

2次元平衡状態におけるプラズマの境界決定の逐次 近似法

千葉大・工・河原田 秀夫
(Hideo KAWARADA)
電通大・工・花 田 孝郎
(Takao HANADA)
東京大・工・今 井 仁司 (MI)
(Hitoshi IMAI)

§ 0. 序

2次元平衡状態におけるプラズマの形状決定問題が自由境界値問題になることはよく知られたことである。数値的に解くために, COLLETE GUILOPE: "Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas" に従って, 設定された領域を逐次変形(修正)していくことにより求める方法をとることにする。変形(修正)量をいかにして求めるかということが問題になる。そこで, 近似問題を考え領域変形に関して微分を行なうことにより変形(修正)量を求める。この反復法の収束性について C. GUILOPE では示されておらず, 現在研究中である。以下 C. GUILOPE の論文をまとめておく。

§ 1. 平衡状態におけるプラズマの方程式

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, Ω の境界 Γ は C^4 級であるとする

3. そして

$$0 < x_* \leq x_1 \leq x_{**}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

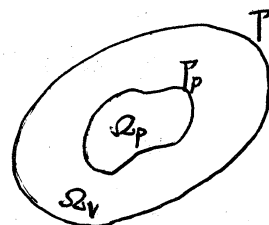
とする. そして自己共役作用素 L を次のように定義する.

$$L u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right)$$

これは $\bar{\Omega}$ で楕円型である.

真空容器の中にある平衡状態のプラズマは次の方程式系によって記述される. 求めるのは Ω_p と F である.

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & L F = -\lambda \left(\frac{1}{x_1} + \beta x_1 \right) F & \text{in } \Omega_p \\ (1.2) \quad & L F = 0 & \text{in } \Omega_v = \Omega \setminus \bar{\Omega}_p \\ (1.3) \quad & F = 0 & \text{on } \Gamma_p = \partial \Omega_p \\ (1.4) \quad & \frac{\partial}{\partial \nu} F \text{ は連続} & \text{on } \Gamma_p \\ (1.5) \quad & F = \text{const} = a \quad (\text{未知}) & \text{on } \Gamma \\ (1.6) \quad & \int_{\Gamma_p} \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial \nu} F \, dl = I \\ (1.7) \quad & F \neq 0 & \text{in } \Omega_p \end{aligned}$$



ここで $\bar{\Omega}_p \subset \Omega$ で Ω_p はプラズマが存在する領域で Ω_v は真空領域である. また I は与えられた正定数で, a は定数であるが未知である. β は与えられた正定数でポロイダル係数と呼ばれるものである. $\frac{\partial}{\partial \nu}$ は法線微分を表す. この問題を "exact な問題" と呼ぶことにする.

次から簡単のために

$$\sigma(x) = \frac{1}{x_1} + \beta x_1, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

とする. すると $\sigma_0, \sigma_1 > 0$ が存在して

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

であることは容易である.

Rem 1.1

(1.7) より F_p を F の Ω_p 上への制限とすると F_p の符号は Ω_p 上一定である. また λ は最小固有値である. ■

Lemma 1.2

$\alpha > 0$, $F > 0$ in Ω_α , $F < 0$ in Ω_p である. 従って

$$\Omega_p(F) = \{x \in \Omega \mid F(x) < 0\}$$

$$\Omega_\alpha(F) = \{x \in \Omega \mid F(x) > 0\}$$

$$\Gamma_p(F) = \{x \in \Omega \mid F(x) = 0\}$$

である. ■

Theo 1.3 (解の存在)

与えられた定数 C に対して, $C^2 = \int_{\Omega} \sigma(x) [F_-(x)]^2 dx$ を満たす $\{F\}$ の中で少なくとも (1.1) ~ (1.7) を満たすものが存在する. ここで F_- は F の負の部分を表す. また F は

$$F \in W^{3,\alpha}(\Omega) \quad \forall \alpha \geq 1, \quad F \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega}) \quad 0 \leq \gamma < 1$$

である. ■

従, Σ 後は与えられた C に対し

$$(1.8) \quad C^2 = \int_{\Sigma} \sigma [F_-]^2 dx$$

をみたす $\{F\}$ の中で "exact な問題" の解を探すことにする.

