

ソリトン問題とNonlinear turning point 問題 (Nonlinear WKB 法)

大阪外語大 物理 中村 明 (Akira Nakamura)

§1. はじめに.

完全積分が可能な非線形システムの研究が, この20年くらいに, たいへん発達した. いわゆる非線形方程式の具体的な exact solution が, かまぐたせて, ソリトンとよばれている. 一方 WKB 法は, 近似的なことをなす有力な手段である (トンネル効果の計算に, とくに有効). WKB 法に, 性質のよいソリトンの非線形性を, 組みこめられないだろうか? つまり WKB の nonlinear 版を, とけられないだろうか?

すでに1977年に, 非線形常微分方程式の一種, パンルベ方程式 (Painlevé II eq.) をソリトンの手法の逆散乱法でといた, アメリカ人の paper において, この Painlevé II eq. をとくことが「nonlinear turning point の原型をあたえ子」ということから, はっきりと, 明言されている.⁽¹⁾

ところが、そのうち、この問題を、より具体的に、すなわち
 ことが、与えられていないようなので、われわれは、この問題を
 を nonlinear WKB 法として、もういちど、かんがえたい。

§2 WKB 法のソリトンの nonlinearization には、
 どんなものが、可能だろうか？

ひとくちに、nonlinear WKB といっても、non-
 linearity のかたちは、無限に、かんがえられるので、ソリ
 トンとの関係では、どんな nonlinearity が WKB と相性
 がよいかと、かんがえねば、ならない。まず、ふつうの
 WKB 法では、 $E \equiv \text{const}$, $V(x) \equiv$ ときとうなポテンシャル、
 として、シュレーディンガー eq.

$$u_{xx}(x) + \{E - V(x)\} u(x) = 0, \quad u_x(x) \equiv (d/dx)u(x), \quad (2.1)$$

をあたう。一オソリトン eq. として代表的なものは、

$$i u_t + u_{xx} + 2u^* u u = 0, \quad (\text{非線形シュレーディンガー eq.}) \quad (2.2a)$$

$$u_t + 6u^* u_x + u_{xxx} = 0, \quad (\text{KdV eq. (n=1); mKdV eq. (n=2)}), \quad (2.2b)$$

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u, \quad (\text{サイン・ゴルドン eq.}), \quad (2.2c)$$

などがある。一見して、(2.1)と(2.2a)との相性がよいのは、あきらかである。しかし、とまやする案では、(2.2b)のほうが、かんたんなので、こちらか、みこゆ。 (2.2b) の $n=2$ の場合 $u(x,t) = (3t)^{-\frac{1}{3}} w(x(3t)^{-\frac{1}{3}})$ という相似変換で reduce すると、いわゆる Painlevé II eq.

$$w_{xx}(x) \pm 2w(x)^3 - xw(x) - \delta = 0, \quad \delta \equiv \text{const.}, \quad (2.3)$$

とちうのて、¹⁾ nonlinear WKB の u と x と (2.1) と (2.3) が

$$u_{xx} + \{E - V(x)\}u + 2u^3 = 0, \quad (2.4a)$$

のたいがいが、あつかいやすいと期待される。こゝで (2.3) で、 $\delta=0$ とし、 $\pm 2w(x)^3$ 項は、 $\{E - V(x)\}$ から $x \rightarrow 0$ のちかくで $a_0 x + \dots$ ($a_0 \equiv \text{const.}$) と展開されたとし、 $a_0 x$ とおなじ性質の項がある、おとした。

→ Katteg. 73') (2.2b) の $n=1$ と、 $u = (12t)^{-\frac{2}{3}} x U\{x(12t)^{-\frac{1}{3}}\}$ とおいて reduce すると

$$-4U - 4(xU)' + 6UU' + U''' = 0, \quad (2.5)$$

となる。これの第1項 $-4U$ と $+2U^2$ かえたもの

$$U_{xx} - 4xU + 3U^2 + 2 \int^x dx U(x) = 0, \quad (2.6)$$

も、と書きやすいようである。(2.1)と(2.6)の組み合わせ

$$U_{xx} + \{E - V(x)\}u + 3u^2 + 2 \int^x dx u(x) = 0, \quad (2.4b)$$

も、 u と v の nonlinear WKB とする。しかし(2.4b)の integral term は、やはり開きのかんたんさで、与えようで、(2.5)の第1項を近似的に、おとしたものと(2.1)の組み合わせ

