

A construction of twisted modules of code VOAs

宮本 雅彦 (Masahiko Miyamoto)

筑波大学数学系

Institute of Mathematics, University of Tsukuba,

佐久間伸也 (Shinya Sakuma)

筑波大学数学研究科

Doctoral Program in Mathematics, University of Tsukuba

1 序文

今回の話では、ある code D から構成される code VOA M_D と D の自己同型から誘導される M_D の自己同型に対するツイスト加群を構成する。

VOA の出発点は、26 個の散在型有限単純群のうち位数最大である Monster 単純群 $\mathbb{M}$ と modular 関数に関する Moonshine 予想である。即ち、ある無限次元の次数付き Monster 加群 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ があって、各 $g \in \mathbb{M}$ と種数 0 の $SL(2, \mathbb{R})$ のある離散部分群 Γ_g に対して、Thompson 級数

$$T(g, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}(g|V_n) q^{n-1}$$

が Γ_g -不変、即ち $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g$ に対して $T(g, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = T(g, \tau)$ であり、 $g = 1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dim V_n) q^{n-1} = j(\tau) - 744 = q^{-1} + 196884q + \dots, q = e^{2\pi i \tau}$$

が成り立つことが McKay と Thompson により初めに予想された。ここで、 $j(\tau)$ は古典的楕円 modular 関数である。この予想を解決するために、Frenkel, Lepowsky, Meurman により Moonshine 加群 $V^{\sharp} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^{\sharp}$ が構成され、これと Borchers の考えた頂点代数の概念 ([B]) を合わせて、Moonshine 頂点作用素代数 (VOA) $V^{\sharp}$ が構成された。([FLM]) さらに、 $V^{\sharp}$ の全自己同型群は Monster 単純群になることが知られている。

$(V, Y, 1, \omega)$ を rank c の VOA、 g, h を $g^T = h^T = 1, T \in \mathbb{Z}$, である可換な V の自己同型とする。 h -不変な既約 g -ツイスト V -加群 $W = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{\lambda + \frac{n}{T}}, \lambda \in \mathbb{C}$, に対して、 h は W のある線形変換 $\phi(h)$ を与える。この時、

$$\begin{aligned} T_W(h, \tau) &= \text{Tr}_W \phi(h) q^{L(0) - \frac{c}{24}} \\ &= q^{\lambda - \frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}(\phi(h)|_{W_{\lambda + \frac{n}{T}}}) q^{\frac{n}{T}} \end{aligned}$$

とする。 $V = V^1 (= W)$ 、 $g = 1$ のとき、これは上の Thompson 級数になる。

VOA と modular 不変性に関して、Zhu はある有限性の条件 C_2 を満たす有理型 VOA が modular 不変性をもつことを示した。([Z]) さらに、Dong、Li、Mason がこれを拡張して、次のようなことが示された。([DLM])

定理 1. [DLM] $C(g, h, \tau) = \langle T_W(h, \tau) | W : h\text{-不変な既約 } g\text{-ツイスト } V\text{-加群} \rangle$ とする。この時、 $(V, Y, 1, \omega)$ が条件 C_2 を満たす有理型 VOA のとき、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、

$$C\left(g, h, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = C(g^a h^b, g^c h^d, \tau)$$

が成り立つ。特に、 $g = 1$ 、 $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合、

$$C\left(1, h, -\frac{1}{\tau}\right) = C(h, 1, \tau)$$

となる。

一方、Moonshine VOA $V^\sharp$ が、holomorphic、即ち既約加群が自分自身だけである事より、次のことも示された。

定理 2. [DLM] 各 $h \in \text{Aut}(V^\sharp)$ に対して、既約 h -ツイスト $V^\sharp$ -加群も唯一つ存在する。(これを $V^\sharp(h)$ であらわすことにする。)

$V^\sharp$ は条件 C_2 を満たすので、以上の事より、各 $h \in \mathbb{M} = \text{Aut}(V^\sharp)$ に対して、

$$T\left(h, -\frac{1}{\tau}\right) = \alpha T_{V^\sharp(h)}(1, \tau), \alpha \in \mathbb{C}$$

と書ける。この事から、変換 $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ が h -ツイスト加群を通して見ることが出来る。ところが、上の結果ではツイスト加群の存在は示されているが、構成の方は実際位数 2 の (2 つの) 共役類に対してしかされていない。他の元に対するツイスト加群を構成するというのが、今回の話の出発点であり、最終的な目標である。