Theo 1.4 (解の一意性)

ある実数 $\tau > 0$ が存在して, $I/C < \tau$ なら "exact な問題" の解は一意である. ■

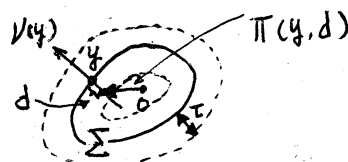
§2. 領域変形に関して

$\mathbb{R}^2$ の C^2 級の閉曲線群 J を考え, それに位相を入れることを考える. 位相を定義する前に次のことを Lemma としてあげておく.

Lemma 2.1

Σ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな C^3 級の閉曲線とする. もし $\tau > 0$ が十分小さいければ写像

$$\Pi: \Sigma \times]-\tau, \tau[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$



は C^2 -diffeomorphism になる. ところで Π は Σ 上の点 y , $d \in]-\tau, \tau[$ に対して $\Pi(y, d)$ を y における Σ の外向き法線:

$V(y)$ 上の y から距離 d のところにある点を表わすことで定義される。■

さて J_C に位相を入れるために開集合を定義する。その前に C^3 あるいは C^2 級の写像 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考え S' を $\mathbb{R}^2$ の単位円として閉曲線とは X による S' の像と考える。

Def 2.2

J_C のある元 $\bar{p} = \bar{X}(S')$ の ε -近傍は次で与えられる。

$$V(\bar{p}, \varepsilon) = \{ X(S') \mid X \text{ は } C^2 \text{ 級かつ } \|X - \bar{X}\|_{C^2(S', \mathbb{R}^2)} < \varepsilon \}$$

ここで $C^n(A, B)$ は A から B への C^n 級の写像全体から成るノルム空間とする。■

J_C に位相を入れたので同相写像が考えられる。そこで

Prop 2.3

$C^2(\bar{p}, \mathbb{R})$ の原点近傍から J_C の $\bar{p}$ の近傍 $V(\bar{p})$ への同相写像 $\exists$

$$\exists: C^2(\bar{p}, \mathbb{R}) \rightarrow J_C$$

が存在する。■

Prop 2.4

Γ_p と $\bar{\Gamma}_p$ が $\mathcal{H}$ で十分近いなら $\gamma = \Gamma^{-1}(\Gamma_p)$ と $1 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ の2つの双射 Γ と $\bar{\Gamma}$ が存在し, $\Gamma = (\bar{\Gamma})^{-1}$, $\bar{\Gamma} = (\Gamma)^{-1}$ が成立しその形は

$$(2.1) \quad \bar{\Gamma}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{\xi}(\bar{x}), \quad \Gamma(x) = x + \xi(x)$$

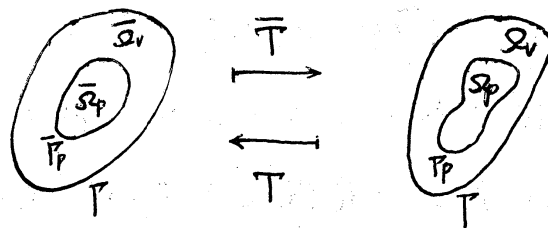
で与えられる. $\bar{x} = \Gamma(\bar{\gamma})$, $\bar{\xi}$ は

$$(2.2) \quad \bar{\xi}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} \in C_\Omega \Pi(\bar{\Gamma}_p \times]-\tau, \tau[) \\ \gamma(\bar{\gamma}) \varphi(d) \bar{\nu}(\bar{\gamma}) & \text{if } \bar{x} = \Pi(\bar{\gamma}, d) \in \Pi(\bar{\Gamma}_p \times]-\tau, \tau[) \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \varphi(d) = \begin{cases} 0 & \text{if } d \in (]-\tau, -\tau_1[) \cup (]\tau_1, \tau[) \\ e \cdot \exp\left(-\frac{1}{(1-d^2/\tau_1^2)}\right) & \text{if } d \in]-\tau_1, \tau_1[\end{cases}$$

である. $C_\Omega \Pi$ は Ω における Π の補集合を表す.

