

$Spin(10) \times GL(3)$ に係わる既約概均質ベクトル空間の holonomy diagram と b -関数

筑波大学附属盲学校

尾 関 育 三

($Spin(10) \times GL(3)$, $\Lambda \otimes \Lambda_1$, $V(16) \otimes V(3)$) (Λ は偶の半 $Spin$ 表現, Λ_1 は恒等表現) については 1974 年川原洋人氏が研究し, 「31 個の orbits に分解される」と報告されている ([1] 参照) が, holonomy diagram や b -関数については 今日まで未解決であった。筆者は川原氏の研究を引き継ぎ, holonomy diagram と b -関数について明らかにすることを試み, 一応の結果を得たので以下にそれを記す。なお, これによって, 既約概均質ベクトル空間の holonomy diagram は全て明らかになった。([3] ~ [6] 参照)

定義 および記号

$$G = Spin(10) \times GL(3)$$

$$\rho = \Lambda \otimes \Lambda_1$$

$$V = V(16) \otimes V(3) \quad \text{但し } V(n) \text{ は } n \text{ 次元ベクトル空間}$$

S_{ijk} : codimension i の G -orbit で, dual な orbit が codimension j , 代表点の isotropy subgroup の unipotent 部分から次元のもの。但し i, j で他と区別できる場合には k は省略することもある

x_{ijk} : S_{ijk} の代表点

G_x : 点 x の isotropy subgroup

V_x^* : 点 x における conormal vector space. すなわち

$$V_x^* = \{y \in V^* \mid \langle dp(A)x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g}\}$$
 (但し $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環, V^* は V の dual space, dp は p の微分表現)

Δ_{ijk} : S_{ijk} の conormal bundle, すなわち

$\Delta_{ijk} = \{(x, V_x^*) \in V \times V^* \mid x \in S_{ijk}\}$ の Zariski 閉包.

$W = \{(x, \varepsilon \text{grad log } f(x)) \in V \times V^* \mid x \in V-S, \varepsilon \in \mathbb{C}\}$ の Zariski 閉包. $f(x)$ は (G, ρ, V) の相対不変式 (12 次の奇次多項式)

$$S = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

([2] 参照)

1. (G, ρ, V) の orbit 分解

Proposition 1. (G, ρ, V) は表 I に示す各点によって代表される 32 個の orbit に分解される。

注① 川原氏は「31 個の orbit に分解される」と記しているが、点 $X_{11, 15}$ に代表される orbit が見落されている。他はすべて川原氏によって見出されたものに一致する。

注② 表 I の点 α がすべて異なる orbit に属することは、isotropy subgroup が互いに異なることから知られる(表 2)

注③ ある orbit の conormal bundle Δ が W に含まれ、かつ G -prehomogeneous であれば f^s (f は相対不変式) のみならず micro-differential equations $\mathcal{M} = \mathcal{E}f^s$ は simple holonomic system になり、特にその order $\text{ord}_\Delta f^s$ が一意的に定まる。([2] 参照)

表 I 中、 $\nsubseteq W$ と記された orbits はその conormal bundle Δ が W に含まれないものである。それは $S_{13, 13, 14}$ を除き、それらに関する order $\text{ord}_\Delta f^s$ が求められない (不定となる) ことから知られる。

$\Delta_{13, 13, 14} \nsubseteq W$ は $\Delta_{13, 13, 11} \nsubseteq W$ から知られる。但し order $\text{ord}_{\Delta_{13, 13, 14}} f^s$ が形式的には決定できる。これは注目すべき例である。

注④ 表 I 中 N, P と記した orbits の conormal bundle と $\Delta_{11, 11}$ については W に含まれるか否かは目下のところ不明である。他はすべて W に含まれる。(証明後記)

[表 I] 各 orbit の代表点.

$V(16)$ の basis : $1, e_i, e_{i_2}, e_i, e_{i_2} e_{i_3} e_{i_4}, 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5$

この略記法 : $e, i, i_2, \hat{i}_j$ (但し $\hat{i}_j e_{ij} = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$)

$V(3)$ の basis : e_6, e_7, e_8 (略記法 6, 7, 8)

e.g. : $e6 = 1 \otimes e_6, \hat{2}6 = -e_1 e_3 e_4 e_5 \otimes e_6, 127 = e_1 e_2 \otimes e_7$

s.d. : self dual

N.P. : not prehomogeneous.

