

相対可換子代数と Paschke 予想について

高井博司 (都立大理)

§0. 序論

前稿で述べたように $\mathcal{O}(\mathcal{G})^\alpha$ は $C^*(\mathcal{O}(\mathcal{G}); \alpha)$ の遺伝的な C^* 部分代数になるが $\mathcal{O}(\mathcal{G})^\alpha$ と可換な $C^*(\mathcal{O}(\mathcal{G}); \alpha)$ の要素全体 $(\mathcal{O}(\mathcal{G})^\alpha)' \cap C^*(\mathcal{O}(\mathcal{G}); \alpha)$ は未だ解析されていないが、 $(\mathcal{O}(\mathcal{G})^\alpha)' \cap \mathcal{O}(\mathcal{G})$ は容易にスカラー全体 $\mathbb{C}$ になることが云える。Olesen-Pedersen-Størmer は、素な C^* 代数 $\mathcal{O}$ と G が T^1 または $\mathbb{Z}/p$ のとき、 $P(\alpha) = Sp(\alpha)$ ならば $(\mathcal{O}^\alpha)' \cap M(\mathcal{O}) = \mathbb{C}$ を示した。ただし $M(\mathcal{O})$ は $\mathcal{O}$ の乗法代数である。

我々は先ず一般の C^* 代数 $\mathcal{O}$ と $G = T^1$ または $\mathbb{Z}/p$ のとき $(\mathcal{O}^\alpha)' \cap \mathcal{O} \equiv \mathcal{B}$ が可換になることを示し、 G が有限可換群 H のとき $\mathcal{B}$ は (CCR) となり、 $G = T^1 \times H$ のとき $\mathcal{B}$ は (GCCR) になることを示す。しかし $G = T^2$ のとき $\mathcal{B}$ が (NGCCR) になる C^* 力学系 $(\mathcal{O}, T^2, \alpha)$ が存在することを云う。次にこの結果を使えば Paschke の結果、つまり I 型ファクター (I) の $\mathbb{Z}$ また T^1 による接合積 $\mathbb{Z} \otimes (I)$, $T^1 \otimes (I)$ は I 型 W^* 代数になることが容易に分かる。更に任意のコンパクト可換群 G による (I) の接合積 $G \otimes (I)$ は I 型 W^* 代数になることが分かるが $\mathbb{Z}^2 \otimes (I)$ は一般には I 型にはならない。最後に任意の

無限コンパクト可換群 G に対して $G \otimes \mathbb{H}_1$ が I 型ファクターになる $\mathbb{H}_1$ 型ファクター ($\mathbb{H}_1$) が存在することを注意する。

§1. 相対可換子代数

$(\mathcal{A}, G, \alpha)$ を C^* 力学系とし $\mathcal{A}$ が単位元を持つ C^* 代数とする。

$\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ の $\mathcal{A}$ に於ける可換子代数を $\mathcal{B}$ で表わすと $\alpha_g(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ ($g \in G$) より $\beta_g = \alpha_g|_{\mathcal{B}}$ とすると $(\mathcal{B}, G, \beta)$ は C^* 力学系になる。

$\mathcal{B}^{\beta} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ は容易に示せるので $\omega \in \sigma(\mathcal{B}^{\beta})$ (i.e. $\mathcal{B}^{\beta}$ のスペクトル) に対して $\omega^{-1}(0)$ で生成された $\mathcal{B}$ の閉イデアルを J_{ω} で表わすと

$\bigcap_{\omega \in \sigma(\mathcal{B}^{\beta})} J_{\omega} = (0)$ が示せるので $\mathcal{B}_{\omega} = \mathcal{B}/J_{\omega}$ ($\omega \in \sigma(\mathcal{B}^{\beta})$) とおくと $\mathcal{B} \simeq \bigoplus_{\omega} \mathcal{B}_{\omega}$ が成り立つ。今 $G = \mathbb{T}$ 又は $\mathbb{Z}/(p)$ とすると、

$\beta_g^{\omega}(x + J_{\omega}) = \beta_g(x) + J_{\omega}$ ($g \in G$) によって C^* 力学系 $(\mathcal{B}_{\omega}, G, \beta^{\omega})$ を作ると β^{ω} は $\mathcal{B}_{\omega}$ 上エルゴード的になるから $Sp(\beta^{\omega}) = \mathbb{T}(\beta^{\omega})$ となる。だから $Sp(\beta^{\omega}) = \gamma_0 \hat{G}$ ($\gamma_0 \in \hat{G}$) となる。そこで $\mathcal{B}_{\omega}^{\beta^{\omega}}(\{\gamma_0\})$ に入るユニタリ要素 μ をとると $\mathcal{B}_{\omega}^{\beta^{\omega}} = \mathbb{C}$ より $\mathcal{B}_{\omega} = C^*(\mu)$ を得る。つまり $\mathcal{B}_{\omega}$ は可換になる。だから $\mathcal{B}$ は可換である。よって次の結果を得る。

