

# 液膜の非線形波動現象

阪大 基礎工

吉永隆夫 (Yoshinaga Takao)

## 1 はじめに

液膜とは薄い液体の膜をさすが、ここでは分子間力 (ファン-デア-ワールス力) の影響が現れないほど厚い、すなわち少なくとも厚みが数百ナノメートルはあり、かつ流体運動がナヴィア-ストークス方程式で記述できるような場合について考える。このような液膜の例は、シャボン玉にはじまり、傾いた壁面上の流れ、フライパンに引いた油、関節液や涙など我々のまわりでしばしば見られるだけでなく、潤滑油、コーティング、凝縮器、遮蔽膜などその応用は工業的にも重要である。

液膜は多くの場合界面が自由表面で、僅かな変形でも液膜の厚みに比べれば大変形となるので強い非線形性が現れるなどの特徴がある。そのような現象を数値的に調べることは有効で、これまで離散渦法 [1] や MAC 法 [2] などのラグランジュ的な方法や Level Set 法 [3] などのオイラー的な方法が用いられてきた。しかし、数値解析特有の数値粘性などによる解の精度の低下の問題や長時間にわたる計算時間の問題と共に、解が個々のパラメータに対して個別的にしか得られないため、現象に対する見通しが悪くなるなどの欠点がある。一方、解析的には膜の厚みが薄いことを考慮した‘薄膜近似’をナヴィア-ストークス方程式に用いて、現象をうまく記述するような非線形方程式の摂動的な導出もおこなわれてきた [4]。この場合、解は比較的容易に求めることができ、また現象に対する見通しもよい反面シート形状が多価になるような複雑な現象は調べることはできず、また各変数のスケールリングの設定を個々の問題に適するようにおこなう必要がある。特に、固体壁がある場合と無い場合で液膜の振る舞いは大きく異なる。前者では粘性が重要な役割を果たし、後者では慣性が重要な役割を果たす。そのため、摂動におけるスケールリングもこの両者間で異なってくる。

本稿では、自由界面を持つ液膜の現象に注目し、その振る舞いを調べるための解析的な手法について紹介すが、まず薄膜近似の方法について述べる。

## 2 薄膜近似 (潤滑理論)

薄膜近似の方法は、その最低次の近似で固体壁間の薄い液膜の解析における‘潤滑理論’として古くから知られている [5]。今、液膜の厚みの程度を  $h_0$ 、現象の代表長さを  $\ell$ 、代表速度を  $u_0$  とする。 $\ell, u_0 \sim 1$  の程度の大きさに取り、液膜の薄さを  $h_0/\ell \sim \epsilon (\ll 1)$  程度であると考え、 $(x, z)$  座標系での速度成分を  $(u, w)$  とし、 $u \sim u_0 \sim 1, x \sim \ell \sim 1, t \sim \ell/u_0 \sim 1, z \sim h_0/\ell \sim \epsilon$  の程度と考えることができる。このとき、 $\partial/\partial t, \partial/\partial x \sim 1, \partial/\partial z \sim \epsilon^{-1}$  となるので、連続の式より  $w \sim \epsilon u \sim \epsilon$  と評価できる。さらに、運動方程式 (ナヴィア-ストークス) の  $x$  成分では、圧力項と粘性項の釣り合いより  $\partial^2 u/\partial z^2 \sim \partial p/\partial x$  とおけるので、 $p \sim \epsilon^{-2}$  程度と見積もることがでる。一方、 $z$  成分では、主要項は  $\partial p/\partial z \sim 0$  となる。

この結果、最低次の薄膜近似により得られる方程式 (潤滑モデル) は

$$\partial p/\partial z = 0, \quad -\partial p/\partial x + \mu \partial^2 u/\partial z^2 = 0, \quad \partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0, \quad (1)$$

となり、その解は以下のように与えられる:

$$p = p(x), \quad u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2, \quad \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + [w]_0^h = 0. \quad (2)$$

上式で  $u, w$  の境界条件により定数  $C_1, C_2$  および流れ場が求められる。

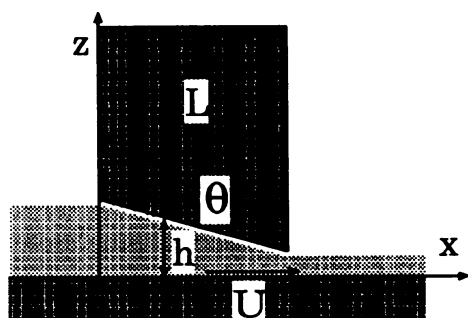


図 1. 流体ベアリング

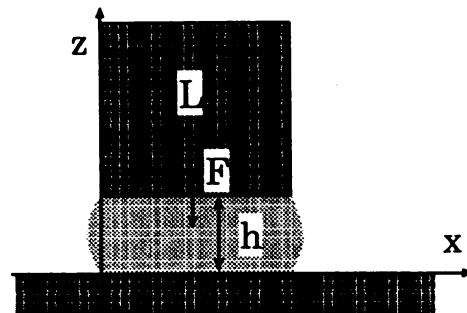


図 2. スクイズ流れ

例として、図 1 に示すように速度  $U$  で移動する平面壁に緩やかな傾斜を持った長さ  $L$  の固定片が向かい合い、その楔形のすきま (最大値  $h_0$ ) に引き込まれる流体が発生する圧力で固定片が支えられている ‘流体ベアリング’ の問題を考える。このとき、楔形斜面  $z = h(x)$  での法線ベクトルおよび接線ベクトルは  $\mathbf{n} = (h_x, -1)/(1 + h_x^2)^{3/2}$ ,  $\mathbf{s} = (1, h_x)/(1 + h_x^2)^{3/2}$  で与えられ、傾きが緩やかであることから最低次の近似で境界条件は  $z = h(x)$  で  $u = w = 0$ ,  $z = 0$  で  $u = U, w = 0$  となる。この条件より (2) 式での  $C_1, C_2$  が決定され、さらに圧力  $p$  に関する線形方程式

