート元 x に対して $\pi(x)$ が本質的自己共役であるところの条件と同値である。

(integrable と言ってもよい。 c.f. アセプション)

§1 で述べた例に於ける P は $P(x)$ の standard 表現になっている。 §2 での内作用素と表現の対応で言えば、 $*$ -環 A が可換のとき、standard 表現が自己共役作用素に相当するものである。

3-4 定理 (Schmüdgen) π を可換な $*$ -環 A の $*$ -表現とし、 π は A の standard 表現 P を π の拡大としてもつとする。このとき P は π の induced extension として実現できる。

(証明) P が standard より、任意の $a = a^*, b = b^* \in A$ に対して自己共役作用素 $\overline{P(a)}, \overline{P(b)}$ の spectral projection は互に

$$(P_s(q_i)f)(t) = t_i f(t)$$

とす。これは P_s は CCR-algebra $\mathcal{A}$ の $\mathcal{B}(P_s)$ を定義域とする $*$ -表現となる。すなわち $\mathcal{A}$ は Schrödinger 表現となる。

さて: α CCR-algebra と Schrödinger 表現に対して 定理 3-4 の類似が成立するかどうかをみよう。

命題 4-1. $\mathcal{A}$, P_s は上の α とする。

$$\mathcal{B}(\pi) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ; f^{(k)}(0) = 0 \quad k=1,2,3,\dots,0\}$$

$$\pi = P_s|_{\mathcal{B}(\pi)}$$

と置く。この時

$$\pi(\mathcal{A})'_\omega = \begin{cases} \mathbb{C}1 & (n \geq 2) \\ \{M_h ; h \text{ は } \{x \geq 0\}, \{x < 0\} \text{ 上 } C^\infty \text{ 実数値関数}\} & (n=1) \end{cases}$$

ここで M_h は 関数 h による かけ算作用素である。従って $\mathcal{B}(\pi)$ と $\pi(\mathcal{A})'_\omega$ は不変にする。よって P_s は π の induced extension としては実現できない。

上の命題が示すように、 $\mathcal{A}$ が 非可換のときには induced extension はそれほど強力な拡大の方法ではない。以下に α 拡大の方法を一般化することを目指す。

以下、 $\mathcal{A}$ は一般の $*$ -環、 π は $\mathcal{A}$ の $*$ -表現とする。 $\alpha \in \text{End}(\mathcal{A})$ に対して

$$(\pi(A), \alpha)'_{\omega} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); (A\pi(\alpha(x))\xi, \eta) = (A\xi, \pi(\alpha^*)\eta) \\ \text{for } x \in A, \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi) \}$$

$$(\pi(A), \text{End})'_{\omega} = \bigcup_{\alpha \in \text{End}(A)} (\pi(A), \alpha)'_{\omega}$$

$$(\pi(A), \text{Aut})'_s = \bigcup_{\alpha \in \text{Aut}(A)} (\pi(A), \alpha)'_{\omega}$$

と置く。

定理 4-2 ([IKO], [K]) $1 \in \mathcal{M} \subset (\pi(A), \text{End})'_{\omega}$ ならば $\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{D}(\pi_{\mathcal{M}}) = \text{linear span of } \mathcal{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi_{\mathcal{M}}(x)(\sum A_i \xi_i) = \sum A_i \pi(\alpha_i(x)) \xi_i$$

$$(A_i \in \mathcal{M}, A_i \in (\pi(A), \alpha_i)'_{\omega}, \xi_i \in \mathcal{D}(\pi))$$

と定義すれば $\pi_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{D}(\pi_{\mathcal{M}})$ で定義域とすると A の表現で、これは π の拡大となる、である。