命題 1. $G = \mathbb{T}$ 又は $\mathbb{Z}/(p)$ のとき、 $(\mathcal{A}^{\mathcal{A}})' \cap \mathcal{A}$ は可換 C^* 代数である。

G が有限可換群 H のとき、 $\dim \mathcal{B}_{\omega} = |Sp(\beta^{\omega})|$ となるから $\mathcal{B}_{\omega}$ は有限次元 C^* 代数である。任意の $\text{Prim } \mathcal{B}$ の元 $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p} \supset J_{\omega}$ なる J_{ω} が存在するので $\mathcal{B}/\mathfrak{p} \simeq \mathcal{B}_{\omega}/\mathfrak{p}/J_{\omega}$ より、 $\mathcal{B}/\mathfrak{p}$

が有限次元になる。よって次の結果を得る。

命題 2. G が有限可換群 H のとき、 $(\mathcal{O}^{\mathcal{A}})' \cap \mathcal{O}$ は (CCR) である。

更に $G = T^1 \times H$ とすると $H = H^1 \cap Sp(\beta^w)$ とおくと H は無限群としてよい。 $\gamma \in Sp(\beta^w)$ に対してユニタリ要素 u_γ をとると $(u_\gamma)_{\gamma \in H}$ は可換になる。 $|H| = m$ とおくと $u_\gamma^m u_\delta = u_\delta u_\gamma^m$ ($\gamma \in Sp(\beta^w)$, $\delta \in H$) が成り立つ。 β^w はエルゴード的であるから $u_\gamma u_\delta = \lambda u_\delta u_\gamma$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する。よって $\lambda^m = 1$ となり $u_\gamma u_\delta^m = u_\delta^m u_\gamma$ を得る。 $\gamma \in Sp(\beta^w)$ は任意より $(u_\delta^m)_{\delta \in H}$ は $\mathcal{B}_w$ の中心に入る。 $H_1 = \{\delta^m : \delta \in H\}$ とおくと H_1^1 は G の有限部分群となる。 $\gamma^w = \beta^w|_{H_1}$ とおくと $\mathcal{B}_w^{\gamma^w} \subset \mathcal{B}_w \cap \mathcal{B}_w'$ より、

$\mathcal{B}_w \cap [(\mathcal{B}_w)^{\gamma^w}]' = \mathcal{B}_w$ となる。 H_1 は有限群より命題 2 より $\mathcal{B}_w$ は (CCR) になる。よって次の結果を得る。

命題 3. $G = T^1 \times H$ のとき $(\mathcal{O}^{\mathcal{A}})' \cap \mathcal{O}$ は (GCCR) である。

いかし $G = T^2$ の場合には $(\mathcal{O}^{\mathcal{A}})' \cap \mathcal{O}$ が (NGCCR) となる C^* カルデラス系 $(\mathcal{O}, G, \alpha)$ が存在する。実際、可算無限次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{R} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ とし、 $(e_{k,l})_{k,l \in \mathbb{Z}}$ を $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ の単位マトリックス系とする。そのとき $u_1 = \sum_k e_{k,k+1} \otimes 1$, $u_2 = \sum_k 1 \otimes e_{k,k+1}$ とし $W(t_1, t_2) = \sum_{k_1, k_2} e^{i(k_1 t_1 + k_2 t_2)} e_{k_1, k_1} \otimes e_{k_2, k_2}$ ($(t_1, t_2) \in T^2$) とおくとそれぞれ $\mathcal{R}$ 上のユニタリ作用素になる。 $v_1 = W(0, \delta) u_1$, $v_2 = u_2$ とおく。ただし $\delta/2\pi$ は無理数とする。 $\mathcal{O} = C^*(v_1, v_2)$,

$\alpha_t = \text{Ad}(W(t_1, t_2)) \quad (t = (t_1, t_2) \in T^2)$ とおくと $(\mathcal{O}, T^2, \alpha)$ は C^* -カテゴリー系になり $\mathcal{O}''$ は II_1 -型ファクターで $\text{Ad}(W)$ は $\mathcal{O}''$ 上でエルゴード的になる。更に $\Gamma(\alpha) = \text{Sp}(\alpha) = \mathbb{Z}^2$ となるから $T^2 \otimes_\alpha \mathcal{O}''$ は I_∞ -型ファクターになる。よって次結果を得る。