i, j, k			S_{ijk} の代表点.		S_{jik} の代表点.	j, i, k'
0.	48.	0	$e6 + \hat{3}6 + 127 - \hat{2}7 + 138 + \hat{1}8$		0	48. 0. 0.
1.	27	7	$156 - 246 - 147 + 237 + e8 + \hat{2}8$		$e6 + 127$	27. 1. 17.
3.	35.	5	$e6 + \hat{1}6 + 257 + \hat{5}7 + 158$	$\neq W$	$e6$	35. 3. 12.
3.	19.	5	$e6 + \hat{4}6 + 347 + \hat{3}7 + 138 - 248$		$136 + 246 + 127 + e8$	19. 3. 17.
5.	23.	7	$e6 + \hat{5}6 + 2 \times 137 + 257 + 148 - \hat{4}8$	N.P.	$e6 + 127 + 138$	23. 5. 14.
5.	15.	7	$e6 - 2 \times \hat{4}6 + 347 - \hat{3}7 + 138 + \hat{5}8$	$\neq W$	$156 + \hat{5}6 + e7 + 128$	15. 5. 15.
6.	22.	2.	$156 + \hat{1}6 + e7 + \hat{5}8$	$\neq W$	$e6 + \hat{5}7$	22. 6. 10.
6.	14.	9.	$e6 + \hat{5}6 + 237 + \hat{3}7 + 158$		$e6 + 157 + \hat{5}8$	14. 6. 7.
7.	23.	8.	$256 - \hat{2}6 + e7 - \hat{5}7 + 128$		$126 + 346 + e7$	23. 7. 14.
7.	17.	10.	$246 - \hat{4}6 - 147 - \hat{5}7 + e8$	N.P.	$126 + 347 + e8$	17. 7. 14.
8.	8.	11.	$256 + \hat{5}6 + 237 - 157 + e8$		s.d.	8. 8
9.	9.	9.	$156 - \hat{4}6 + \hat{5}7 + e8$		s.d.	9. 9.
10.	10.	10.	$156 + 236 + \hat{5}7 + e8$	$\neq W$	s.d.	10. 10
11.	15.	9.	$256 + \hat{5}6 - 157 + e8$	$\neq W$	$e6 + \hat{5}6 + 147 + \hat{4}7$	15. 11. 13.
11.	11.	12	$e6 - \hat{4}6 + 157 + \hat{5}7 + 148$		s.d.	11. 11.
13.	13.	14	$e6 - \hat{4}6 + 157 + \hat{5}7 + 128$	$\neq W$	$346 - \hat{4}6 + 127 + e8$	13. 13. 11.
14.	30.	2	$e6 + \hat{5}6 + 157 + \hat{1}7$	N.P.	$e6 + \hat{5}6$	14. 30. 10
16.	16.	8.	$\hat{5}6 + 127 + 347 + e8$	N.P.	s.d.	16. 16.
18.	18.	13.	$156 + \hat{5}6 + e7$	$\neq W$	s.d.	18. 18.

注(1) V における G -orbit S の conormal bundle $A = V \times V^*$ と V^* における G -orbit S^* の conormal bundle $A^* = V \times V^*$ とが一致するとき S と S^* は互いに dual な orbit という。

(2) V の G -orbits と V^* の G -orbits とは全体として一致する。よって $S_{ijk}^* \subset V^*$ を $S_{ijk} \subset V$ と同一視する。

(3) S_{ijk} と $S_{jik'}$ とは互いに dual.

[表 2] 各代表点における isotropy subgroup の連結成分

X_{ijk} における isotropy subgroup				$X_{jik'}$ における isotropy subgroup			
i	j	k			j	i	k'
0.	48	0	$SL(2)^2$	$Spin(10)GL(3)$	48	0	0
1.	27	7	$GL(1)^2 \cdot U(7)$	$(SL(3) \times SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(17)$	27	1	17
3.	35	6	$GL(1)^3 \cdot U(6)$	$(SL(5) \times GL(2) \times GL(1)) \cdot U(12)$	35	3	12
3.	19	5	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(5)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(17)$	19	3	17
5.	23	7	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(7)$	$(SL(3) \times SL(2)^2 \times GL(1)) \cdot U(14)$	23	5	14
5.	15	7	$(SL(2) \times GL(1)) \cdot U(7)$	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(15)$	15	5	15
6.	22	2	$(SL(3) \times GL(1)^2) \cdot U(2)$	$(SL(4) \times GL(1)^3) \cdot U(10)$	22	6	10
6.	14	9	$GL(1)^3 \cdot U(9)$	$(SL(3) \times SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(7)$	14	6	7
7.	23	8	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(8)$	$(Sp(2) \times GL(1)^2) \cdot U(14)$	23	7	14
7.	17	10	$GL(1)^3 \cdot U(10)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^3) \cdot U(14)$	17	7	14
8.	8	11	$GL(1)^3 \cdot U(11)$	s. d.			
9.	9	9	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(9)$	s. d.			
10.	10	10	$(SL(2) \times GL(1)^3) \cdot U(10)$	s. d.			
11.	15	9	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(9)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(13)$	15	11	13
11.	11	12	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(12)$	s. d.			
13.	13	14	$(SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(14)$	$(SL(2)^2 \times GL(1)^2) \cdot U(11)$	13	13	11
14.	30	2	$(G_2 \times SL(2) \times GL(1)) \cdot U(2)$	$(Spin(7) \times SL(2) \times GL(1)^2) \cdot U(10)$	30	14	10
16.	16	8	$(Sp(2) \times SL(2) \times GL(1)) \cdot U(8)$	s. d.			
18.	18	13	$(SL(3) \times GL(1)^3) \cdot U(13)$	s. d.			

