

Subfactor の分類理論と quantum $6j$ -symbol

浅枝雅子 (ASAEDA, Masako) (東大数理)

0 →

1 Introduction

この原稿では、次の和久井さんの原稿以降を読むのに、知っていたほうが良いと思われる作用素環論の知識を若干準備する。

2 Subfactor の分類

作用素環論とは、無限次元の環を研究する分野であるが、2つの、factor (因子環) と呼ばれるある種の既約性をもつ環の包含関係 $N \subset M$ の分類理論は、subfactor (部分因子環) 理論とよばれ、1980 年代に V.F.R. Jones ([J]) によって創始されて以来、数学や数理解析におけるさまざまな分野との関わりをもって発展してきた。[J] において Jones は、Jones index と呼ばれる不変量を II_1 型の subfactor に対して定義し、後に principal graph, dual principal graph というグラフの組を、さらにこまかい不変量として構成した。これらのグラフは、subfactor の Jones index の $1/2$ 乗を Perron-Frobenius 固有値としてもつ ([EK], 9 章)。このことから、とくに index が 4 未満 (または 4) の subfactor の (dual) principal graph として実現する可能性があるグラフは A , D , E 型の Dynkin diagram (またはその拡張) だけであることが、組合わせ論的に示される。そこで問題になるのは、これらのうち、どのグラフが本当に実現されるのか、ということである。これは、paragroup とよばれる、Jones index や (dual) principal graph をふくんだ強力な不変量が Ocneanu によって定義されてから、それを用いて Ocneanu, Popa, Izumi, Kawahigashi らによって解決され、実現されるグラフは A_n , D_{2n} , E_6 , E_8 (index 4 の subfactor に対しては、いくつかの拡張 Dynkin diagram) だけであることがわかった。(principal graph と dual principal graph は、一般的には異なるが、Dynkin の場合は同じになる。) paragroup は、とくに hyperfinite II_1 型の subfactor に対しては完全不変量となり、paragroup から subfactor を復元することができる。Index が 4 未満の hyperfinite II_1 subfactor では、上のグラフを (dual) principal graph にもつような subfactor は、それぞれについて 1 つ、または 2 つあってもほとんど性質を区別しなくていいようなものしかないので、通常グラフの名前だけで、たとえば E_6 型 subfactor, などと呼ばれている。

さて、この (dual) principal graph は、Jones の構成では、与えられた subfactor からつくられる、higher relative commutant とよばれる有限次元環の包含関係によ

る上昇列を特徴づけるものとして導入された. Ocneanu は, これが実は, subfactor $N \subset M$ に対し, M 自身を左 N 右 M 両側加群 ${}_NM_M$ と思って ${}_MM_N, {}_NM_M = {}_MM_N$ を交互に相対テンソル積をとったときの既約分解をあらわすグラフと同一のものであることを示した. (すでに色々な用語を説明なしにつかっているが, ここは表現のテンソル積の分解則と類似のものと考えてください.) くわしく言うと, ここでいうグラフは, bipartite graph, つまり, 頂点集合は偶数番号と奇数番号にわかれていて, 辺の両端は必ずどちらかが偶数番頂点, のこりが奇数番頂点, となっている. 偶数番頂点は, principal graph においては

$${}_NN_N, {}_NM \otimes_M {}_MM_N, {}_NM \otimes_M M \otimes_N M \otimes_M {}_MM_N, \dots$$

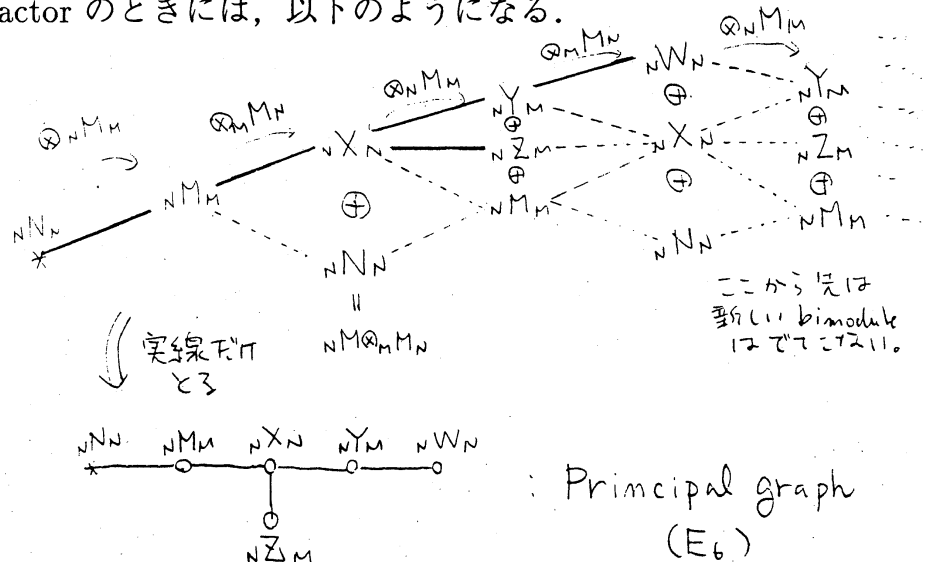
の直既約因子によってラベルづけされ, 奇数番は,

$${}_NM_M, {}_N \otimes_M M \otimes_N {}_MM_M, {}_NM \otimes_M M \otimes_N {}_MM_M, \dots$$