命題 4. $G = T^2$ のとき $(\mathcal{O}^\alpha)' \cap \mathcal{O}$ は $(N \cap CR)$ になる C^* -カテゴリー系 $(\mathcal{O}, T^2, \alpha)$ が存在する。

これらの結果を使うと Paschke の結果が容易に導き出せる。何故なら $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))^{\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)}$ より $\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(G)) : \| \alpha_g \otimes \text{Ad}(\lambda_g)(x) - x \| \xrightarrow{g \rightarrow e} 0 \}$ とおくと $G = T', H, T' \times H$ に対して $(\mathcal{O}^{\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)})' \cap \mathcal{O}$ は (GCR) より $[\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(G))^{\alpha \otimes \text{Ad}(\lambda)}]'$ は I 型 W^* -代数となる。よって $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は I 型 W^* -代数である。しかしながら $G = T^2$ に対しては上記の方法は使えないが次の Paschke による予想は正しい。

命題 5. G がコンパクト可換群のとき、 $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は I 型 W^* -代数である。

実際 $\tau_\alpha \circ \alpha_g = \tau_\alpha$ (ただし τ_α は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ の自然なトレースである) より τ_α の双対重み $\hat{\tau}_\alpha$ は $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ のトレースになる。だから $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は半有限になる。 $\hat{\tau}_\alpha$ は $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ の中心上でエルゴード的になるので $G \otimes_\alpha \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は I 型又は II 型になる。もし II 型とすると I 型から II 型の正規期待値が存在することになり矛盾を得る。

一方離散群に対しては一般に命題 5 の結論は正しくない。

例えば 命題4で得た C^* -力学系に対して $T^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}''$ は I_0 型ファクターで $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} (T^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}'')$ は I_0 型ファクターとなるので $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{H})$ は II 型になる作用 θ が存在する。

命題6. $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が II 型ファクターになる作用 θ が存在する。更に θ は可積分作用に選べる。

G を可分なコンパクト可換群とすると可換 W^* 代数 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{M} : \| \alpha_g(x) - x \|_{\infty} \rightarrow 0\}$ は $\mathcal{M}$ の α -不変 C^* 部分代数で $\mathcal{A}'' = \mathcal{M}$ となる。よって $(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A})'' = G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$ となる。今 $\mathcal{A} = C(\Gamma)$ と表現しておくとして $\Gamma = \bigcup_i G_i$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とできるので、 $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A} = \bigoplus_i G \otimes_{\mathbb{Z}} C(G_i)$ となる。 $\xi \in G_i$ に対して $\xi_i \in \mathbb{Z}^2(G_i; \Gamma)$ をとる。ただし $G_i = G_i$ は G の安定群とする。 G_i の ξ_i -表現 π は $G_i \times_{\Gamma} \Gamma$ の表現に一对一に対応するが $G_i \times_{\Gamma} \Gamma$ は作り方よりコンパクトになるから π は I 型の表現になる。よって、 $G \otimes_{\mathbb{Z}} C(G_i)$ は (GCR) となるので $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$ は I 型 W^* 代数である。

命題7. G を可分なコンパクト可換群とし、 $\mathcal{M}$ を可換 W^* 代数とすると $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$ は I 型 W^* 代数である。

最後に II 型の接合積が I 型になる場合を述べる。今 G を無限コンパクト可換群とすると、 $\mathcal{M} = \hat{G} \otimes_{\Gamma} L^{\infty}((\hat{G})^{\Gamma}; du)$ とおけば II 型ファクターになる。ただし $(\hat{G})^{\Gamma}$ は $\hat{G}$ の Bohr コンパクト化で du は $(\hat{G})^{\Gamma}$ 上の Haar 測度である。よって $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}$ は I 型 W^* 代数になるので

命題 8. G を無限コンパクト可換群としたとき $G \otimes_m \mathcal{M}$ が I 型 W^* 代数になる様な $\mathbb{H}$ 型ファクター $\mathcal{M}$ 上の作用 α が存在する.

注意として上の命題に於いて $G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2$ (Cantor 群) のとき、 $\mathcal{M}$ は超有限 $\mathbb{H}$ 型ファクターに選べる.

参考文献

- [1] A. Ikunishi and H. Takai : On crossed products with abelian group actions, Preprint (1977).
- [2] A. Kishimoto and H. Takai : Some remarks on C^* -dynamical systems with a compact abelian group, Preprint (1977).