

非弾性剛体系の一樣冷却状態での速度相関

九州大学理学院 中西 秀

九州大学理学院 御手洗 菜美子

希薄な非弾性粒子系は、強く励起された状態ではほとんどボルツマン気体のように振舞う。ボルツマン気体との違いは衝突のたびに運動エネルギーを失い徐々に冷却して行くところにある。粒子の空間分布が一樣なまま冷却して行く状態は、一樣冷却状態 (Homogeneous Cooling State, HCS) と呼ばれ、一見ボルツマン気体とは区別がつかないように思われる。しかし非弾性気体は時間がたつと、やがて粒子の一樣性が破れクラスター化が起こる。クラスターは成長し内部での密度は時間とともに大きくなる。理念的な剛体粒子系ではやがて有限時間内に無限回衝突が生じる、いわゆる非弾性コラプスが起こり、この単純なモデルは破綻する。

この講演では、クラスター化が起こる前の一樣に冷却している非弾性粒子系の状態がボルツマン気体とどのように異なるか、粒子の速度相関を見ることによって示したい。

これまでの非弾性衝突系の理論は van Noije, Ernst, Brito, Orza らによって、気体運動論や流体力学的方程式に基づき研究されてきたが、ここでは特に弾性極限に注目して大規模な数値シミュレーションを行い、彼らの結果と比較しつつ一樣冷却状態で何が起きているかを調べる。

流体力学的現象論

粒子の平均自由行程に比べて十分長い距離にわたって系が一樣であれば、流体力学的記述が可能である。粒子の回転が重要な寄与をしない場合には、粒子数密度 n 、速度 $\mathbf{u}$ 、温度 T は、通常の流体力学の方定式にエネルギーの散逸項を付け加えた式：

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{\Pi} \quad (2)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -\frac{2}{dn} (\nabla \cdot \mathbf{J} + \bar{\Pi} : \nabla \mathbf{u}) - \Gamma. \quad (3)$$

によって、非弾性気体は記述されるであろう。ここで、 d は空間次元、 ρ は質量密度、 $\bar{\Pi}$ は圧力テンソルで運動量輸送の部分を $\bar{\Pi}'$ として、

$$\Pi_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + \Pi'_{\alpha\beta}$$

で与えられる。第3式の最後の項 Γ がエネルギーの散逸を表し、衝突頻度を ω 、衝突当りのエネルギー損失割合を $2\gamma_0$ とすると、

$$\Gamma = 2\gamma_0\omega T$$

で与えられる。垂直反発係数 r のみで記述されるような単純な非弾性系の場合には、 $\gamma_0 = (1 - r^2)/(2d)$ となる。

系が空間的に一樣で平均流がゼロの場合には、自明でない式は

$$\partial_t T = -\Gamma$$

だけになり、 $\omega \propto \sqrt{T}$ とすると、温度の時間変化として

$$T = \frac{T_0}{(1 + \gamma_0 t/t_0)^2} = T_0 \exp[-2\gamma_0 \tau]; \quad \omega dt = d\tau$$

を得る。ただし、2番目の表式では、時間に対して各粒子の平均衝突回数で測った“衝突時間” τ を導入した。

クラスタリング不安定性

この一様冷却状態は不安定化して、非一様な状態になることが知られている。この不安定性を最も簡単に理解するには以下のように考えれば良い。

剛体ガスの密度揺らぎは音波による振動として現れる。その分散関係は、音速を c として

$$\omega = ck$$

で与えられるが、音速 c は理想ガスの近似を用いると

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S} \sim \sqrt{\frac{T}{m}} \equiv u_0(T)$$

となる。ただし、ここで“熱速度” $u_0(T)$ を定義した。すなわち、空間スケール R の音波による密度揺らぎの時間スケール t_{sw} は、

$$t_{sw} \sim \frac{R}{u_0}$$

で与えられる。

一方、非弾性衝突による減衰の時間スケールは、

$$t_{iel} \sim \frac{1}{\gamma_0 \omega}$$

となり、これは一様で空間スケールによらない。

両者を比較すると、

$$R > \frac{u_0}{\gamma_0 \omega} \sim \frac{\ell_0}{\gamma_0} \equiv \xi_{cl}$$

では非弾性衝突の減衰が優勢になり、密度揺らぎが復元せずクラスタリングが起こることがわかる。ここで平均自由距離 $\ell_0 \equiv u_0/\omega$ を定義すると、空間スケールで密度揺らぎが不安定化する空間スケールとしてクラスタリング長 $\xi \equiv \ell_0/\gamma_0$ が定義される。