すると Γ , $\bar{\Gamma}$ による対応する点 x , $\bar{x}$ は



$$(2.4) \quad \bar{\xi}(x) = -\bar{\xi}(\bar{x})$$

が成立し Γ , $\bar{\Gamma}$ は Ω , Γ を変えないうち $(\bar{\Omega}_p, \bar{\Gamma}_p, \bar{\Omega}_v)$ と $(\Omega_p, \Gamma_p, \Omega_v)$ を対応させる. ■

§ 3. 近似問題の線形化

"exactな問題"を直接解くのは難かしいから, 自由境界上での微係数の接続条件を除いた問題を近似問題とする. 今

$\bar{\Omega}_p$ を固定し $\theta \in C_0^2(Q)$ ($\Omega \subset Q$) に対して, $\Omega_p = (\bar{I} + \theta)\bar{\Omega}_p$ 及び $\Omega_v = (\bar{I} + \theta)\bar{\Omega}_v$ と表わしおける領域で次の近似問題を考える.

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & \begin{cases} \mathcal{L} F_p(\Omega_p) = -\lambda(\Omega_p) \sigma F_p(\Omega_p) & \text{in } \Omega_p \\ F_p(\Omega_p) = 0 & \text{on } \Gamma_p \end{cases} \\ (3.2) \quad & \lambda(\Omega_p) \int_{\Omega_p} \sigma F_p(\Omega_p) dx = -I \\ (3.3) \quad & F_p(\Omega_p) \neq 0 \quad \text{on } \Omega_p \\ (3.4) \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.5) \quad & \begin{cases} \mathcal{L} F_v(\Omega_v) = J & \text{in } \Omega_v \\ F_v(\Omega_v) = 0 & \text{on } \Gamma_p \\ F_v(\Omega_v) = \text{const} & \text{on } \Gamma \end{cases} \\ (3.6) \quad & \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial \nu} F_v(\Omega_v) d\ell = I \\ (3.7) \quad & \end{aligned}$$

ここで $J \in L^2(Q)$ とする.

当然一般にはこの2つの解 $F_p(\Omega_p)$, $F_v(\Omega_v)$ の法線方向の微係数は Γ_p 上で連続しない. 連続されるように θ を定めたい. また数値計算のためには θ をあらかじめ求めなくてはならない. そこで近似問題を θ に関して微分することを考える.

$\bar{F}_p(0) = F_p(0)$, $\bar{F}_v(0) = F_v(0)$, $\bar{\lambda}(0) = \lambda$. (即ち $\bar{\Omega}_p, \bar{\Omega}_v$ で (3.1) ~ (3.8) を解いたときの解と固有値) とする. $V_0(\Omega_v) \in H^1(\Omega_v)$ に属し Γ_p 上 0 及び Γ 上定数であるような函数の集合とする. $\forall \bar{\xi} \in C_0^2(Q)$ に対して

$$Y_p(\bar{\xi}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} F_p(0) \cdot \bar{\xi}, \quad Y_v(\bar{\xi}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} F_v(0) \cdot \bar{\xi}$$

とおく $Y_p \in H^1_0(\bar{\Omega}_p) \cap H^2(\bar{\Omega}_p)$, $Y_v \in V_0(\bar{\Omega}_v)$ とある. また

$$G_p(\bar{x}) \equiv Y_p(\bar{x}) - \nabla F_{0p} \cdot \bar{x}, \quad G_v(\bar{x}) \equiv Y_v(\bar{x}) - \nabla F_{0v} \cdot \bar{x}$$