の直既約因子によってラベルづけされる. 辺は, X を偶数番頂点の bimodule, Y を奇数番頂点の bimodule とすると, 辺 $X \rightarrow Y$ の本数は,

$$\#(X \rightarrow Y) = \dim \text{Hom}(X \otimes_N {}_MM_M, Y)$$

で定まる. ベクトル空間 $\text{Hom}(X \otimes_N {}_MM_M, Y)$ は, $X \otimes_N {}_MM_M$ と Y の intertwiner の空間といわれる. 偶奇が逆の場合, X に右からかける bimodule は, ${}_MM_N$ にする. 例えば, E_6 型 subfactor のときには, 以下ようになる.



一度でてきた辺や bimodule が次の段階で再び出現するのは, Frobenius 相互律

$$\text{Hom}(X \otimes_N {}_MM_M, Y) \cong \text{Hom}(Y \otimes_M {}_MM_N, X)$$

に因る. Dual principal graph は, ${}_MM_M$ を出発点にし, principal graph と同様に ${}_MM_N, {}_NM_M$ を交互に相対テンソル積していつてできるグラフである. このようなプロセスでできるグラフは一般には有限グラフとはかぎらないのだが, 有限になるような subfactor は, finite depth と呼ばれる. (index が 4 未満ならいつも finite depth になることが, グラフの Perron-Frobenius 固有値だけからわかる.)

3 Quantum 6j-symbol

さて、このようなグラフの構成の言い換えは、このあとなにもしなければ別にありがたくないのだが、実はこれらの bimodule たちは graded fusion algebra を構成し、その上に、表現環による fusion rule algebra と同様に quantum 6j-symbol を定義することができる。そして実はそれが、hyperfinite II_1 subfactor の完全不変量をあたえるのである。(本当は 6j-symbol のうち、辺として (dual) principal graph の辺をつかっているものだけで、subfactor の不変量になっていて、それが paragroup とよばれるものである。) Bimodule たちからつくられる 6j-symbol は、以下のように定義される。まず、subfactor から生じる bimodule たち (つまり、(dual) principal graph の頂点に対応する bimodule たち) A, B, C, D, X, Y をとる。ただし左右の係数 N, M は、これから考える相対テンソル積が問題なく行えるようにしているものとする。たとえば $Y \otimes_? A$ は考えたいテンソル積のひとつだが、この場合は Y の右係数と A の左係数は一致するようにはじめから取ってあると考え、 $?$ にはその共通の係数環が入る。さらに今後はテンソル積の記号は省略して、 AY などと書いてしまうことにする。次に Hilbert 空間

$$\mathcal{H}_{EF}^G := \text{Hom}(EF, G), \quad E, F, G \text{ たちは bimodule}$$

を考え、その正規直交系 S_{EF}^G をひとつ固定する。ここで、以下のように四面体の辺、面にラベルをつけ、複素数を対応させる：

$$\sigma_1 \in S_{AX}^B, \quad \sigma_2 \in S_{YB}^D, \quad \sigma_3 \in S_{YA}^C, \quad \sigma_4 \in S_{CX}^D$$

として、

$$\frac{1}{\sqrt{[B][C]}} \sigma_4 (\sigma_3 \otimes \text{id}_X) (\text{id}_Y \otimes \sigma_1)^* \sigma_2^* \in \mathbb{C} \cong \text{End}(D)$$

$\times [B], [C]$ は正の数 (説明はしない) $\uparrow$ D の既約性

幻想の世界

$$\begin{array}{ccc} YAX & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes \sigma_1} & YB \\ \sigma_3 \otimes \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \sigma_2 \\ CX & \xrightarrow{\sigma_4} & D \end{array} \quad \text{G の向きに合成}$$

すると、これは 6j-symbol の公理をみたすことが証明できる。これは正規直交系の取り方 (gauge choice) に依存するが、6j-symbol としては、gauge による同値類で考える。

このように subfactor からつくられた $6j$ -symbol で、使い勝手がわるいような気がするところは、fusion rule algebra が graded であること、つまり、係数がそろわないもの同士はテンソル積がとれないということである。そこで、

$$\mathcal{X} := \{ {}_N X_N \mid N\text{-}N\text{bimodules} \}$$

だけをつかって、上のように四面体に複素数を対応させると、当然といえば当然だが、これも $6j$ -symbol の公理をみたすことがわかる。 $\mathcal{X}$ の任意の元 2 つは相対テンソル積することができるので、表現環における $6j$ -symbol と同じように扱うことができる（でも表現環とちがって、テンソル積が一般に可換でないところに注意）。そういうわけで、この講究録では、subfactor からこうして定義された $6j$ -symbol を使って、3次元多様体の位相不変量を計算したりする。