2. Holonomy diagram と b -関数

Proposition 2 (G, ρ, V) の holonomy diagram は 図 1 の通りである。

注⑤ $(0_{48}) - (1_{27}) - (3_{19})$ の交わりはすべて G_0 prehomogeneous である。但し $G_0 = \text{Spin}(10) \times \text{SL}(3)$

また $(6_{14}) - (9_9) - (8_8) - (7_{23})$ の交わりもすべて G_0 prehomogeneous

である。よってこれらの dual な variety の間の交わりも G_0 prehomogeneous である。 $\Lambda_{0,48} \subset W$ は自明だから $\Lambda_{8,8} \subset W$ を証明すればこれらと交わる上記の各 variety が W に含まれることが証明できる ([2] 参照)

 $\Lambda_{8,8} \subset W$ の証明

$$x_{8,8} = 256 + \hat{56} + 237 - 157 + e8$$

$V_{x_{8,8}}^*$ の代表点として

$$y_{8,8} = \frac{3}{2}(456 + 347) + \frac{1}{2}(\hat{37} + 248) - 2 \cdot \hat{48} \text{ をとる.}$$

これらに対し

$$x = x_{8,8} + 456 + 347 + \hat{37} + 248 - \hat{48}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 256 + 2 \cdot \hat{56} + \frac{1}{2} \cdot 237 - \frac{3}{2} \cdot 157 + \frac{3}{2} \cdot e8 + y_{8,8}$$

をとると

$y = \text{grad } \log f(x)$ すなわち.

$$\langle d\rho(A)x, y \rangle = d\chi(A) \quad (A \text{ は } G \text{ の Lie 環の元})$$

$$g = \begin{pmatrix} t^{-2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & t^2 & & \\ & & & t^4 & \\ & & & & t^4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t^2 & & \\ & & t^4 & \end{pmatrix} \in G_{x_8, 8} \text{ をとる}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\rho(g)x, t^4 \rho^*(g)y) = (x_{8,8}, y_{8,8})$$

但し ρ^* は ρ の反変表現.

$$\therefore \Lambda_{8,8} \subset W$$

(証明終)

以上により.

Proposition 3. (G, ρ, V) の b -関数 $b(s)$ は

$$b(s) = (s+1)(s+\frac{3}{2})(s+2)(s+\frac{5}{3})(s+\frac{6}{3})(s+\frac{7}{3}) \\ (s+\frac{8}{3})(s+\frac{9}{3})(s+\frac{10}{3})(s+3)(s+\frac{7}{2})(s+4)$$

である。証明は b -関数に関する micro-local calculus による。

参考文献

- [1] 川原洋人: 「 $Spin(10)$ に関連した概均質空間について」
東京大学修士論文(1974)
- [2] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima :
Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces
(to appear in Inv. Math)
- [3] M. Sato and T. Kimura : A classification of
irreducible prehomogeneous vector spaces and their
relative invariants. Nagoya Math J. 65, 1-155 (1977)
- [4] T. Kimura : The holonomy diagrams and the b -functions
of irreducible regular prehomogeneous vector spaces
(to appear in Nagoya Math. J)
- [5] I. Ozeki : On the micro-local structure of the
regular prehomogeneous vector space associated with
 $SL(5) \times GL(4)$. I. Proc. Japan Acad. 55 A, 37-40 (1979)
- [6] I. Ozeki : On the micro-local structure of the
regular prehomogeneous vector space associated with
 $GL(8)$. Proc. Japan Acad. 56 A, 18-21 (1980)