とおくと (3.1) ~ (3.8) を θ に関して微分したものは $G_p(\bar{x})$,

$G_v(\bar{x})$ に關する方程式になり

$$(3.9) \quad \begin{cases} -\Delta G_p(\bar{x}) - \lambda_0 \sigma_p G_p(\bar{x}) = \frac{\lambda_0^2}{\varepsilon} \left(\int_{\bar{\Omega}_p} \sigma_p G_p(\bar{x}) dx \right) \sigma_p F_{0p} & \text{in } \bar{\Omega}_p \end{cases}$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} \Delta G_v(\bar{x}) = 0 & \text{in } \bar{\Omega}_v \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} G_p(\bar{x}) + (\bar{x} \cdot \bar{\nu}) \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} F_{0p} = G_v(\bar{x}) + (\bar{x} \cdot \bar{\nu}) \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} F_{0v} = 0 & \text{on } \bar{\Gamma}_p \end{cases}$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} G_v(\bar{x}) = \text{const} & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \begin{cases} \int_{\bar{\Gamma}_p} \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_L} G_p(\bar{x}) d\ell = \int_{\bar{\Gamma}_p} \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_L} G_v(\bar{x}) d\ell = 0 \end{cases}$$

となる. $\forall$ λ 以上は $G_p(\bar{x}) \in H^2(\bar{\Omega}_p)$, $G_v(\bar{x}) \in H^2(\bar{\Omega}_v)$ とある. =

ここで σ_p は

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma & \text{in } \bar{\Omega}_p \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\Omega}_p \end{cases}$$

とする.

§ 4. $\bar{x}$ の決定のために

領域の変形量 $\bar{x}$ は (2.2) でみたように $\bar{\Gamma}_p$ 上で $\bar{x} \cdot \bar{\nu} = \gamma$ が与えられれば決まり, 従, 求めるのはスカラー関数 γ によいことに注意しておく. § 1 から $c^2 = \int_{\bar{\Omega}_p} \sigma_p [F_p]^2 dx$ をみたす $\{F\}$ の中で解を探すことに, F_p と F_v の法線微分関係も $\bar{x}$ の決定条件にする. 才一の条件からは

$$(4.1) \quad \int_{\bar{\Sigma}_p} \sigma_p G_p(\bar{\xi}) F_{0p} dx = 0.$$

$\sigma =$ の条件について少し詳しく述べる

$$l(\bar{\xi}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mu} F_p - \frac{\partial}{\partial \mu} F_v \right) (\bar{I} + \bar{\xi})|_{\bar{\Gamma}_p} \mapsto \text{小}$$

ということになる. $\bar{\xi}$ を γ に換え l の微分を求めると

$$\|l(\gamma) - l(0) - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mu} G_p(\gamma) - \frac{\partial}{\partial \mu} G_v(\gamma) \right) + \frac{1}{R} \gamma \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mu} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial \mu} F_{0v} \right) \right]\|_{H^{\frac{1}{2}}(\bar{\Gamma}_p)} = o(\|\gamma\|).$$

ここで R は $\bar{\Gamma}_p$ の曲率半径, $H^{\frac{1}{2}}$ は Trace space である. $l(0) = g$

とおき, 今 $\|\frac{\partial}{\partial \mu} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial \mu} F_{0v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\bar{\Gamma}_p)} = o(1)$ と仮定すると

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} G_p(\gamma) - \frac{\partial}{\partial \mu} G_v(\gamma) = -g$$

とおくことにより $\|l(\gamma)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\bar{\Gamma}_p)} = o(\|\gamma\|)$ となり, もし $\|\gamma\| \rightarrow 0$ なら $\|l(\gamma)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\bar{\Gamma}_p)} \mapsto 0$ となる. γ を決める.

