

28 次のアダマール行列について

愛媛大・理 木村 浩 (Hiroshi Kimura)

愛媛大・教育 大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

位数が 24 以下のアダマール行列の分類がなされている ([1], [2], [4]). 又位数 28 のアダマール行列が群論的な手法で構成されているが ([7], [8]), うちの自己同型群の位数は比較的大きい。最近, 自明な自己同型群しかもたない位数 28 のアダマール行列も構成された ([5]). 今回は Hall set を持つ位数 28 のアダマール行列を組織的に構成する方法と, 構成された行列 (約 6000 個) を K -行列に別て分類し, 476 個の K -同値はクラスと得た事の報告である。

H を位数 28 のアダマール行列とし, いわゆる標準化 ([3]) されているものとし, H に対応するアダマールエンベザイルを $D(H)$ とおく。このとき, H が Hall set を持つとは H が H' (H' は標準化された位数 28 のアダマール行列で $D(H')$ が (2.1) の形の部分行列

をもつ) にアダマール行列の意味で同値の時をいう。

一般性を失う事なく $D(H)$ の最初の 3 フロックは (2.1) の形をもつとしてよく、この際 図 (2.1) のように点の部分集合を $X, B, C, \dots, W, E$ と名付ける。

$$\begin{array}{cccccccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \\
X & B & C & D & U & V & W & E
\end{array}$$

(2.1)

この時 上述の 3 フロック以外の $D(H)$ のフロックの $X, \dots, W, E$ 部分における 1 の個数を $x, \dots, w, e$ とすると 以下の表の 11 番目までである。

$$\begin{aligned}
 (x, b, c, d, e, u, v, w) &= (3, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3) \\
 &= (1, 1, 1, 1, 0, 3, 3, 3) \\
 &= (2, 0, 0, 1, 0, 4, 3, 3) \\
 &= (2, 1, 1, 0, 1, 2, 3, 3) \\
 &= (2, 0, 1, 0, 0, 3, 4, 3) \\
 &= (2, 1, 0, 1, 1, 3, 2, 3) \\
 &= (2, 1, 0, 0, 0, 3, 3, 4) \\
 &= (2, 0, 1, 1, 1, 3, 4, 2)
 \end{aligned}$$

上の表で 上から順に 1, 2, ..., 8 型と呼ぶ事にし、 $D(H)$ で i 型の現われる個数を a_i とする。この時

定理 1. $a_1=4, a_2=2, a_3=\dots=a_8=3$ 。

このより $D(H)$ は一般性を失う事なく 図 (2.2) の形をもつ。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1													
2	1	1	1	1	1	1		1							1	1	1	1	1	1							
3	1	1	1	1	1			1	1												1	1	1	1	1	1	
4	1	1	1								1	1	1		1	1	1				1	1	1				1
5		(3)									(3)				(3)					(3)			(3)				1
6		(3)									(3)				(3)					(3)			(3)				1
7		(3)									(3)				(3)					(3)			(3)				1
8		(1)				1	1	1			(3)				(3)					(3)			(3)				..
9		(1)				1	1	1			(3)				(3)					(3)			(3)				
10		(2)						1			(4)				(3)					(3)			(3)				
11		(2)						1			(4)				(3)					(3)			(3)				
12		(2)						1			(4)				(3)					(3)			(3)				
13		(2)				1	1				(2)				(3)					(3)			(3)				1
14		(2)				1	1				(2)				(3)					(3)			(3)				1
15		(2)				1	1				(2)				(3)					(3)			(3)				1
16		(2)						1			(3)				(4)					(3)			(3)				
17		(2)						1			(3)				(4)					(3)			(3)				
18		(2)						1			(3)				(4)					(3)			(3)				
19		(2)				1			1		(3)				(2)					(3)			(3)				1
20		(2)				1			1		(3)				(2)					(3)			(3)				1
21		(2)				1			1		(3)				(2)					(3)			(3)				1
22		(2)				1					(3)				(3)					(4)			(4)				
23		(2)				1					(3)				(3)					(4)			(4)				
24		(2)				1					(3)				(3)					(4)			(4)				
25		(2)					1	1			(3)				(3)					(2)			(2)				1
26		(2)					1	1			(3)				(3)					(2)			(2)				1
27		(2)					1	1			(3)				(3)					(2)			(2)				1