シアリング不安定性

非弾性衝突系には、上で見たクラスタリング不安定性とは別の不安定性もあることが、以下のようにして分かる。

希薄な気体中の粒子の自己拡散係数 D は、一ステップが平均自由行程程度のランダムウォークと考えると

$$D \sim \ell_0^2 \omega$$

と見積もられる。ここで、 ω は既に導入した衝突頻度である。故に、粒子が距離 R 程度の距離を拡散するのに必要な時間 t_{diff} は

$$t_{diff} \sim \frac{R^2}{D}$$

となる。これと非弾性衝突による減衰時間 t_{iel} と比較すると、

$$R > \frac{\ell_0}{\sqrt{\gamma_0}} \equiv \xi_{sh}$$

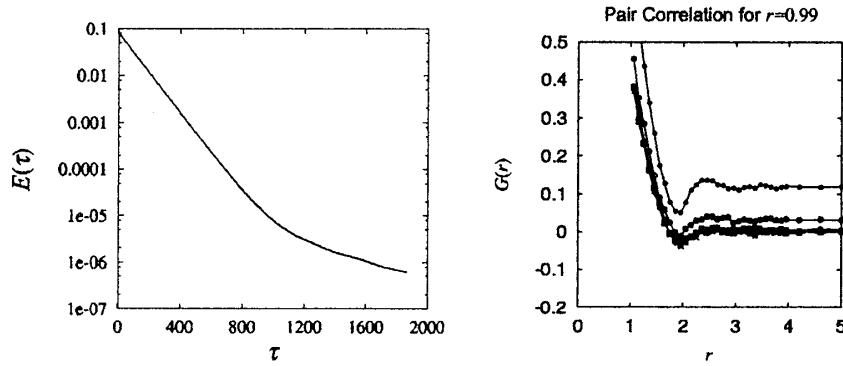


図 1: 左の図は、系の全運動エネルギーの時間減衰。右の図は、系の構造因子 $G(r)$. $r = 0.99$ で、右の図は $\tau=160\sim1120$ のもので、最後の $\tau = 1120$ のものだけが大きく平衡状態の構造因子からずれている。

で $t_{\text{iel}} < t_{\text{diff}}$ となり、非弾性衝突による減衰が優勢になることが分かる。このような空間スケールでは、考えている領域内の全粒子の運動量が粒子の拡散による運動量の交換よりも速く減衰してしまう。その為、 ξ_{sh} より大きなスケールでは時間の経過とともに領域ごとの速度の空間揺らぎが顕在化してくる。領域ごとの速度の方向は無秩序なため、これは巨視的なずり流として現れる。このような不安定性をシアリング不安定性、或いはノイズ逡滅不安定性と呼ぶ。

非弾性衝突系にはこの二つの不安定性が内在するが、関連する二つの長さのスケール (ξ_{cl} と ξ_{sh}) の反発係数への依存性が異なるため、反発係数 r が 1 の極限 (弾性極限) では、

$$\xi_{\text{cl}} \gg \xi_{\text{sh}}$$

となり、また関連する時間スケールもシアリング不安定性のほうはずっと短くなる。その為、クラスタリング不安定性が生じるずっと以前で系が一様状態であっても、系に何らかの構造が現れるうことが分かる。

シミュレーション

一様冷却状態でのこのような不安定性を見るために、最も簡単なモデルを用い数値シミュレーションを行った。用いた系は、回転の自由度を無視した 2 次元剛体球系で、垂直方向の反発係数 r でのみで非弾性衝突は記述されるとする。 $r \geq 0.9$ の弾性極限に注目し、特に $r = 0.99$ の場合を中心に調べた。

系の大きさは、粒子数 $N = 250000$ で一辺の長さ $L = 1000$ 、すなわち数密度 $n = 1/4$ とした。実際の計算は、磯部のアルゴリズムによる Event-Driven 法を用いた。

運動エネルギーの減衰を衝突時間 τ の関数として見ると、確かに初期の減衰は指数関数的になっており、 $r = 0.99$ では $\tau \leq 800$ ぐらいまでは一様冷却状態と見なして良いことが分かる。このことは、実際の粒子分布のスナップショットや構造因子を見ても確かめられる。