ツイスト加群を構成するために、今回は V^h が Framed VOA であることに注目する。VOA V が互いに直交する中心電荷 $\frac{1}{2}$ の共形元 $e^1, \dots, e^n$ でその和が V の Virasoro 元に一致するものをもつとき、 V は Framed VOA と呼ばれる。([DGH]) この時、 V は Ising 模型 $L(\frac{1}{2}, 0)$ の n 個のテンソル積 $L(\frac{1}{2}, 0)^{\otimes n}$ を部分 VOA として含む。Dong, Mason, Zhu は、 V^h がそのような 48 個の共形元をもつことを示した。([DMZ]) $L(\frac{1}{2}, 0)$ は 3 つの既約加群 $L(\frac{1}{2}, k)$, $k = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$, をもち、Framed VOA V を $L(\frac{1}{2}, 0)^{\otimes n}$ の加群と見れば、 V は、 $L(\frac{1}{2}, 0)^{\otimes n}$ の既約加群 $L(k_1, \dots, k_n) = L(\frac{1}{2}, k_1) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, k_n)$, $k_i = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$, の直和

$$V = \bigoplus_{k_i=0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}} a_{k_1, \dots, k_n} L(k_1, \dots, k_n)$$

に分解する。ここで、 $a_{k_1, \dots, k_n}$ は重複度を表す。一般に Framed VOA は複雑であり、その加群を分類するのは困難である。そこで $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ がない部分、即ち

$$V^0 = \bigoplus_{k_i=0, \frac{1}{2}} a_{k_1, \dots, k_n} L(k_1, \dots, k_n)$$

を考える。この時、 V^0 は V の部分 VOA であり、 V が単純 VOA であれば、 $a_{k_1, \dots, k_n} = 0$ or 1 であり、 $D = \{(2k_1, \dots, 2k_n) | a_{k_1, \dots, k_n} = 1\} \subset \mathbb{Z}_2^n$ は (binary) code となる。さらに、 V^0 は code VOA M_D と呼ばれる VOA になる。([M1, M2]) Framed VOA V の (ツイスト) 加群は code VOA $V^0 = M_D$ の (ツイスト) 加群として見る事ができるので、code VOA の (ツイスト) 加群を調べる必要がある。対称群 S_n の元 g が座標の置換による作用で D を不変にする時、 g は $\tilde{g}(e^i) = e^{g(i)}$ である M_D の自己同型 $\tilde{g}$ を誘導する。([M1]) 記号を簡単にするためこれも g で表す。

V を VOA とする。 V の k 個のテンソル積 (VOA) $V^{\otimes k}$ とその自己同型 $g = (1\ 2\ \dots\ k)$ を考える。Barron, Dong, Mason は、 V -加群 (W, Y_W) が与えられたとき、空間 W 上に Y_W から $V^{\otimes k}$ のある g -ツイスト加群の構造 (W, Y_g) を構成した。([BDM]) 今回の結果は、これを SVOA V の場合に拡張し、code VOA $M_D \subset (L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))^{\otimes k}$ に応用したものである。また、framed VOA (特に Moonshine VOA) の場合にも、置換から誘導される自己同型 g に対する g -ツイスト加群を構成するのが、これからの課題である。

2 code VOA

この節では、(binary) code VOA を構成する。初めに SVOA を定義する。

定義 1. $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ -次数付きベクトル空間 $V = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n = V_0 \oplus V_1$ と線形写像

$$\begin{aligned} Y(\cdot, z) : V &\rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \text{End } V). \end{aligned}$$

と V の元 $1, \omega$ について、次が成り立つ時、 $(V, Y, 1, \omega)$ は頂点作用素超代数 (SVOA) であるという。ただし、 $V_{\bar{s}} = \bigoplus_{n \in \frac{s}{2} + \mathbb{Z}} V_n$ であり、 $u \in V_{\bar{s}}$ のとき $s = \bar{u}$ とする。:

(V1) $\dim V_n < \infty$ かつ、十分小さい n に対して $V_n = 0$ となる。

(V2) 任意の $u, v \in V$ に対し、十分大きな n で $u_n v = 0$ となる。

(V3) $Y(1, z) = Id_V$

(V4) 任意の $v \in V$ に対して、 $Y(v, z)1 \in (\text{End } V)[[z]]$ かつ $\lim_{z \rightarrow 0} Y(v, z)1 = v$