(2.2)

ここで (i) は各部分における 1 の個数である ($i=2, 3, 4$)。

定理 2. H を Hall set をもつ 位数 28 の アタマル 行列とある。この時 H の 転置行列も Hall set をもつ。

次に (2.2) において  部分を決定するのに、必要に応じて H の行並び列を入れかえる事により、その部分は 図 (3.2) の 17通りのいずれかになる。

	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
4	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
6	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
7	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
	(1)	(2)	(3)	(4)
4	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
6	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
7	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
	(5)	(6)	(7)	(8)
4	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
6	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
7	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
	(9)	(10)	(11)	(12)
4	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
6	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
7	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
	(13)	(14)	(15)	(16)
4	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
6	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
7	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
	(17)			(3.2)

Lemma 1 $D(H) = (d_{ij})$ とし $d_{ij} = 0$ の時
 $d'_{ij} = 1$, $d_{ij} = 1$ の時 $d'_{ij} = 0$ とおくと
 $d_{4j} + d_{5j} + d_{6j} + d_{7j} + d'_{8j} + d'_{9j} = 4$ ($j = 1, 2, \dots, 5$)

上の Lemma により 図 (2.2) の  部分は 図 (3.3) のいずれかになる。

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5			1	1	1
6		1		1	1
7	1			1	1
8					1
9			1		

(1)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5	1			1	1
6	1		1		1
7	1	1		1	
8	1				
9	1				

(2)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5		1		1	1
6		1	1	1	
7	1			1	1
8				1	
9		1			

(3)

	1	2	3	4	5
4	1	1	1		
5	1			1	1
6	1			1	1
7	1	1	1		
8	1				
9	1				

(4)

4	1	1	1		
5			1	1	1
6			1	1	1
7	1	1		1	
8				1	
9			1		

(5)

(3.3)

Lemma 2 H が (2.2) の形をして $D(H)$ で  部分が (3.3) の (5) をもつ アダマル行列とする。このとき H は  部分が (3.3) の (2) である $D(H')$ をもつ アダマル行列 H' と同値である。同様に (3.3) の (4) から得られる アダマル行列は (3.3) の (2) から得られる行列の転置行列と同値となる。

結局 Hall set をもつ 位数 28 の アダマル行列 H は $D(H)$ が (2.2) の形をしており,  部分が (3.3) の (1), (2), (3) のいずれかとなる。今 (3.3) の (1) の場合について 計算機を用いて 約 6000 (同値なもの) を

含むと思われ(る)個のアタマール行列を構成した。

次に位数 28 のアタマール行列 H に対して K -行列 $K^*(H) = (k_{ij})$ を対応させる。ここに $K^*(H)$ は 28×27 行列で k_{ij} は H の i 行と j 行を含む H の Hall set の個数と表わす。この K -行列は 2 つのアタマール行列の同値性の判定に有効と思われ(る) (K -行列が違えば同値でない)。しかし K -行列が同じでも同値でないアタマール行列が存在する (表 1)。この K -行列がどのような強さをもつかは今後の課題である。先におめた約 6000 個のアタマール行列を K -行列たより 476 個の K -同値なクラスに分類した。その一部を次下を示す。

表で 数 32511 は 2 進展開により

0000000000000111111011111111 となり、これに対応する アタマール行列の行は

(1 1 1 1 1 1 1 1-1 1 1 1 1 1 1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1)

である。又 $K(H)$ において

(2111111114) は Type

(.....111111114) が 2 個ある事を示し、 $\cdot$ は

0 と A, D はそれぞれ 10, 13 を表わす

Table of K-matrices of H-matrices in [8]