$$H_\xi = \frac{1}{6} (H^3 P_\xi)_\xi, \quad (3)$$

が得られる。ただし、無次元変数  $\xi = x/L$ ,  $H = \epsilon^{-1} h/L$ ,  $P = \epsilon^{-2} p(L/\mu U)$  が導入されている。(3) 式はレイノルズ方程式と呼ばれ、与えられた壁面の形状  $H$  に対して発生する圧力  $P$  の分布を決定でき、軸受け (ジャーナル軸受け) のモデルとして知られている。

一方、図 2 に示すように、 $z = 0$  で  $u = w = 0$ ,  $z = h$  で  $u = 0, w = \partial h / \partial t$  のような境界条件を考える。このとき (3) 式の代わりに

$$H_\tau = \frac{1}{12} (H^3 P_\xi)_\xi, \quad (4)$$

が得られる。ただし、 $\tau = tU/L$ ,  $w \sim U$  とする。この方程式はスクイズ方程式として知られているが、特に、 $H = H(\tau)$  の場合、 $\xi = 0, 1$  で  $P = 0$  とし、外力  $F (= \int_0^1 P d\xi)$  を一定、 $\tau = 0$  で  $H = H_0$  などの条件を用いると  $H^{-2} - H_0^{-2} = 2\tau F$  の解が得られる。この解は液膜の厚みが 0 になるのに無限の時間を要することを意味している。これは、固体壁面に荒らさがなければ粘性のため液体は壁面に粘着し続けるという性質からきており、関節にかかる大きな加重が関節液により支えられているのはその例である。

### 3 固体壁のある場合の液膜

一方が固体壁で他方が自由界面の液膜を、水平平面壁の上での液膜と斜面を流れ落ちる液膜の二つの場合に分けて考える。後者の場合は前者ほど粘性の影響が小さく、それらを考慮したスケールリングを行う必要がある。

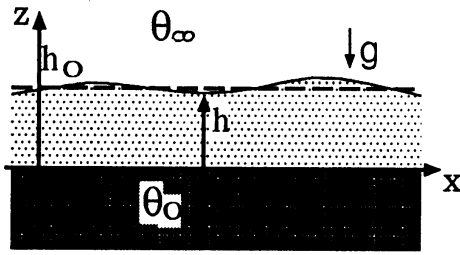


図 3. 水平平面壁上の液膜

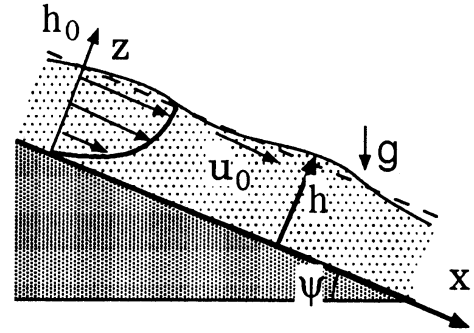


図 4. 斜面流

### 3.1 水平平面壁上の液膜

図 3 は自由界面を持つ水平平面壁上の液膜を示しており [4], 液体は非圧縮, その密度および粘性率を  $\rho, \mu$ , 重力加速度を  $g$ , 重力のポテンシャルを  $\phi$  とする. さらに, 固体壁及び界面上方の温度  $\theta$  がそれぞれ  $\theta_0, \theta_\infty$  で与えられ, 界面での熱伝達を考え, その係数を  $\alpha_{th}$  とする. また, 表面張力  $\sigma$  の温度依存性を考慮し, 温度の減少関数  $d\sigma/d\theta = -\gamma (\gamma > 0)$  と仮定し, 液体の熱伝導率を  $k_{th}$ , 比熱を  $c$  とする. このとき, 基礎方程式は連続の式, 運動方程式 (ナヴィアストークス), エネルギー式 (熱伝導方程式) から

$$u_x + w_z = 0, \quad (5)$$

$$\rho(u_t + uu_x + ww_z) = -p_x + \mu(u_{xx} + u_{zz}) - \phi_x, \quad (6)$$

$$\rho(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \mu(w_{xx} + w_{zz}) - \phi_z, \quad (7)$$

$$\rho c(\theta_t + u\theta_x + w\theta_z) = k_{th}(\theta_{xx} + \theta_{zz}). \quad (8)$$

境界条件は  $z = h$  での運動学的, 接線, 法線方向の応力連続, 熱流束の釣り合いの条件 (ニュートンの冷却則) より

$$h_t + uh_x - w = 0, \quad (9)$$

$$\mu(1 - h_x^2)(u_z + w_x) + 2\mu(w_z - u_x)h_x = \sigma_x(1 + h_x^2)^{-1/2}, \quad (10)$$

$$-p + 2\mu[(1 - h_x^2)w_z - (u_z + w_x)h_x](1 + h_x^2)^{-1} = \sigma h_{xx}(1 + h_x^2)^{-3/2}, \quad (11)$$

$$k_{th}(\theta_z - h_x\theta_x)(1 + h_x^2)^{-1/2} + \alpha_{th}(\theta - \theta_\infty) = 0, \quad (12)$$