(V5) $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n, 0} c$$

となる。ここで、 $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n) z^{-n-2}$ 、 $c = \text{rank } V \in \mathbb{C}$ である。

(V6) 任意の $v \in V$ に対して、 $Y(L(-1)v, z) = \frac{d}{dz} Y(v, z)$

(V7) $L(0)|_{V_n} = n Id_{V_n}$

(V8) $\mathbb{Z}_2$ -homogeneous な $u, v \in V$ に対して、次の Jacobi 律が成り立つ。

$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) \\ - (-1)^{\bar{u}\bar{v}} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) \\ = z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(u, z_0)v, z_2) \quad (1) \end{aligned}$$

$V_1 = 0$ のときには $V = V_0$ は VOA である。

SVOA V は超局所可換性を満たす。: $\mathbb{Z}_2$ -homogeneous な $u, v \in V$ に対して、ある正整数 N があって、

$$(z - w)^N Y(u, z) Y(v, w) = (-1)^{\bar{u}\bar{v}} (z - w)^N Y(v, w) Y(u, z)$$

が成り立つ。

次に (binary) code VOA を構成する。 k は正整数とする。 $(V = V_0 \oplus V_1, Y, 1, \omega)$ を SVOA とする。 V の k 個のテンソル積 $F = V^{\otimes k}$ を考え、 $\otimes_{i=1}^k v_i \in F$ ($v_i \in V$) に対して、頂点作用素 $Y(\otimes_{i=1}^k v_i, z) = \otimes_{i=1}^k Y(v_i, z)$ を定義し、 F 全体に線形に拡張する。codeword $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_2^k$ に対して、 $V_\alpha = V_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes V_{\alpha_k}$ とすれば、 $F = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2^k} V_\alpha$ である。 V の超局所可換性から、 $u \in V_\alpha, v \in V_\beta$ に対して、

$$(z - x)^N Y(u, z) Y(v, x) = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} (z - x)^N Y(v, x) Y(u, z) \quad (2)$$

$D \subset \mathbb{Z}_2^k$ を (線形)code とする。上の $(-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ を消すために、 D の内積による $\langle \pm 1 \rangle$ での中心拡大した群 $\hat{D} = \{\pm e^\alpha | \alpha \in D\}$ を考える。ここでは、 $\nu_j = (0^{j-1} 1 0^{k-j})$, $j = 1, \dots, k$ に対し e^{ν_j} を $e^{\nu_j} e^{\nu_j} = 1, e^{\nu_i} e^{\nu_j} = -e^{\nu_j} e^{\nu_i} (i \neq j)$ となる形式的な元とし、 $\alpha = \nu_{j_1} + \dots + \nu_{j_p}, j_1 < \dots < j_p$ に対して $e^\alpha = e^{\nu_{j_1}} e^{\nu_{j_2}} \dots e^{\nu_{j_p}}$ と定義する。このとき、 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^k$ に対して

$$e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle + |\alpha||\beta|} e^\beta e^\alpha$$

が成り立つ。([M2]) このとき、fock 空間を

$$V_D = \oplus_{\alpha \in D} (V_\alpha \otimes e^\alpha)$$

と定義し、頂点作用素を $v \in V_\alpha$ に対して

$$Y(v \otimes e^\alpha, z) = Y(v, z) \otimes e^\alpha$$

と定義すると、超局所可換が成り立つことが分かる。真空は $\hat{1} = (\otimes_{i=1}^k 1) \otimes e^0 \in V_{(0^k)}$ であり、

$$e^i = (\otimes_{j=1}^{i-1} 1) \otimes \omega \otimes (\otimes_{j=i+1}^k 1) \otimes e^0$$

とおくと、 e^i は共形元であり、 $\hat{\omega} = e^1 + \dots + e^k$ は V_D の Virasoro 元になる。即ち、次が成り立つ。

定理 3. [M2] (1) D が偶 code のとき、 $(V_D, Y, \hat{1}, \hat{\omega})$ は VOA である。

(2) $(V_{\mathbb{Z}_2^k}, Y, \hat{1}, \hat{\omega})$ は SVOA である。

3 ツイスト加群の構成

この節では、[BDM] の結果を拡張して、code VOA のツイスト加群を構成する。初めにツイスト加群の定義を与える。

定義 2. $(V, Y, 1, \omega)$ は SVOA とし、 g は位数 k の V の自己同型とする。ベクトル空間 W と線形写像

$$\begin{aligned} Y^W(\cdot, z) : V &\rightarrow (\text{End } W)[[z^{\frac{1}{k}}, z^{-\frac{1}{k}}]] \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1} \quad (v_n \in \text{End } W) \end{aligned}$$