以上 γ を決定するために (3.9) ~ (3.13), (4.1) (4.2) をまとめ

ると

$$(4.3) \quad \begin{cases} -\mathcal{L}G = \lambda_0 \sigma_p G + \frac{\lambda_0^2}{I} \left(\int_{\bar{\Sigma}_p} \sigma_p G dx \right) \sigma_p F_0 & \text{in } \bar{\Sigma}_p \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}G = 0 & \text{in } \bar{\Sigma}_v \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} G_p = G_v & \text{on } \bar{\Gamma}_p \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} G_p - \frac{\partial}{\partial \mu} G_v = -g & \text{on } \bar{\Gamma}_p \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} G_v = \text{const} & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \int_{\bar{\Gamma}_p} \frac{\partial}{\partial \mu} G_p dl = \int_{\bar{\Gamma}_p} \frac{\partial}{\partial \mu} G_v dl = 0$$

$$(4.9) \quad \int_{\bar{\Sigma}_p} \sigma_p F_0 G_p = 0$$

ここで, $g = \frac{\partial}{\partial \mu} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial \mu} F_{0v}$ である. 2 の G_p, G_v を使, γ

を

$$(4.10) \quad \gamma = \bar{\gamma} \cdot \bar{\nu} \equiv -G_p / \left(\frac{\partial}{\partial \mu} F_0 \right) \quad \text{on } \bar{\Gamma}_p$$

で定義することができる。

ところが G_p, G_v は $\bar{\Gamma}_p$ 上で連続でないこともあろうし (4.3) ~

(4.10) を直接数値計算しようとするとは大変である。そこで $\bar{\gamma}$ を

$$(4.11) \quad \bar{\gamma} \equiv F_0 + G \quad \text{on } \Omega$$

で定義すると $\bar{\gamma}$ は $\bar{\Gamma}_p$ 上で連続となりこの $\bar{\gamma}$ を考えることにより

数値計算は楽になる。これから λ_0 のかわりに λ と書き, $\bar{\Omega}_p,$

$\bar{\Gamma}_p, \bar{\Omega}_v$ を単純に $\Omega_p, \Gamma_p, \Omega_v$ と書くことにする。すると $\bar{\gamma}$ のみた

す式は

$$(4.12) \quad \begin{cases} \mathcal{L} \bar{\gamma} = -\lambda \sigma_p \bar{\gamma} - \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega_p} \sigma_p \bar{\gamma} dx \right) \sigma_p F_0 - \lambda \sigma_p F_0 & \text{in } \Omega_p \end{cases}$$

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mathcal{L} \bar{\gamma} = J & \text{in } \Omega_v \end{cases}$$

$$(4.14) \quad \begin{cases} \bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_v & \text{on } \Gamma_p \end{cases}$$

$$(4.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\gamma}_p = \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\gamma}_v & \text{on } \Gamma_p \end{cases}$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} \bar{\gamma} = \text{const} & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

$$(4.17) \quad \begin{cases} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial \mu} \bar{\gamma} dl = I \end{cases}$$

である。 $W \equiv \{ f \in H^1(\Omega), f = \text{const on } \Gamma \}$ とすると上を弱形

式にして

Prob 4.1

任意の $\phi \in W$ に対して次をみたす $\bar{\gamma} \in W$ を求めよ。

$$(4.18) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \bar{f} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \bar{f} \phi \, dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p \bar{f} \, dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi \, dx \right) \\ + \lambda \int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi \, dx - \int_{\Omega} J \phi \, dx + I^* \phi(p)$$

$$= = z$$

$$(4.19) \quad I^* = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \bar{f} \, d\ell = \int_{\Omega} J \, dx + I$$

2. あ 3. ■

2.2.2. もう少し Prob 4.1 について詳しく調べてみる。 $H = L^2(\Omega)$

とあく。 bilinear 形式を

$$(4.20) \quad a_0(\psi, \phi) \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \psi \cdot \nabla \phi \, dx \quad \forall (\psi, \phi) \in W \times W$$

$$(4.21) \quad b_0(\psi, \phi) \equiv \int_{\Omega} \sigma_p \psi \phi \, dx + \frac{\lambda}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p \psi \, dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi \, dx \right)$$

$$\forall (\psi, \phi) \in H \times H$$

で定義する。2.2.3. a_0 は $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ では coercive になるが $W \times W$ では coercive にならない。そこで次の bilinear 形式を定義する。

$$(4.22) \quad a(\psi, \phi) \equiv a_0(\psi, \phi) + \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \psi \phi \, dx \quad \forall (\psi, \phi) \in W \times W$$

$$(4.23) \quad b(\psi, \phi) \equiv b_0(\psi, \phi) + \int_{\Omega} \sigma_p \psi \phi \, dx \quad \forall (\psi, \phi) \in H \times H$$