壁面  $z = 0$  では固着条件と温度一定の条件より

$$u = w = 0, \quad (13)$$

$$\theta = \theta_0, \quad (14)$$

が得られる. 以下では, 自由表面での攪乱の波長  $\lambda$  を代表長さ, 代表速度を  $u_0$  とし,  $h_0/\lambda = \epsilon \ll 1$  で,  $p_x \sim \mu u_{zz}$  を仮定する. このとき,  $t \sim \lambda/u_0 \sim \epsilon^{-1}$ ,  $x \sim \lambda \sim \epsilon^{-1}$ ,  $z \sim h_0 \sim 1$ ,  $u \sim 1$ ,  $w \sim \epsilon$  の程度になり,  $p \sim \mu/\epsilon \sim \epsilon^{-1}$  を仮定するので, 以下のようなスケーリングを考慮した変数変換を導入する:

$$\xi = \epsilon x/h_0, \quad \zeta = z/h_0, \quad \tau = \epsilon t(u_0/h_0), \quad (15)$$

$$H(\xi, \tau) = h/h_0, \quad U(\xi, \zeta, \tau) = u/u_0, \quad W(\xi, \zeta, \tau) = \epsilon^{-1}w/u_0, \quad P(\xi, \zeta, \tau) = \epsilon p h_0/\mu u_0,$$

$$\Phi(\xi, \zeta, \tau) = \epsilon \phi h_0/\mu u_0, \quad \Theta(\xi, \zeta, \tau) = (\theta - \theta_\infty)/(\theta_0 - \theta_\infty), \quad \Sigma = (\Sigma_0 - M\Theta) = \epsilon \sigma/\mu U_0. \quad (16)$$

さらに従属変数を  $\epsilon$  で以下のように展開する:

$$(U, W, P, \Theta) = (U_0, W_0, P_0, \Theta_0) + \epsilon(U_1, W_1, P_1, \Theta_1) + \epsilon^2(U_2, W_2, P_2, \Theta_2) + \dots \quad (17)$$

上式を基礎方程式及び境界条件に用いて、最低次の近似から

$$\Theta = 1 - \frac{\text{Bi}\zeta}{1 + \text{Bi}H}, \quad U = \left(\Phi - \frac{H_{\xi\xi}}{C}\right)_{\xi} \frac{\zeta^2}{2} - \left(\Phi - \frac{H_{\xi\xi}}{C}\right)_{\xi} H\zeta + \Sigma_{\xi}\zeta$$

などと共に  $H$  の非線形発展方程式

$$H_{\tau} + \left[ \frac{\epsilon^3 H^3 \text{We}}{3} H_{\xi\xi\xi} - \frac{GH^3}{3} H_{\xi} + \frac{\text{Bi}M}{2(1 + \text{Bi}H)^2} H^2 H_{\xi} \right]_{\xi} = 0,$$

を得る。ここで、無次元パラメータとしてウェバー数  $\text{We} = \sigma_0 / \mu u_0 (\sim \epsilon^{-3})$ 、重力定数  $\text{Bi} = \alpha_{th} h_0 / k_{th}$ 、マランゴニー数  $M = \Delta\sigma / \mu u_0$  が導入され、 $\Phi|_{\zeta=H} = GH$  および  $\Delta$  である。(19) 式の [ ] 内第 1 項は表面張力による項、第 2 項は重力による項、第 3 項は表面での温度分布により引き起こされる表面張力の変化による項 (マランゴニー効果)。

このような液膜の安定性をみるため、実波数  $k$ 、複素角周波数  $\omega$  をもつ微小攪乱  $H -$  を (19) 式に用いて線形分散関係式

$$\omega + \left[ \frac{k^4 \epsilon^3 \text{We}}{3} + \frac{G}{3} k^2 - \frac{\text{Bi}M}{2(1 + \text{Bi})} k^2 \right] = 0,$$

を得る。ボンド数  $\text{Bo} = G / \text{We} = \rho g h_0^2 / \sigma_0$  とおくと、

$$0 < k < k_c = \sqrt{-\frac{\text{Bo}}{\epsilon^3} + \frac{3\text{Bi}}{2\epsilon^3(1 + \text{Bi})} \frac{M}{\text{We}}},$$

となるような波数  $k$  の範囲に対して  $\omega > 0$  となり攪乱は不安定となる。

(21) 式で  $M=0$  (温度差がなく) かつ  $\text{Bo} \geq 0$  の場合は攪乱は常に安定であることが、 $\epsilon \rightarrow 0$  になると、(19) 式は表面張力が支配的な流れを表し、眼球表面での涙の膜などはこのできる例である。一方、 $\text{We}=0$ ,  $M=0$  の場合、重力により駆動される流れを示し、溶岩水の薄い層 (塩水楔) などがこの方程式で記述できることが知られている。特に、コンパクトサポート ( $\xi$  の有限領域でのみ  $H$  は値を持ちその他では 0) な相似解を持つ [6]。これは非線形効果によるものであり、この方程式を  $H=1$  回りで線形化して式では、 $\tau=0$  で  $\xi$  の有限領域にある解も  $\tau>0$  では無限領域にまで広がってしまう。

さらに、 $M=0$  (温度差がなく) でも、 $\text{Bo} < 0$  すなわち  $G < 0$  の場合、液膜は長波長攪乱となる。この不安定はレイリー-テイラー不安定として知られ、液膜の場合上面が固体壁の場合に相当する。このような不安定では、最初 (19) 式でかけるような 2 次元攪乱が成長すると 3 次元性が重要になり、液膜の場合六角形パターンなどの構造が現れ崩れている [7]。