が次を満たす時、 (W, Y^W) は g -ツイスト V -加群であるという。

(W1) $W = \oplus_{\lambda \in \mathbb{C}} W_\lambda$ となる。ただし、 $W_\lambda = \{w \in W | L^W(0)w = \lambda w\}$ 、 $Y^W(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L^W(n)z^{-n-2}$, である。

(W2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $IV_\lambda < \infty$ かつ十分小さい $n \in \frac{1}{2k}\mathbb{Z}$ に対し $IV_{\lambda+n} = 0$ となる。

(W3) 任意の $u \in V$ と $w \in W$ に対して、十分大きな n で $u_n w = 0$ となる。

(W4) $Y^W(1, z) = Id_W$.

(W5) $u \in V^r = \{v \in V | gv = e^{-\frac{2\pi i r}{k}} v\}$ のとき、 $Y^W(u, z) = \sum_{n \in \frac{r}{k} + \mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$ となる。

(W6) $\mathbf{Z}_2$ -homogeneous な $u \in V^r$ と $v \in V$ に対して、次のツイスト Jacobi 律が成り立つ。

$$\begin{aligned} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y^W(u, z_1) Y^W(v, z_2) \\ - (-1)^{\bar{u}\bar{v}} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_2 - z_1}{-z_0} \right) Y^W(v, z_2) Y^W(u, z_1) \\ = z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right)^{-\frac{r}{k}} Y^W(Y(u, z_0)v, z_2). \quad (3) \end{aligned}$$

Y^W についても超局所可換性が成り立つ。: $\mathbf{Z}_2$ -homogeneous な $u, v \in V$ に対して、ある正整数 N があって、

$$(z-x)^N Y^W(u, z) Y^W(v, x) = (-1)^{\bar{u}\bar{v}} (z-x)^N Y^W(v, x) Y^W(u, z)$$

が成り立つ。

$(V, Y, 1, \omega)$ は SVOA とし、 k は正整数とする。 $\sigma = e^{2\pi i L(0)}$ とすると、 σ は、 V_0 上で 1、 V_1 上で -1 として作用し、 V の位数 2 の自己同型になる。 (W, Y^W) を σ^l -ツイスト V -加群 ($l=0,1$) とし、 $g = (12 \cdots k)$ とする。 W 上に $\sigma_1^{l+k-1} \bar{g}$ -ツイスト $V_{\mathbf{Z}_2^k}$ -加群構造 (W, Y_g) を定義していく。ここで、 σ_1 はテンソル積の第 1 成分だけ σ が作用する自己同型 $(\sigma, 1, \dots, 1)$ であり、 $\bar{g}$ は座標の置換により g から誘導される $V_{\mathbf{Z}_2^k}$ の自己同型、即ち、 $\alpha \in \mathbf{Z}_2^k, u_i \in V_{\bar{\alpha}_i}$ に対して

$$\bar{g}((\otimes_{i=1}^k u_i) \otimes e^\alpha) = (\otimes_{i=1}^k u_{g^{-1}(i)}) \otimes g_1(e^\alpha)$$

とする。ただし、 $\alpha = \nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_p}, i_1 < \cdots < i_p$ に対して $g_1(e^\alpha) = e^{\nu_{g(i_1)}} \cdots e^{\nu_{g(i_p)}}$ とする。 $u \in V_0 \cup V_1$ に対して $V_{\mathbf{Z}_2^k}$ の元

$$(\otimes_{i=1}^{j-1} 1) \otimes u \otimes (\otimes_{j+1}^k 1) \otimes e^{\delta_{u,1} \nu_j}$$

を $u^j, j=1, \dots, k$ とおく。ここで、 $\nu_j = (0^{j-1} 1 0^{k-j})$ である。このとき、 $\{u^j | u \in V_0 \cup V_1, j=1, \dots, k\}$ は $V_{\mathbf{Z}_2^k}$ を生成する。まず生成元に対して Y_g を定義する。

定義 3. $\Delta_k(z) \in (\text{End } V)[[z^{\frac{1}{2k}}, z^{-\frac{1}{2k}}]]$ を

$$\Delta_k(z) = \exp \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j z^{-\frac{j}{k}} L(j) \right) k^{-L(0)} z^{(\frac{1}{k}-1)L(0)}$$

