

線型微分方程式系の正則変形 (H. Lewy のある正則性定理
をめぐって)

京大 数解研

河合隆雄

最近 H. Lewy 氏が, 正則写像の境界挙動に関係してある興味
深い正則性の定理を証明され (to appear) 更に, 多変数の場合
への一般化を問題として提出された。本稿では, “正則なハロウ
-ター”を持つ微分方程式系の解の構造を調べる”という見地
から, 最も望ましい形で, Lewy 氏の問題に対して解答を与える。

まず次のような形の方程式を考えよう。(Lewy 氏自身の扱
われたのは, これとやや異なる物であるが, 氏自身の議論がこ
の場合にも適用されることは承知してみえた。(private communication))

$$(1) \quad A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

但し $u = u(x_1, x_2, x_3)$, $A_2, A_3 \in \mathbb{C}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, near 0

勿論 (1) は ^(定数係数であり) 特に $\frac{\partial}{\partial x_1}$ しい現象を起す方程式ではない。し

かし, もしここで A_2, A_3 を $z_1 = x_1 + iy_1$ の正則函数とし,
更に, 解 u も z_1 の正則函数 (に拡張できる), としてみ
よう。即ち, 微分方程式 (1) を正則に変形する時, 解も正則
に変形し得るかどうかを考えてみよう。

ここで Lewy 氏の提出された条件は次のものである:

$$(2) \quad A_2 \bar{A}_3 \neq \bar{A}_2 A_3$$

$$(3) \quad A_2, A_3 \in \mathbb{R}, \quad A_2 \frac{\partial A_3}{\partial z_1} \neq A_3 \frac{\partial A_2}{\partial z_1}$$

定理 1 (Lewy) (2) または (3) の条件の下に, (1) の (超函数) 解を正則に変形すれば, 解は必然的に実解析的である。

Lewy 氏自身の証明はかなり高級であるか。問題を次のように書き変えれば, そのふううりは明らかになる:

$$(4) \begin{cases} A_2(z_1) \frac{\partial u}{\partial z_2} + A_3(z_1) \frac{\partial u}{\partial z_3} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = 0 \end{cases}$$

の解の正則性や如何?

こうしてみれば, (2) は, 猜円性 の条件, (3) は (4) から Lewy-Mizohata 型になる為の条件 であることは見易い。ここに来れば, Lewy 氏が問題とされた 次の場合の条件を見出すことは容易である。

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial z_1} + b \frac{\partial u}{\partial z_2} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z_3} + a_4 \frac{\partial u}{\partial z_4} = 0$$

において b, a_3, a_4 は実数値実解析函数 とする。

今, もし, $(a_3, a_4) \parallel \left(\frac{\partial a_3}{\partial \bar{z}_1}, \frac{\partial a_4}{\partial \bar{z}_1} \right) \parallel \left(\frac{\partial a_3}{\partial \bar{z}_2}, \frac{\partial a_4}{\partial \bar{z}_2} \right)$

とはならないとする。この時, z_1, z_2 について正則な

(5) の解は必ず“実解析的”である。勿論, $a_3, a_4 \in \mathbb{C}$

として, $a_3 \bar{a}_4 \neq \bar{a}_3 a_4$ でも結論は同じである。

高階の場合にも同様の定理を一般的に得ることが出来るけれど、神妙怪が著しく、それをここには記さない。尚、高次のエホモロジ-群を考へることも面白い。実際、Zerner の 正則パラメーターを持つ基本解の存在の議論をこの立場から捉え得ることは以前に注意した。(1974年の数学会での講演)

詳細は、現在準備中の論文に譲りたい。

Acknowledgment: The speaker would like to thank Professor H. Lewy for showing his inspiring manuscript to the author before publication.

追記: 予稿集を準備した後判ったことを、二追記する。主題は“方程式系の変形の際、何か保たれるのか?”ということである。主要結果は次の通り:

定理: X を実解析的コンパクト多様体, $\mathcal{M}_0$ を X 上の楕円型方程式系とする。今 $\mathcal{M}_t$ と $\mathcal{M}_0$ も 佐藤の^(強い)意味で変形した ^{X 上の}方程式系とする。(“強い”という形容詞は、変形の方程式として、係数に特異点を持つ物を許さないことを意味する。) この時

$$\mathrm{Ext}^j(X; \mathcal{M}_t, \mathcal{B}) \simeq \mathrm{Ext}^j(X; \mathcal{M}_0, \mathcal{B})$$

がすべての j に対して成立する。

又、議論はまた十分でないか。non-compact の場合、たとえば、ポテンシャル散乱論での S -行列の極の位置、境界値問題に対する Green 函数の holonomic character (少なくとも二階の場合) 等が (最も modest に言て) 本質的には

(ほぼ) 同様の方法で扱えると思われる。尚、特に 上の定理は、^(その特殊な場合として)

佐藤の意味での変形か、常にスペクトルを保存していることを

意味しており、たとえば “isospectrum deformation の rigidity” という問題にも一つの視点を与えると言えよう。