一方、 $M \neq 0$  で、液膜の上下界面で  $\Delta\sigma > 0$  となるような温度差がある場合でも液して不安定になる。液膜自由表面での熱伝達を考えているので、界面での等温を仮定凹凸に応じて温度分布が現れる。通常の液体では、温度が高いほど表面張力は小さく面よりも温度が高いとき山よりも谷の部分の温度が高くなり、表面張力は山の部分のため流体は谷から山に引っ張られ、凹凸はますます大きくなり不安定化される [8]。線形性の影響のため山が比較的なだらかで谷が急峻になることが示されている。表により引き起こされるこの現象はマランゴニー現象と呼ばれている。薄く油を引るとき直接炎の当たっている部分の界面がへこんで谷になり、温度の低い部分は盛象の例である。

### 3.2 斜面流

図4に示すように水平面と角度  $\psi$  をなす斜面を流れる液膜を考える [9]. このとき, (6), (7) 式で  $\phi_x = -\rho g \sin \psi$ ,  $\phi_z = \rho g \cos \psi$  とおくことができる.  $h_0/\lambda = \epsilon (\ll 1)$  とし, 前節同様  $p_x \sim \mu u_{zz}$  を仮定するが, 流れを考えるので粘性の影響が前節の場合よりも弱いとして  $p \sim \mu/\epsilon \sim 1$  を仮定する. 一様流の膜厚  $h_0$  を代表長さ, そのときの表面での流速  $u_0 = h_0 \rho g \sin \psi / 2\mu$  を代表速度として変数のスケーリング:

$$\xi = \epsilon x / h_0, \quad \zeta = z / h_0, \quad \tau = \epsilon t (u_0 / h_0), \quad (22)$$

$$H(\xi, \tau) = h / h_0, \quad U(\xi, \zeta, \tau) = u / u_0, \quad W(\xi, \zeta, \tau) = \epsilon^{-1} w / u_0, \quad P(\xi, \zeta, \tau) = p / \rho u_0^2, \quad (23)$$

を導入し, さらに従属変数を

$$(U, W, P) = (U_0, W_0, P_0) + \epsilon(U_1, W_1, P_1) + \epsilon^2(U_2, W_2, P_2) \cdots \quad (24)$$

のように展開して, 基礎方程式および境界条件に用いて  $\epsilon$  の冪で整理する. その結果,  $O(1)$  および  $O(\epsilon)$  で

$$U_0 = 2\zeta(H - \frac{1}{2}\zeta), \quad P_0 = (H - \zeta)\text{Fr} \cos \psi - \epsilon^2 \frac{\text{We}}{\text{Re}} H_{\xi\xi}, \quad V_0 = -H_{\xi}\zeta^2, \quad (25)$$

さらに,  $O(\epsilon^2)$  で以下の非線形振幅方程式

$$H_{\tau} + 2H^2 H_{\xi} + \epsilon \left[ \frac{8}{15} \text{Re} H^6 H_{\xi} - \frac{2}{3} \cot \theta H^3 H_{\xi} + \frac{1}{3} \epsilon^2 \text{We} H^3 H_{\xi\xi\xi} \right]_{\xi} = 0, \quad (26)$$

を得る. ただし, レイノルズ数  $\text{Re} = h_0 u_0 \rho / \mu$ , ウエバー数  $\text{We} = \sigma / \mu u_0$ , フルード数  $\text{Fr} = h_0 g / u_0^2$  が導入され,  $\text{ReFr} = 2 / \sin \psi$  の関係が成り立つ. この方程式はベニー方程式としてよばれており,  $\text{Re} \sim 1$  程度で成り立つことが知られているが, さらに大きなレイノルズ数に対しては上式では十分ではなく境界層の影響を考慮する必要がある [10].

(26) 式の線形安定性を調べるため複素角周波数を  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  とおいて,  $H - 1 \propto \exp[i(k\xi - \omega\tau)]$  のような微小攪乱を仮定し以下の関係を得る:

$$\omega_R = 2k, \quad \omega_I = \epsilon k^2 \left[ \frac{8}{15} \text{Re} - \frac{2}{3} \cot \theta - \frac{1}{3} \epsilon^2 \text{We} k^2 \right]. \quad (27)$$

(27) の第1式で無次元化された位相速度が  $v_p = \omega_R / k = 2$  となることから, 攪乱の速度は界面での流速  $u_0$  の2倍であることがわかる. 一方, 第2式から臨界レイノルズ数  $\text{Rc} = (5/4) \cot \theta$  が存在して,  $\text{Re} \leq \text{Rc}$  の場合  $\omega_I \leq 0$  となるので常に安定,  $\text{Re} > \text{Rc}$  では

$$0 < k < k_c = 2 \sqrt{\frac{2(\text{Re} - \text{Rc})}{5\epsilon^2 \text{We}}}, \quad (28)$$

の領域の長波長攪乱に対して  $\omega_I > 0$  となるので不安定となることが分かる. この領域で  $k = k_m = k_c / \sqrt{2}$  に対して最大増幅率  $(\omega_I)_{\max} = (3\epsilon) / (\epsilon^2 \text{We}) [8(\text{Re} - \text{Rc}) / 15]^2$  をとり,  $\text{Re}$  が  $\text{Rc}$  から離れるにつれて増幅率は増大する. さらに,  $\psi = \pi/2$  (垂直壁) のとき,  $\text{Rc} = 0$  となり常に不安定となることを注意しておく.