とする。ただし、 $a_j, j \in \mathbb{Z}_+$, は

$$\exp \left(- \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j x^{j+1} \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot x = \frac{1}{k} (1+x)^k - \frac{1}{k}$$

で定義され、 $k^{-L(0)}$ や $z^{(\frac{1}{k}-1)L(0)}$ は $u \in V_{\frac{1}{2}n}$ に対して

$$k^{-L(0)}u = k^{-\frac{1}{2}n}u, \quad z^{(\frac{1}{k}-1)L(0)}u = z^{\frac{(1-k)n}{2k}}u$$

で定義し線形に拡張する。(c.f. [BDM]) この $\Delta_k(z)$ を使って、 $u \in V$ に対して $\bar{Y}^{II}(u, z)$ を

$$\bar{Y}^{II}(u, z) = Y^W(\Delta_k(z)u, z^{\frac{1}{k}})$$

と定義し、 u^j に対して Y_g を

$$Y_g(u^j, z) = \bar{Y}(u, \varepsilon_k^{-j+1}z) = \lim_{z^{\frac{1}{2k}} \rightarrow \varepsilon_{2k}^{-j+1}z^{\frac{1}{2k}}} \bar{Y}(u, z)$$

のように定義する。ただし、 $\varepsilon_{2k} = e^{-\frac{\pi i}{k}}$ とする。

例えば、Virasoro 元 $\hat{\omega}$ について、 $Y_g(\hat{\omega}, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{L}_g(n) z^{-n-2}$ とすると

$$\hat{L}_g(n) = \frac{L(kn)}{k} \quad (n \neq 0), \quad \hat{L}_g(0) = \frac{L(0)}{k} - \frac{(k^2-1)c}{24k}$$

となっていることがわかる。この Y_g について次が成り立つことがわかる。

補題 1. $u \in V, j = 1, \dots, k$ に対して、

$$[\hat{L}_g(-1), Y_g(u^j, z)] = \frac{d}{dz} Y_g(u^j, z) = Y_g((L(-1)u)^j, z)$$

が成り立つ。

補題 2. $\mathbb{Z}_2$ -homogeneous な $u, v \in V$ と $i, j = 1, \dots, k$ に対して、 $Y_g(u^i, z_1)$ と $Y_g(v^j, z_2)$ は局所可換、即ち、ある正整数 N があって

$$(z_1 - z_2)^N Y_g(u^i, z_1) Y_g(v^j, z_2) = (-1)^{\bar{u}\bar{v}} (z_1 - z_2)^N Y_g(v^j, z_2) Y_g(u^i, z_1) \quad (4)$$

が成り立つ。

注意 1. V -加群 (W^i, Y^i) に対して $\otimes_{i=1}^k W^i$ 上の頂点作用素 $Y = \otimes_{i=1}^k Y^i$ は (2) のような関係を満たすので、ツイストでない加群の場合には 2 節で定義したような *cocycle* を考える必要があるが、上の補題から、この (g -ツイストの) 場合には *cocycle* が無視できることがわかる。

これは $\langle Y_g(u^i, z_1) | u \in V_0 \cup V_1, i = 1, \dots, k \rangle$ はどの 2 元も局所可換な $\mathbb{Z}_2$ -次数付き空間になることを示している。 $(\text{End } W)[[z^{\frac{1}{2k}}, z^{-\frac{1}{2k}}]]$ においてこのような局所可換な $\mathbb{Z}_2$ -次数付き空間のうち極大な空間を ($\mathbb{Z}_{2k}$ -twisted) local system という。 [L] $A = A_0 \oplus A_1$ を上の空間を含む local system とする。 $a(z) \in A$ に対して、 $\rho a(z) = \lim_{z^{\frac{1}{2k}} \rightarrow \varepsilon_{2k}^{-j} z^{\frac{1}{2k}}} a(z)$ とすれば、 ρ は $\rho^{2k} = 1$ である A の自己同型になる。 A 上に頂点作用素 Y_A を次のように定義する。

定義 4. $\rho a(z) = e^{-\frac{\pi i}{k}} a(z)$ である $\mathbb{Z}_2$ -homogeneous な $a(z), b(z) \in A$ に対して、

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(z)_n b(z)) z_0^{-n-1} = \text{Res}_{z_1} \left(\frac{z_1 - z_0}{z} \right)^{\frac{r}{2k}} \cdot X \quad (5)$$