K(H)	H in [8]
2833333333333333	No.1
28111	No.2 and No.3
1411111111222223446	No.4
1411111112222233344	
141111112222233334	No.5
14111112222333455	
141111122222224	No.7
1411111122222244	
2811111111123	No.8
281111112222	No.9
28 111111111111111111111111D	No.10
14111111111122333	No.11
14111111111122237	
141111122222236	No.12
1411111122222333	
261111111111122235	[7]
2 111111111111111111111111D	Aut(H) =4·13

表 1

Table of H-matrices and K-matrices

1st row γ 27th row of H

K(H)				K(^T H)		
32511	2064767	132121023	149130767	252481081	158675509	179983411
40474593	28708817	243737829	221366499	215749323	81059109	93010723
104163083	222516569	212394837	190328135	106646165	30270611	87733389
141453737	177322393	184996743	64152169	107395155	61691981	
2		111111114				
6		11111111234				
6		1111111122234				
6		11111111122224				
6		111111111111111222A				
2	...	11111111111111111112224				

表 2

32511 2064767 132121023 149130767 252481081 187904565 215307315
 44406753 89329617 209240805 244720331 189601991 80624421 104422155
 55895815 163065187 243394901 220616013 86501539 46025877 93959309
 172713385 141867417 160093075 64149609 32334425 107656275

11111222222
 1111111112223
 2111111112222
 11111111222233
 11111111122224
 111111112222223
 111111112222244
 111111111222233
 111111111222235
 111111112222222
 1111111112222234
 1111111122222235
 11111111222223345
 11111111111122224
 11111111111122233
 11111111112222233
 1111111122222223
 1111111122222225
 11111111112222223
 111111111122223345
 11111111112222222
 1111111111222223344
 1111111111222222233
 11111111222222223
 11111111111122234
 1111111111112222255
 1111111111111222223

11111111122234
 21111222222233
 111111111112333
 11111111122223
 111111112222222
 111111112222234
 111111122222233
 111111112222223
 1111111122222334
 211111122222234
 1111111111222224
 2111111111222223
 1111111122222233
 1111111122222344
 11111111112222234
 11111111112222333
 111111111122222233
 111111111122222223
 111111111111222234
 1111111111112222334
 111111111122222333
 1111111111222223334
 11111111222222223
 111111111122222223
 1111111111112222233

32511 2064767 132121023 149130767 252481081 187904565 215307315
 44406753 89329617 213533417 175675603 221062343 24700707 78527251
 104422669 164182377 174482777 194267975 48114853 28698777 55530123
 235137443 160093589 206877581 90626149 113893973 127054923

1111222
 31111113
 31111122
 411111111
 3111111222
 31111111122
 3111111111222
 3111111111122
 11111111112223
 31111111112223
 11111111111113

3
 1111222
 61111111122
 311111111133
 311111112222
 3111111111123
 3111111111222
 3111111111122
 3111111111223

表 3

[注意] 表1~3 に示している $K(H)$ は $K^*(H)$ の各行について
 成分を小さい順に並びかえ 同一行の重複度をひいた
 成分を記入したものである。

References

- 1 M.Hall,Jr., Hadamard Matrices of order 16, J. P. L. Research Summary No.36-10,1(1961),21-26.
- 2 M.Hall,Jr., Hadamard Matrices of order 20, J. P. L. Technical Report No.32-761,1965.
- 3 M.Hall.Jr., Combinatorial Theory, Ginn (Blaisdell), Boston, 1967
- 4 N.Ito, J. S. Leon, and J. Q. Longyear, Classification of 3-(24,12,5) desgins and 24-dimensional Hadamard matrices, J. Combin. Theory Ser. A 31(1981),66-93.
- 5 H. Kimura, Hadamard matrices of order 28 with automorhpism gruops of order two, J. Combin. Theory Ser. A (to appear).
- 6 Z. Kiyasu, Hadamard matrix and its applications, Denshi-tsushin ⁱⁿ Gakkai (Japanese) 1980.
- 7 V. D. Tonchev, Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 13, J. Combin. Theory Ser. A, 35(1983),43-57.
- 8 V. D. Tonchev, Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 7, J. Combin. Theory Ser. A, 40(1985),62-81.