ところで, 線形不安定により攪乱が増幅された後どのようなようになるかという疑問に対しては, 非線形の安定性を調べる必要がある. 今, 非線形性の程度を微小  $\delta$  とする弱非線形問題を考える.  $\text{Re} \sim \text{Rc} + O(\delta^2)$  での変調安定性を調べるため,  $H - 1 = \delta A(\tau_2) \exp[i(k\xi - \omega_R \tau)] + C.C.$  とおいて,  $\tau_2 = \delta^2 \tau$  の引き延ばされた時間座標を導入し,  $\omega_I \sim \delta^2$  程度の弱い増幅率を仮定する. これらを, (26) に用いると,  $O(\delta^3)$  で次の振幅変調の方程式を得る:

$$|A|_{\tau_2} = \omega_I |A| + J |A|^3, \quad (29)$$

ここで,  $J$  は  $k$  の実関数で  $0 < k < k_s = k_c/2$  で  $J > 0$ ,  $k_s < k < k_c$  で  $J < 0$  である. この方程式はランダウ方程式として知られており, (29) 式で攪乱  $|A|$  が十分小さければ, 右辺第2項は無視でき, 先の線

形安定性の問題に帰着する。しかし不安定により攪乱の振幅が大きくなってくると、右辺第2項の影響を考慮する必要がある。 $\omega_I$  は  $0 < k < k_c$  で常に正になるが、 $k_s < k < k_c$  では  $J < 0$  となるので、攪乱は  $|A| = \sqrt{-\omega_I/J}$  の定常解に漸近することが可能である(超臨界分岐)。さらに、 $0 < k < k_s$  ではもはや定常解は存在せず、解は不安定となり別の状態へ移る(亜臨界分岐)ことが予想される。このような線形、弱非線形安定性の領域が図5に示されている。

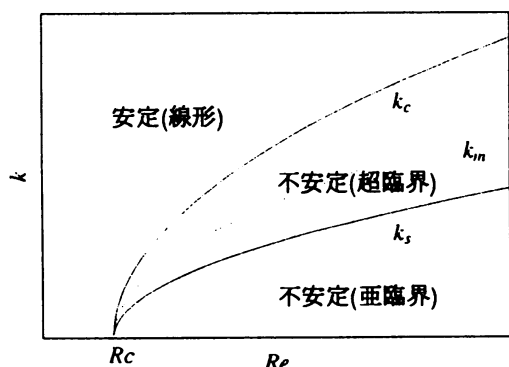


図5. 安定曲線

(29) 式は中立安定に近い波数  $k$  近傍での攪乱の発展(変調安定性)を調べているに過ぎず、複数個の不安定な波の相互作用や低波数の攪乱により現れる現象を記述するには十分でない。事実(26)式は波数  $k$  の波とその高調波との相互作用の結果、定常的に伝播する孤立波が存在することが知られている。また、 $k_c > k > k_s$  の範囲での定常解は波数  $k/2$  の攪乱に対して不安定(分数調波不安定)となるため、攪乱の波数は次第に低下していき不安定な波数領域  $0 < k < k_s$  へと移り、カオス的な不規則波が現れる場合もある。

ところで、このような段階までは流れ方向の攪乱が横方向の攪乱に対してより支配的であったが、さらに下流に進むにつれて孤立波を含め2次元構造は横方向の攪乱に対して不安定となり3次元的な構造が現れるようになる。そして、最終的には界面の3次元的に不規則な現象へと発展していくが、このとき不規則な波の中に局在する3次元的な構造が見られる。[11]

最近、(26)式を高次微小分散項まで含め3次元に拡張したベニー方程式が数値的に調べられ、適当な分散性のもとでは実験で観察されているような馬蹄形の局在パルス構造が現れることが示されている[12]。

#### 4 固体壁のない場合の液膜

固体壁がある場合、壁面での粘性効果が液膜の振る舞いに重要な役割を果たし、摂動的な取り扱いでは圧力項と粘性項の釣り合い  $p_x \sim \mu u_{xx}$  を仮定してきた。しかし、固体壁のない場合、液膜の振る舞いには粘性よりも慣性項が重要であり、慣性項と圧力項の釣り合い  $p_x \sim \rho u_t$  を仮定する。平面シートの場合、図6に示すような対称モード、図7に示すような反対称モードの二つの攪乱モードが可能であるが、両者の間で摂動のスケールは異なるので、以下ではそれらを分けて述べることにする。さらに、両面が自由境界の場合容易に大変形し、これまで述べてきた摂動的な取り扱いでは十分でない場合があるため、展開パラメータに独立及び従属変数を含むシートの厚みによる展開方法についても述べる。

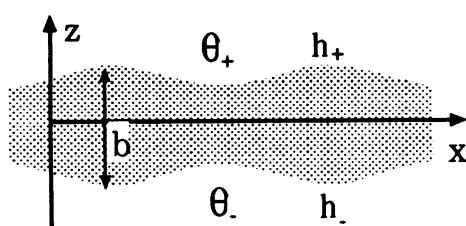


図6. 対称モード

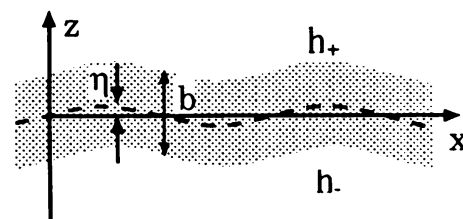


図7. 反対称モード

#### 4.1 摂動による方法 (対称モード)

図 6 に示すような対称モード攪乱に対しては、粘性がなければ波数  $k$  と角周波数  $\omega$  の間で分散関係

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho} \tanh \frac{kb_0}{2}}, \quad (30)$$