により n -正規積 $a(z)_n b(z), n \in \mathbb{Z}$ を定義する。ここで、

$$X = z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z}{z_0} \right) a(z_1) b(z) - (-1)^{st} z_0^{-1} \delta \left(\frac{z - z_1}{-z_0} \right) b(z) a(z_1).$$

である。上の (5) を $Y_A(a(z), z_0) b(z)$ とおく。

このとき、次が成り立つ。

定理 4. [L] $(A, Y_A, I(z_0) = Id_W, D = \frac{d}{dz_0})$ は頂点超代数になり、 $Y_W(a(z), z_0) = a(z_0)$ とすれば、 (W, Y_W) は ρ -ツイスト A -加群になる。

一方、SVOA の加群と local system に関して次のようなことが成り立つ。

定理 5. [L] V は SVOA であるとし、 h は位数 T の V の自己同型とする。このとき、 h -ツイスト V -加群を与えることと、 V からある $\mathbb{Z}_T$ -twisted local system への頂点超代数準同型を与えることは同値である。

この定理を適用するために、次のような写像を定義する。

定義 5. 写像 $f: V_{\mathbb{Z}_T^k} \rightarrow A$ を

$$\begin{aligned} f: V_{\mathbb{Z}_T^k} &\rightarrow A \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes c^n &\mapsto Y_g(u_1^1, z)_{-1} \cdots Y_g(u_{k-1}^{k-1}, z)_{-1} Y_g(u_k^k, z) \end{aligned}$$

で定義する。このとき、 $f(u^i) = Y_g(u^i, z)$ である。

このとき、次が成り立つ。

補題 3. f は頂点超代数の準同型である。

この f により、すべての $v \in V_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ に対して、 $Y_g(v, z) = f(v)$ が定義され、上の定理から次が成り立つ。

定理 6. (W, Y^W) が σ^l -ツイスト V -加群のとき、 (W, Y_g) は $\sigma_1^{l+k-1}g$ -ツイスト $V_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ -加群である。ここで、 σ_1 は $V_\alpha \otimes e^\alpha$ 上 $(-1)^{\langle \alpha, (1, 0, \dots, 0) \rangle}$ 倍で作用する $V_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ の自己同型である。さらに、 (W, Y^W) が既約であれば、 (W, Y_g) も既約である。

最後に SVOA $M = L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に対して、上の定理を適用する。 M は、 M 自身を既約加群としてもち、 $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ を既約 σ -ツイスト加群として持つ。したがって、次が成り立つ。

定理 7. (M, Y_g) は既約 $\sigma_1^{k-1}g$ -ツイスト $M_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ -加群になり、 $(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^k g$ -ツイスト $M_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ -加群になる。

また、 D が g -不変な偶 code のとき、 σ_1 と $\tilde{g}$ の $M_D \subset M_{\mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}}$ への制限は、code VOA M_D の自己同型を与える。このとき、 $u \in M_D$ に対して $Y_g(u, z)L(\frac{1}{2}, h) \subseteq L(\frac{1}{2}, h)$, $h = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ であるから、 Y_g を M_D に制限すれば、次が成り立つ。

定理 8. $(L(\frac{1}{2}, 0), Y_g)$ と $(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^{k-1}g$ -ツイスト M_D -加群になり、 $(L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}), Y_g)$ は既約 $\sigma_1^k g$ -ツイスト M_D -加群になる。

参考文献

- [BDM] K.Barron, C.Dong and G.Mason, Twisted sectors for tensor product VOAs associated to permutation groups, math. QA/9803118.
- [B] R.E.Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3068-3071.
- [DGH] C.Dong, R.J.Griess Jr. and G.Hohn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, Comm. Math. Phys. **193** (1998), 407-448.
- [DLM] C.Dong, H.Li and G.Mason, Modular invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine. Comm. Math. Phys. **214** (2000), 1-56.
- [DMZ] C.Dong, G.Mason and Y.Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module. Proc. Symp. Pure. Math. American Math. Soc. **56** no.2 (1994), 295-316.
- [FLM] I.B.Frenkel, J.Lepowsky and A.Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Math. Vol.134. Academic Press, 1988.

- [L] H.Li, Local systems of twisted vertex operators. vertex superalgebras and twisted modules, Contemporary Math. **193** (1996). 203-236.
- [M1] M.Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras. J. Algebra **181** (1996). 207-222.
- [M2] M.Miyamoto, Representations of code vertex operator algebras. J. Algebra **201** (1998), 115-150.
- [Z] Y.Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996). 237-302.