$\pi_{\mathcal{M}}$ の内包をとると π によって得られる π の $\pi_{\mathcal{M}}$ と加える。

これは π の $\mathcal{M}$ による g -(-一般化) induced extension と呼ばれることができる。

定義 4-3. $\mathcal{M} \subset (\pi(A), \text{End})'_{\omega}$ に対して $*$ -consistent であるとは、

$$(A\pi(\alpha(x))\xi, B\eta) = (A\xi, B\pi(\beta(x^*))\eta)$$

$$\text{for } \forall A, B \in \mathcal{M}, \forall x \in A, \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)$$

$\alpha, \beta \in \text{End}(A)$ is $A \in (\pi(A), \alpha)'_\omega$
 $B \in (\pi(A), \beta)'_\omega$ तब $\alpha, \beta \in \text{End}(A)$

命題 4-4. $1 \in \mathcal{K}(\pi(x), \text{End})_\omega$ に対して π の $\mathcal{K}$ に π の g -induced extension $\pi_{\mathcal{K}}$ の $*$ -表現となるためには $\mathcal{K}$ の $*$ -consistent であることが必要十分。

注意 特: $\mathcal{M} \subset (\pi(\mathcal{A}), \text{Aut})'_\omega$ $\alpha \in \mathcal{M}$ $\mathcal{M}$ π -consistent である。
任意 $\alpha, A, B \in \mathcal{M}$ に対し $A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_\omega$, $B \in (\pi(\mathcal{A}), \beta)'_\omega$ ならば
1) $\alpha, \beta \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ ならば $B^*A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha \circ \beta^{-1})'_\omega$ である。
2) $\alpha \in \mathcal{M}$ ならば $B^*A \in (\pi(\mathcal{A}), \alpha)'_\omega$ である。

$\pi \subset (\pi(A), \text{id}_A)'_\omega = \pi(A)'_\omega$ $a \in \pm \in \mathbb{R}^{\times}$ g -induced extension は 確然に induced extension の一般化に $T_0 \subset T_{\perp} \subset T_{\parallel} \subset T_{\perp \parallel}$ であり、命題 4-4 は 命題 3-2 に対応してなる。

定理 4-2 に述べた g -induced extension ε §4 の最初に述べた CCR-algebra A , Schrödinger 表現 P_ε , $\pi(CP_\varepsilon)$ に適用して
 ε P_ε は π の g -induced extension で実現されることになる。
 以下で $\mathfrak{g}$ と一般的な定理を述べる。

定義 4-5 $\mathcal{A}$ は前セクト空間 K 上の CCR-algebra とする。 $\mathcal{A}$ には Schrödinger 表現の一般化がある。 Fock 表現というべき表現がある。(c.f. [BR]) $\mathcal{A}$ の表現が normal といふ、 π の表現が Fock 表現の直和に書けることを言う。

定理 4-6 [K] $\mathcal{A}$ は CCR-algebra over K , $\pi \in \mathcal{A}$ のセクト空間 $\mathcal{H}$ 上の $*$ -表現で、 $\mathcal{A}$ の normal 表現 $\rho \in \pi$ の拡大として持つことができる (同じ空間 $\mathcal{H}$ 上で)。 このとき ρ は π の g -induced extension として実現できる。

最後に定理 3-4 の一般化を述べよう。

G は Lie 群, $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環, $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡環とする。 G の unitary 表現があるならば、これに対する C^∞ -級ベクトル全体を定義域とする $\mathcal{A}$ の $*$ -表現 ρ が自然に作れる。これを $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の integrable 表現という。

定理 4-7 [K] $\pi \in \mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の $*$ -表現で同じ表現空間 $\mathcal{H}$ 上に integrable 表現 $\rho \in \pi$ の拡大として持つことができる。 この時 ρ は π の g -induced extension として実現できる。

References

- [BR] O. Bratteli and D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Mechanics II, Springer (1981)
- [IKO] A. Inoue, H. Kurose and S. Ôta, Extensions of unbounded representations, preprint (1990)
- [K] H. Kurose, A Generalization of induced extensions of unbounded representations, in preparation.
- [S] K. Schmüdgen, Unbounded Operator algebras and Representation Theory, Birkhäuser (1990)