を満たす必要があり、まわりの流体との相互作用が無ければ常に安定である。 $b_0$  を攪乱のない場合の膜厚みとすれば、長波攪乱 ( $k \ll 1$ ) に対して  $v_s = \sqrt{\sigma b_0 / 2\rho}$  とおくと、(30) 式は  $\omega \sim v_s k^2 (1 - k^2 b_0^2 / 24 + \dots)$  と近似できる。この関係を用いると  $\exp[i(kx - \omega t)] \sim \exp[i(kx - k^2 v_s t)]$  となるので、 $k \sim \epsilon$  となるような長波長攪乱に対して位相が  $O(1)$  の程度で変化するためには、 $x \sim \epsilon^{-1}$ ,  $t \sim \epsilon^{-2}$  の程度でなければならない。このとき、圧力項と慣性項の釣り合いの仮定  $p_x \sim \rho u_t$  より  $p \sim \epsilon u$  となり、連続の式から  $w \sim \epsilon u$  の程度と見積もれる。さらに、 $u$  を位相速度  $\omega/k$  と同程度にとると  $u \sim \omega/k \sim k v_s \sim \epsilon$  となる。

ここでは簡単のために、主流の速度がない場合 (または、一定流れ速度に乗った系からみた場合) の液膜について考え、液体の粘性、シート両面間での温度差による表面張力の温度依存性の影響を考慮する。上で見積もった大きさの程度を考慮して、独立変数および従属変数のスケージングを以下のように導入する:

$$\xi = \epsilon(x/b_0), \quad \zeta = z/b_0, \quad \tau = \epsilon^2 t(\nu/b_0^2), \quad (31)$$

$$U = \epsilon^{-1} u b_0 / \nu, \quad w(\nu/b_0) = \epsilon^2 W, \quad p(b_0^2 / \rho \nu^2) = \epsilon^2 P, \quad h_{\pm} / b_0 = H_{\pm}, \quad \theta / \bar{\theta} = \Theta. \quad (32)$$

ただし、 $\nu = \mu / \rho$ ,  $b_0$  を攪乱のない場合のシートの厚み、 $z = h_{\pm}$  をシートの上面下面を示し、 $\bar{\theta}$  を両面間での平均温度とする。さらに、従属変数を以下のように展開する:

$$(U, W, P, \Theta) = (U_0, W_0, P_0, \Theta_0) + \epsilon^2 (U_1, W_1, P_1, \Theta_1) + \epsilon^4 (U_2, W_2, P_2, \Theta_2) + \dots \quad (33)$$

以上を基礎方程式及び両面を自由境界とした境界条件に代入して  $\epsilon$  の冪で整理する。その際、シート厚み  $b = H_+ - H_-$  およびシート中心線位置  $\eta = (H_+ + H_-) / 2$  を導入しておく。

シート両面間で温度差  $\Delta\theta$  のために、シート面内で厚みにわたる速度分布と温度分布

$$U_0 = -\frac{\text{MBi}\Delta\theta}{(\text{Bi}b+2)^2} b_{\xi}\zeta + C(\xi, \tau), \quad \Theta_0 = \frac{\text{Bi}\Delta\theta}{\text{Bi}b+2} (\zeta - \eta) + 1, \quad (34)$$

が現れる。さらに、 $E$  を重心座標に関する適当な定数としたとき、中心線と厚みの関係

$$\eta = \frac{\text{MBi}\Delta\theta}{4S} \left[ \frac{b^2}{(\text{Bi}b+2)} - E \right], \quad (35)$$

より、厚みに応じて中心線が変化することから、初期にシート界面が対称モード ( $\eta = 0$ ) でも、温度差のために界面は非対称になっていくことが示される。また、厚み  $b$  と面内での一様速度成分  $C$  に関して  $\text{Pr}$  が十分小さい場合

$$b_{\tau} + (bC)_{\xi} - \text{MBi}\Delta\theta \left[ \frac{\eta b b_{\xi}}{(\text{Bi}b+2)^2} \right]_{\xi} = 0, \quad (36)$$

$$b(C_{\tau} + CC_{\xi} - \frac{S}{2} b_{\xi\xi\xi}) = 4(bC_{\xi})_{\xi} + \text{MBi}\Delta\theta [\dots] + (\text{MBi}\Delta\theta)^2 [\dots], \quad (37)$$

のように表される [13]。ただし、 $[\ ]$  内は  $b, \eta$  などの高次項を示す。

このとき、複素角周波数  $\omega$  と実波数  $k$  を用いて  $\exp[\omega\tau + ik\xi]$  に比例するような攪乱に対する (35), (36), (37) 式の線形安定性を調べると、長波長近似の範囲内ではシートの安定性は両面間での温度差により決定され、そのとき二つの臨界温度差  $\Delta\theta_c$ ,  $\Delta\theta_s$  ( $\Delta\theta_c > \Delta\theta_s$ ) が存在する。さらに、シート両面間での温度差  $\Delta\theta$  が  $\Delta\theta \geq \Delta\theta_c$  で攪乱は非振動的不安定 ( $\text{Re}\omega \geq 0, \text{Im}\omega = 0$ ),  $\Delta\theta_c > \Delta\theta \geq \Delta\theta_s$  で非振動的安定 ( $\text{Re}\omega < 0, \text{Im}\omega = 0$ ), さらに  $\Delta\theta_s > \Delta\theta$  で振動的安定 ( $\text{Re}\omega < 0, \text{Im}\omega \neq 0$ ) となる。そして、この臨界温度差は  $Pr$  が大きくなると減少する。