すると a は $W \times W$ で coercive になる。また

$$(4.24) \quad \langle \ell, \phi \rangle \equiv \lambda \int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi \, dx - \int_{\Omega} J \phi \, dx + I^* \phi(p) \quad \forall \phi \in H_p$$

と定義する。ここで H_p は H の関数 p 上定数のものを示す。

Prob 4.1 は次と同等である。

Prob 4.2

$$(4.25) \quad a(\bar{v}, \phi) = \lambda b(\bar{v}, \phi) + \langle \ell, \phi \rangle \quad \forall \phi \in W$$

となる $\bar{v} \in W$ を求めよ. ■

これに付随して次の問題を考える.

Prob 4.3

$$(4.26) \quad a_0(F, \phi) = \lambda b_0(F, \phi) + \langle \tilde{h}, \phi \rangle \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

となる $F \in H_0^1(\Omega)$ を求めよ. $\equiv \equiv \equiv$

$$(4.27) \quad \langle \tilde{h}, \phi \rangle \equiv \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \phi dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx \right)$$

である. ■

$$(4.28) \quad a_0(v, \phi) \equiv \langle A_0 v, \phi \rangle, \quad b_0(v, \phi) \equiv \langle B_0 v, \phi \rangle$$

とみると, A_0 は $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ から H へ同型写像となる. また

$$(4.29) \quad a(v, \phi) \equiv \langle A v, \phi \rangle, \quad b(v, \phi) \equiv \langle B v, \phi \rangle$$

とみると A は W から W' へ同型写像となる. すると Prob 4.2 は次と同等である.

Prob 4.4

$$(4.30) \quad \bar{v} = \lambda K \bar{v} + h$$

となる $\bar{v} \in H$ を求めよ. $\equiv \equiv \equiv$ $K \equiv A^{-1}B$, $h \equiv A^{-1}\ell$ である.

■

また Prob 4.3 は次と同等である.

Prob 4.5

$$(4.31) \quad F = \lambda K_0 F + h_0.$$

となる $F \in H$ を求めよ. ここで $K_0 \equiv A_0^{-1} B_0$, $h_0 \equiv A_0^{-1} \tilde{h}$ である. ■

K, K_0 が H においてコンパクト作用素になることに留意して Fredholm の択一定理を使うことにする. その前に数値的経験から次のことを仮定する.

[仮定]

$1/\lambda$ は K_0 の固有値ではない. ■

Theo 4.6

$1/\lambda$ が K_0 の固有値でないなら $1/\lambda$ は K の固有値となり, 固有空間 $E(K, 1/\lambda)$ は 1次元である. しかも $\bar{F}$ を Prob 4.5 の解とすると $E(K, 1/\lambda) = R(\bar{F} + 1)$ である.

(証) 簡単に, $W = H_0(\Omega) + R \cdot 1(\Omega)$ ($1(\Omega)$ は Ω 上 1 であ

ること) に注意すると, $1/\lambda$ が k の固有値でないから Prob

4.5 が $H_0^1(\Omega)$ で一意解 $\bar{F}$ をもち (4.26) を変形すると,

$$a(\bar{F}+1, \phi) = \lambda b(\bar{F}+1, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$$

となる. また恒等式

$$a(\bar{F}+1, 1) = \lambda b(\bar{F}+1, 1)$$

より

$$a(\bar{F}+1, \phi) = \lambda b(\bar{F}+1, \phi) \quad \forall \phi \in W$$

が得られる. ■

Theo 4.7

$1/\lambda$ が k の固有値で重複度が 1 なら k は $E(k^*, 1/\lambda)$ に直交し $\bar{F}_0$ を Prob 4.1 の 1 つの解とすると Prob 4.1 の解は

$$(4.32) \quad \bar{F}_s = \bar{F}_0 + s\bar{F} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