粒子の速度分布関数も、 $\tau = 800$ では Maxwell-Boltzmann 分布からのずれは数値誤差の範囲以内にとどまっている。

ところが、速度相関関数

$$G_{\alpha\beta}(r, \tau) \equiv \frac{\langle v_{\alpha}(\mathbf{r}, \tau) v_{\beta}(0, \tau) \rangle}{\langle v^2 \rangle / d} = G_{\perp}(r, \tau)(\delta_{\alpha\beta} - \hat{r}_{\alpha}\hat{r}_{\beta}) + G_{\parallel}(r, \tau)\hat{r}_{\alpha}\hat{r}_{\beta}$$

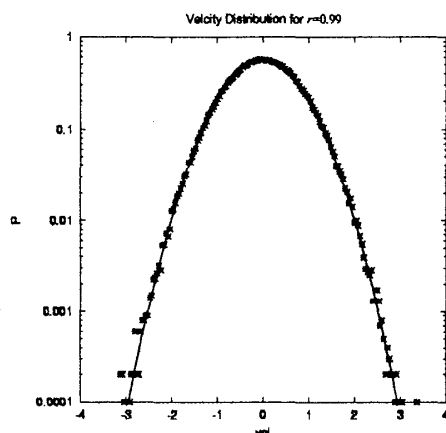


図 2: 速度分布関数. $r = 0.99$ および $\tau = 800$. 実線は Maxwell-Boltzmann 分布.

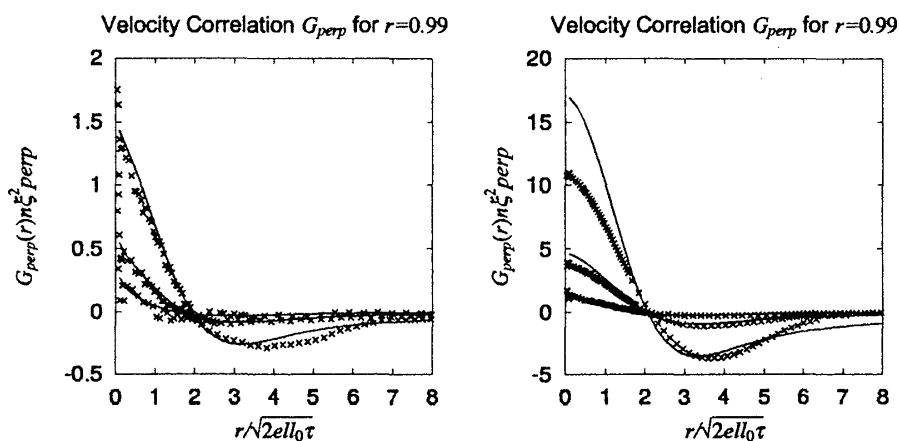


図 3: 速度相関関数 $G_{\perp}(r, \tau)$. 実線は van Noije と Ernst による理論式. $r = 0.99$ で $\tau = 160, 320, 480$ (左の図) 及び $480, 640, 800$ (右の図).

は、平衡状態での値ゼロから大きくずれていることが観測される。

このずれ方は、 $\tau \leq 480$ 程度までは、van Noije と Ernst('00) による、流体力学的 Langevin 方程式に基づく線形解析の結果に良く合わせる事ができるが、 $\tau \geq 480$ ぐらいから線形解析からはずれてくることが分かる。この $\tau \sim 480$ の時間領域は、エネルギー減衰や粒子の空間分布からは、まだ十分一様冷却状態の中にある。

まとめ

単純な非弾性衝突気体の一様冷却状態を、弾性衝突に非常に近いところで数値シミュレーションにより調べた。その領域では、クラスター不安定性が起こるずっと前に、速度のずれに対する不安定性が起こり、系が一様な一様冷却状態の中でも強い速度相関が現れる。反発係数 $r = 0.99$ の系を詳しく調べることによって、初期の速度相関は Langevin 方程式の線形解析によって良く記述されるが、やがて非線型領域に入り、線形理論で予想される以上に速度相関関数が大きくなることが分かった。弾性極限では、この非線型領域はクラスタリングが始まるずっと前に起こる。