$$U_{xx} + \{E - V(x)\}u + 3u^2 = 0, \quad (2.4c)$$

は、応用性のため nonlinear WKB とする。

同様に(2.1)と(2.2a)からは

$$U_{xx} + \{E - V(x)\}u + 2u^* u u = 0, \quad (2.4d)$$

(2.1)と(2.2c)からは、

$$u_{xx} + \{E - V(x)\} u + \sin u = 0, \quad (2.4e)$$

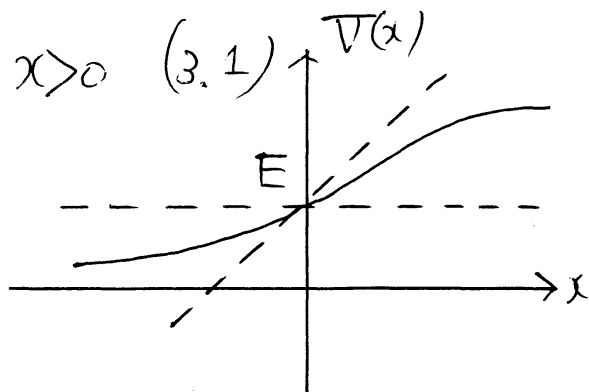
なにか, nonlinear WKB の研究テーマとなることから,
わかる。うしろ (2.4a) - (2.4e) の5つは, それぞれ固有
の物理上の応用のおもしろみを, もつと, おもわれる。

§3. もっとも, かんたんな nonlinear WKB eq. (2.4a) の
近似解の導出。

以下では, §2 の5つの式 (2.4a) - (2.4e) のうち
の (2.4a) だけを見る。かんたんなため, いま

$$V(x) - E > 0 \quad \text{for } x > 0 \quad (3.1)$$

たゞして, $x > 0$ のみ, かんが
えよう。Turning point
 $x=0$ のところでは,



$$V(x) - E = x + O(x^2), \quad (3.2)$$

とす。このとき linear WKB eq. (2.1) は, $\lambda \approx 0$ で

$$u_{xx}(x) - x u(x) = 0, \quad u(x) = \epsilon A_i(x), \quad \epsilon \equiv \text{const.}, \quad (3.3)$$

となり, エアリー-関数 $A_i(x)$ の近似解をもつ。一方 non-linear WKB eq. (2.4a) は $\lambda \approx 0$ で

$$u_{xx}(x) - x u(x) + 2u(x)^3 = 0, \quad (3.4)$$

すなわち Painlevé II eq. となる。この $u \rightarrow 0$ で $\epsilon A_i(x)$ とする exact solution は, 無限級数と表すので, ¹⁾ わねわねは近似式 eq. (3.4) のさらに近似解で, 満足するとはしよう。つまり, この近似解を Hirota bilinear method で, もとめてみる。Eq. (3.4) に

$$u = i \left(\log \frac{g}{f} \right)_x, \quad (3.5)$$

を代入し, 得られる,

$$u_{xx} - x u + 2u^3 = \frac{3i(D_x g f / D_x^2 g \cdot f)}{(g f)^2} + \frac{i(D_x^3 - x D_x) g \cdot f}{g f}, \quad (3.6)$$

とある。ただし $D_x g \cdot f \equiv g_x f - g f_x$, $D_x^2 g \cdot f \equiv g_{xx} f - 2g_x f_x + g f_{xx}$, $D_x^3 g \cdot f \equiv g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x + 3g_x f_{xx} - g f_{xxx}$ である。
 このから eq. (3.4) の bilinear form は

$$\begin{cases} D_x^2 g \cdot f = 0, & (3.7a) \\ (D_x^3 - x D_x) g \cdot f = 0, & (3.7b) \end{cases}$$

である。つまり $g, f \in \mathbb{R}(\lambda)$ すると

$$\begin{cases} g = 1 + i\epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} + i\epsilon^3 h^{(3)} + \dots, & (3.8a) \\ f = g^* = 1 - i\epsilon h^{(1)} + \epsilon^2 h^{(2)} - i\epsilon^3 h^{(3)} + \dots, & (3.8b) \end{cases}$$

となり, (3.8) を (3.7) に代入すれば,

$$\begin{cases} D_x^2 \{ 1 \cdot 1 + i\epsilon (h^{(1)} \cdot 1 - 1 \cdot h^{(1)}) + \epsilon^2 (h^{(2)} \cdot 1 + h^{(1)} \cdot h^{(1)} + 1 \cdot h^{(2)}) + O(\epsilon^3) \} F_0, \\ (D_x^3 - x D_x) \{ \quad \quad \quad \} = 0, & (3.9) \end{cases}$$

これから ϵ の each order ϵ により $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ である。
 $O(\epsilon^0), O(\epsilon^1), O(\epsilon^2)$ ずつ求めると、おなじく $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ である。