このような不安定性により、初期の微小な対称攪乱は非対称な攪乱へと発展し、局所的にシート厚みが薄くなるため最終的には破断に至る可能性がある。図7には、界面の温度差による非対称な変形と共に、表面張力の温度依存性のためシート内にマランゴニー対流が誘起されている様子が示されている。

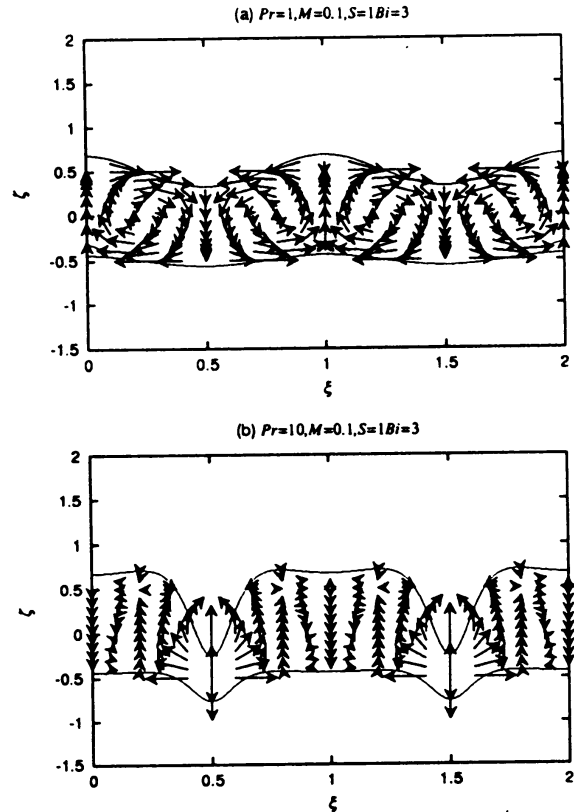


図8. シート形状とマランゴニー対流

#### 4.2 摂動展開による方法 (反対称モード)

図7に示すような反対称モードの場合、分散関係は

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho} \coth \frac{kb_0}{2}}, \quad (38)$$

で与えられる。この場合も、周りの流体の影響がなければ安定である。長波長攪乱に対して  $v_a = \sqrt{2\sigma/\rho b_0}$  として、 $\omega \sim v_a k(1 + k^2 b_0^2/24 + \dots)$  のように近似できるので、攪乱は  $\exp[i(kx - \omega t)] \sim \exp[ik(x - v_a t) - i(k^3/24)v_a b_0^2 t]$  で表わされ、 $k \sim \epsilon$  とすれば、 $x - v_a t \sim \epsilon^{-1}$ ,  $t \sim \epsilon^{-3}$  と見積もることができる。ここでも、 $p_x \sim \rho u_t$  を仮定しているので  $p \sim \epsilon^2 u$  となり、連続の式より  $w \sim \epsilon u$ , さらに  $u \sim \omega/k \sim v_a \sim 1$  とする。その結果、

$$\xi = \epsilon(x - v_a t), \quad \zeta = z, \quad \tau = \epsilon^3 t, \quad u = U, \quad w = \epsilon W, \quad p = \epsilon^2 P, \quad (39)$$

のようなスケーリングが導入でき、さらに従属変数は

$$(U, W, P) = (U_0, W_0, P_0) + \epsilon^2(U_1, W_1, P_1) + \epsilon^4(U_2, W_2, P_2) + \dots, \quad (40)$$

$$(b, \eta) = (b_0, \eta_0) + \epsilon^2(b_1, \eta_1) + \epsilon^4(b_2, \eta_2) + \dots, \quad (41)$$

のように展開できる。これらを、粘性および表面張力の温度依存性を無視した基礎方程式および境界条件に用いて  $\epsilon$  の各幂で整理する。 $U_0 = v_a$  で  $b_0$  は定数として、 $O(\epsilon^4)$  で線形 K-dV 方程式と厚みの変化分

$$\eta_{0\tau} - (v_a b_0^2/24)\eta_{0\xi\xi\xi} = 0, \quad b_1 = (b_0/2)\eta_{0\xi}^2, \quad (42)$$

$O(\epsilon^6)$  で非線形の振幅方程式

$$\eta_{1\tau} - (v_a b_0^2/24)\eta_{1\xi\xi\xi} = (v_a b_0^4/680)\eta_{0\xi\xi\xi\xi\xi} - (v_a b_0^2/16)\eta_{0\xi}^2\eta_{0\xi\xi\xi} - (v_a b_0^2/8)\eta_{0\xi\xi}^2\eta_{0\xi}, \quad (43)$$

が得られる。(42), (43) 式は以下の周期解を持つことが示せる:

$$\eta_0 = A \exp(i\tilde{\theta}) + C.C., \quad \eta_1 = -(3/16)A^3 \exp(3i\tilde{\theta}) + C.C. \quad (44)$$

ここで、永年項を消去するために座標の繰り込み  $\tilde{\theta} = \tilde{\xi} - (v_a b_0^2/24)\tau$ ,  $\tilde{\xi} = \xi + \epsilon^2 v_a b_0^2 (b_0^2/640 + |A|^2/16)\tau$  を行っている。