4 どうやって計算するのか

前の section で $6j$ -symbol の値の定義を与えたが、実は通常、この定義どおりには計算されない。Bimodule やその準同型など、抽象的にはあたえられていても、その合成は単にならべてかくだけで、計算できたりはしないのである。そこで、普通は、与えられた fusion rule の上に存在しうような $6j$ -symbol の公理の一部をみたすようなものをもとめてから、何らかの方法でそのうち残りの公理をみたすものを捜しだし、という方法をとる。この方法は相当めんどくさいもので、それでもあるグラフを不変量にもつ II_1 subfactor の存在がわかっていて、さらに始めの公理の一部をみたすものをもとめた時点で 1 つしか生き残っていなければ、それは自動的に残りの公理もみたすのだが、いくつかあったときに、そのうち残りの公理もみたすものを求めるのは一般に困難である。さらに fusion rule algebra の生成元 (bimodule) がちょっとしかなければまだいいのだが、たくさんあったりすると始めの段階だけでとても大変である。

ここで、いま構成した $6j$ -symbol が、抽象的には単なる Tensor category の一種であることに注目しよう。実はこの Tensor category は、super selection sector と呼ばれる、真空中の局所的な粒子の励起（遠くにいる人は気づかないような励起、というようなことらしい）を記述する、ある種の無限次元環上の endomorphism から、上での bimodule と類似の方法で生成されることがわかっている。この場合、無限次元環は、III 型という、 II_1 よりも条件の悪いものでないといけなくはないのだが、ある III 型 factor M に対しその上の endomorphism ρ を考えると、実はこの ρ は、III 型 subfactor $\rho(M) \subset M$ に対応していると考えられる。 II_1 subfactor に対する Jones index を III 型に拡張し、さらに、 ρ が II_1 のときの生成元である bimodule ${}_N M_M$ と対応をすることが言える。さらに M 上の endomorphism の既約性、既約分解、conjugate が適切に定義できて、 $\rho \circ \bar{\rho} \circ \rho \circ \dots$ という合成列の endomorphism としての既約分解が、 II_1 のときの bimodule の既約分解に相当するものになる。intertwiner に相当するものは、 M の元としてとってこれることができる。Sector η, ξ, ϕ, ϕ' と、intertwiner の空

間 (η, ξ) の元 S に対し, $\text{id}_\phi \otimes S \in (\phi\eta, \phi\xi)$ は, $\text{id}_\phi \otimes S = \phi(S)$, $S \otimes \text{id}_{\phi'} \in (\eta\phi', \xi\phi')$ は, $S \otimes \text{id}_{\phi'} = S$ とおくと, ちゃんと tensor category ができることが示され, II_1 subfactor のときと同様, intertwiner の合成によって, $6j$ -symbol が構成される. ([I])

このようにセクターを使った言い換えは, このままではやはりあまりメリットはない. しかし, Izumi は, ある種の セクターから生成される Tensor category の intertwiner は, Cuntz 環という C^* 環を構成し, セクターはその上の automorphism として作用することに気づき, 逆に Cuntz 環上の automorphism を記述するという方向で, 対応する sector (subfactor) の存在証明とその性質をしらべたり, $6j$ -symbol を計算する方法を発見した. ([I]) すべての sector (subfactor) がこの方法で実現されるわけではないのだが, 重要な例として, E_6 型 subfactor がある, また特に, 彼はこの方法によって [AH] における $\text{index } (5 + \sqrt{13})/2 (> 4)$ をもつ subfactor の存在証明の別証を与えた ([I2]). この講究録では, 次の記事以降, 彼の方法によってもとめた E_6 subfactor から生じる $6j$ -symbol を用いて色々な計算, 研究を行う.

参考文献

- [AH] M. Asaeda, U. Haagerup Exotic subfactors of finite depth with Jones indices $(5 + \sqrt{13})/2$ and $(5 + \sqrt{17})/2$, (1998), preprint
- [EK] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, Quantum symmetries on operator algebras, Oxford University Press., 1998
- [H] U. Haagerup, Principal graphs of subfactors in the index range $4 < [M : N] < 3 + \sqrt{2}$. Subfactors, World Scientific, (1994), 1–38.
- [I] M. Izumi Subalgebras of infinite C^* -algebras with finite Watatani indices, I. Cuntz algebras, Commun. in Math. Phys., **155**, (1993), 157–182.
- [I2] M. Izumi, in preparation.
- [J] V. F. R. Jones, Index for Subfactors, *Invent. Math.* **72**, (1983), 1–15.
- [O1] A. Ocneanu, Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras, In “Operator algebras and applications, Vol. 2”. London Math. Soc. Lecture Notes Series **136**, (1989), 119–172.