$O(\epsilon^0)$: ちうあつ

$$O(\epsilon^1): \{ (d/dx)^3 - x(d/dx) \} h^{(1)} = 0, \quad h^{(1)} = \int_x^\infty dx' A_i(x'),$$

$$O(\epsilon^2): 2(d/dx)^2 h^{(2)} + D_x^2 h^{(1)}, \quad h^{(1)} = 0,$$

$$h^{(2)}_{xx} - A_i(x) \int_x^\infty dx' A_i(x') - A_i(x)^2 = 0,$$

$$h^{(2)} = -\frac{1}{2} \left\{ \int_x^\infty dx' A_i(x') \right\}^2 + 2 \int_x^\infty dx' \int_{x'}^\infty dx'' A_i^2(x''),$$

(3.10)

とある。一方 (3.5) 12 (3.8 a, b) を用いると,

$$U = i \left(\log \frac{g}{f} \right)_x = \frac{i D_x g \cdot f}{g f} = \frac{i \{ i \epsilon h'_x + O(\epsilon^3) \}}{\{ 1 + \epsilon^2 (2h^{(2)} + h^{(1)2}) + O(\epsilon^4) \}}. \quad (3.11)$$

ここに $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ の具体形を用いると

$$U \approx \frac{\epsilon A_i(x)}{\{ 1 + 4\epsilon^2 \int_x^\infty dx' \int_{x'}^\infty dx'' A_i^2(x'') \}}. \quad (3.12)$$

これが Painlevé II の近似解であり, 同時に nonlinear WKB eq. (2.4a) の turning point, $x=0$, ちかくの近似解である。

さて (3.12) は, (3.3) の linear WKB のちうあつ

$U = \epsilon A_i(x)$ にくらべて, ϵ^2 オーダーの項が分母に, ちうあつ

加わっただけである。だからたいへん、あらい近似にみえ
るが、分母にあるということがミソである。ちせなる
 $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 \dots$ のように、これは分子でみると無限
の項をひらいていっているからである。

さて、しめくくりとして、われわれは、linear WKB
をきいて、nonlinear WKB においても、 $A_i(x)$ と、WKB のこと
はで、かきかきして中こう。 A_i を Bessel 関数でかきと

$$A_i(x) = (1/3) x^{1/2} \left\{ I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) - I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right\}. \quad (3.13)$$

変数 $\xi(x)$ とついで導入する、²⁾

$$\xi(x) \equiv \int_{x_0}^x \sqrt{V(x') - E} \, dx', \quad (3.14)$$

ここで、 $x_0 = \text{turning point}$ (つまり、セ"ル"点)。 (3.13)
の $A_i(x)$ と $\xi(x)$ でかきかきと、

$$A_i(x) \rightarrow \{V(x) - E\}^{-\frac{1}{4}} \xi^{-\frac{1}{2}} \left\{ I_{-\frac{1}{3}}(\xi) - I_{\frac{1}{3}}(\xi) \right\} \equiv \tilde{A}(x), \\ u(x) \approx e^{\tilde{A}(x)}. \quad (3.15)$$

(3.15) が linear WKB の turning point 近く ($x \approx x_0$) の

solution だが、おかしなところがある non-linear WKB だろうと (3.12) から

$$u(x) \approx \frac{e^{\hat{A}(x)}}{\left\{ 1 + 4\epsilon^2 \int_{x_0}^x dx' \int_{x_0}^{x'} dx'' \hat{A}(x'') \right\}},$$

(turning point 付近), (3.16)

とある。(integral の上, 下限の ∞ と x_0 は、(3.12) からわかる、 $x=1$, あるいは)。さらに turning point より十分とおいとある (11 頁は $x \approx +\infty$) では、linear WKB だろう。

$$u(x) \rightarrow e^{\hat{A}(x)} \rightarrow \text{const.} \{V(x) - E\}^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\xi(x)} \quad (3.17)$$

同様に non-linear WKB では、

$$u \approx \frac{e' \{V(x) - E\}^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\xi(x)}}{\left\{ 1 + 4\epsilon'^2 \int_{x_0}^x dx' \int_{x_0}^{x'} dx'' \{V(x'') - E\}^{-\frac{1}{2}} e^{-2\xi(x'')} \right\}},$$

$e' \equiv \text{const.}, \quad (x \approx +\infty), \quad (3.18)$

とある。(3.16), (3.18) が non-linear WKB の近似解で

ある。

以上, まだキツキツつめなければならぬ, detail は, あるか, 多少とも nonlinear WKB の具体化の一步をすめたいといえよう。できれば, かんたんモデルの数値計算とのヒト比較を, してみたいか, 今度は, 手にあわせるか, ね。これから, かんがえてゆきたい。

References

- 1) M. J. Ablowitz and H. Segur: Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1103.
- 2) L. I. Schiff: 量子力学, (井上健訳), 吉岡書店, 第七章 28 節.