となる. ここで k^* は k の随伴作用素で $F \in E(k, 1/\lambda)$ である. ■

以上で Prob 4.1 の解の形がわかった. $\bar{F} = \bar{F} + 1$ であり, $\bar{F}$ は Prob 4.3 の解であるから求めるが問題は $\bar{F}_0$ を具体的に 1 つ見つけることである. そこで Prob 4.1 の解で $\bar{F} + 1$ であるものを求める.

$$(4.33) \quad \bar{F} = \bar{F} + \bar{F} + 1, \quad \bar{F} \in H_0^1(\Omega)$$

とおいて (4.18) 式に代入し, $\phi \in W$ を新たに $\phi + R \cdot 1(\Omega)$ ($\phi \in H_0^1(\Omega)$) とおいて (4.18) 式に代入し, $\int_{\Omega} \sigma_p F_0 dx = -\frac{I}{\lambda}$ に注意して変形すると $\bar{H}$ の方程式は

Prob 4.8

$\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$(4.34) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \bar{H} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} \phi dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx \right) \\ + \lambda \int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx - \int_{\Omega} J \phi dx$$

を満たす $\bar{H} \in H_0^1(\Omega)$ を求めよ. ■

となる. これは $1/\lambda$ が k_0 の固有値でなければ一意解をもつ.
以上のことをまとめると

Theo 4.9

$1/\lambda$ が k_0 の固有値でなければ Prob 4.1 の解は

$$(4.35) \quad \bar{F}_\gamma = \bar{H} + \gamma (\bar{H} + 1) \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

と表わされる. ここで $\bar{H}$ は $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ に対し次を満たす.

$$(4.36) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \bar{H} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} \phi dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx \right) \\ + \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \phi dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx \right)$$

$$(4.37) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \bar{H} \cdot \nabla \phi dx = \lambda \int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} \phi dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_{\Omega} \sigma_p \bar{H} dx \right) \left(\int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi dx \right)$$

$$+ \lambda \int_{\Omega} \sigma_p F_0 \phi \, dx - \int_{\Omega} J \phi \, dx \quad \blacksquare$$

と 3 で $\bar{F}$ の定義より $\bar{F} = F_0 + G$ であるから

$$(4.38) \quad G_\gamma = \bar{F} - F_0 + \gamma (\bar{F} + 1)$$

である. この γ を定めることを考える.

$$(4.39) \quad C_0^2 = \int_{\Omega_p} \sigma_p F_0^2 \, dx$$

とおく. 本来なら $\int_{\Omega_p} \sigma_p F_0 G_\gamma \, dx = 0$ であるが

$$(4.40) \quad \int_{\Omega} \sigma_p F_0 G_\gamma \, dx = \frac{C^2 - C_0^2}{2}$$

と近似する. すると

$$(4.41) \quad \int_{\Omega} \sigma_p F_0 \bar{F}_\gamma \, dx = \frac{C^2 + C_0^2}{2}$$

である. ゆえに

$$(4.42) \quad \gamma = \left[\frac{C^2 + C_0^2}{2} - \int_{\Omega_p} \sigma_p F_0 \bar{F} \, dx \right] / \left[\int_{\Omega_p} \sigma_p (\bar{F} + 1) F_0 \, dx \right]$$

となる. これから γ が

$$(4.43) \quad \gamma \equiv - \left(\bar{F}_\gamma / \frac{\partial}{\partial \nu} F_{0p} \right) \quad \text{on } \Gamma_p$$

で定義できることになる. この γ によ, Ω_p を逐次変形させ

てゆく. 最後はこの逐次近似の妥当性に関する定理を述べて

おく.

Theo 4.10

上の γ による Ω_p の変形に關して Ω_p^n と Ω_p^{n+1} が理論的に一致

したとき, 近似問題の解 $(\Omega_p^n, F_0^n, \lambda^n)$ は "exact な問題"

の解は、213. ■

参考文献

COLLETE GUILLOPE, Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Paris XI,
1977, " Sur un problème à frontière libre
intervenant en physique des plasmas "