(44) により表される解は、 $\epsilon$  の比較的大きな値 (強い非線形性) に対してシート中心面  $\eta$  の曲率が大きな部分で瘤状の膨らみ (対称モード) が現れることが示されるが、シートの破断を予測するには至らない。(42), (43) 式では分散性の効果が大きく取り込まれているため、相対的に非線形性の取り込みが弱くなっている。従って、シートの崩壊を記述するためにはさらに強い非線形性を考慮した解析が必要である。

### 4.3 厚み展開

以下では、さらに強い非線形性を考慮するため、以下で示すような従属変数  $u, w, p$  の展開を行う [14]:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + (z - \eta)u_1(x, t) + (z - \eta)^2 u_2(x, t) + \cdots, \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + (z - \eta)w_1(x, t) + (z - \eta)^2 w_2(x, t) + \cdots, \\ p(x, z, t) &= p_0(x, t) + (z - \eta)p_1(x, t) + (z - \eta)^2 p_2(x, t) + \cdots. \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、シート上下界面を  $h_{\pm}$  であらわすとき、 $\eta = (h_+ + h_-)/2$  はシート中心面を表わし、シート厚みを  $b = h_+ - h_-$  とすると、 $|z - \eta| \leq |h_{\pm} - \eta| = b/2$  となり高々膜厚みの半分程度である。

簡単のため粘性、重力、温度差などの影響を考えず、上式を基礎方程式及び境界条件に用いることにより、

$$\begin{aligned} b_t + (u_0 b)_x &= 0, & w_0 &= \eta_t + u_0 \eta_x, \\ u_{0t} + u_0 u_{0x} &= -\frac{P_x}{\rho} + \frac{\Delta P}{\rho b} \eta_x, & w_{0t} + u_0 w_{0x} &= -\frac{\Delta P}{\rho b}, \end{aligned} \quad (46)$$

のような簡単化された非線形方程式を得る [14, 15]。ここで、 $P = (P_+ + P_-)/2$ ,  $\Delta P = P_+ - P_-$ ,  $P_{\pm} = \mp \sigma (\eta_{xx} \pm b_{xx}/2) f_{\pm}$ ,  $f_{\pm} = (1 + \eta_x^2 \pm \eta_x b_x + b_x^2/4)$ 。(46) 式は薄い液膜に対する連続の式、運動学境界条件、 $x, z$  方向の運動方程式を示している。特に、対称モードの場合、 $\eta = 0$  とおくことで

$$b_t + (u_0 b)_x = 0, \quad u_{0t} + u_0 u_{0x} = -\frac{\sigma}{2\rho} \left[ b_{xx} \left( 1 + \frac{b_x^2}{4} \right) \right]_x, \quad (47)$$

のようなさらに簡単な非線形方程式に帰着し、厳密な周期解が楕円関数を用いて得られている。初期条件が反対称モードの場合、(46) 式の数値解は、前節 (44) でも述べたように、シート曲率の大きな部分で瘤状の対称モードとくびれが現れ、その薄い部分で破断する可能性があることが示されている。しかし、対称モードの場合 (47) 式で周期解が得られていることからわかるように破断には至らない。また、両方程式では強い非線形性が取入れられているため、相対的には分散効果が弱い。このような場合、特に反対称モードでの破断ヶ所近傍では、非線形性に伴って現れる高調波成分に対する分散効果の影響が弱くなり、破断までの時間が短く見積もられている可能性があると考えられる。

## 5 おわりに

液膜の振る舞いに関する解析的な取り扱いを中心にのべてきたが、最後にいくつかの注意点を述べておく。不安定により界面が多価になるほど大変形する場合、現在のところ数値的な方法に頼るしか方法がないようである。また、強い非線形方程式の導出法として厚み展開が有効ではあるが、粘性を含む平面シートの場合などは必ずしもうまく行くとはいえられないようである。さらに、液膜の崩壊や破断付近では、もはやナビエ-ストークス方程式だけでは十分ではなく、ファンデアワールス力の影響も考慮すべ

## 参考文献

- [1] R.H.Rangel and W.A.Sirignano: Phys.Fluids **31**(1988)1845.
- [2] 流れ場の数値シミュレーション (日本機械学会編, コロナ社, 1988).
- [3] M.Sussman, P.Smereka and S.Osher: J.Comp.Phys.**114**(1994)146.
- [4] A.Oron,S.H.Davis and S.G.Bankoff: Rev.Mod.Phys.**69** (1997)931, 及びそこで引用されている文献.
- [5] H.Ockendon andn J.R.Ockendon: Viscous Flow (Cambridge Univ.Press,1995).
- [6] H.E.Huppert: J.Fluid Mech. **121** (1982)43.
- [7] M.Fermigier, L.Limat,J.E.Wesfreid,P.Boudinet and C.Quilliet: J.Fluid Mech.**236** (1992) 349.
- [8] M.J.Tan, S.G.Bankoff and S.H.Davis: Phys.Fluids **A2**(1990)313.
- [9] 吉永隆夫: 液膜の不安定性とカオス (機械の研究, 養賢堂)54(2002) 120, 及びそこで引用されている文献.
- [10] T.Ooshida:Phys.Fluids **11**(1999)3247.
- [11] S.R.Tailby and S.Portalsky: Trans.Instn. Chem.Engrs. **40**(1962)114.
- [12] S.Toh, H.Iwasaki and T.Kawahara: Phys.Rev. **A40**(1989)5472.
- [13] T.Yoshinaga and T.Uchiyama: J.Phys.Soc.Jpn **70**(2001)103.
- [14] C.Mehring and W.A.Sirignano: J.Fluid Mech. **388**(1999)69.
- [15] T.Yoshinaga and T.Kotani: J.Phys.Soc.Jpn **70**(2001)372.