

Banach quasi-sublattice について

東京理科大学 宮島静雄 (Shizuo Miyajima)

§1 序

(vector) sublattice の概念の拡張として次のものが自然に考えられる:

定義 1. vector lattice E の部分空間 F が E から自然に導かれる順序に関してまた vector lattice になるとき, F を E の quasi-sublattice といい。

F を E の quasi-sublattice とするとき, $x, y \in F$ の F での上限, 下限をそれぞれ $x \vee_F y$, $x \wedge_F y$ で表わす。 $x, y \in F$ の E での上限と下限を通常のように $x \vee y$ と $x \wedge y$ で表わすと明らかに $x \vee_F y \geq x \vee y$, $x \wedge_F y \leq x \wedge y$ が成り立つ。

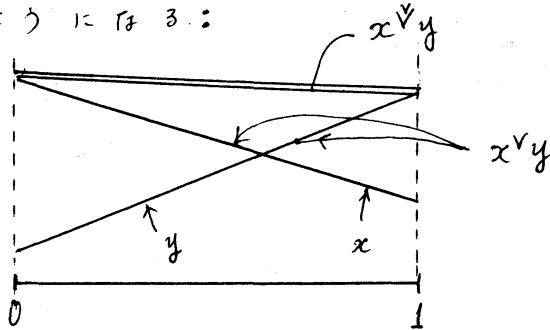
最も簡単な具体例において上記のことを図解してみよう。

$E = C([0, 1])$ を通常 of 如く順序を入れた vector lattice とし,

F を $[0, 1]$ 上の affine 関数の全体とする。すなわち

$$F = \{ f \in E ; \exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in [0, 1] f(x) = ax + b \}.$$

このとき F は E の quasi-sublattice となり $x \vee y$ と $x^{\vee}y$ の関係は下図のようになる:



また一般に E を vector lattice とし, P を E の上で定義された positive projection とする (i.e., $P: E \rightarrow E$ linear, $P^2 = P$, $x \geq 0 \Rightarrow Px \geq 0$). このとき P の値域 F は E の quasi-sublattice である。実際 $x, y \in F$ の F での上限が $P(x^{\vee}y)$ で与えられることがすぐ分る。

一方上の affine 関数の例において $f \in E$ に対して $f(0)$ と $f(1)$ をそれぞれ $0, 1$ での値とする affine 関数を Pf とすると P は E 上の positive projection となり $F = P$ の値域 となる。

ここでは一例のみ挙げたが, 多くの自然な例においては quasi-sublattice を値域に持つ positive projection が存在している。そこで一般の quasi-sublattice においてその構造は, quasi-sublattice の概念の推移性から, 本物の sublattice をとることと positive projection の値域をとることの組み合わせで与えられるのではなかと予想される。§2 においてこれを確かめ, §3 で Banach lattice において並行的に定義される Banach

quasi-sublattice の構造を調べる。

§ 2 quasi-sublattice

F を E の quasi-sublattice とする (§ 1 定義 1)。§ 1 で定義した記号 $x \vee y$, $x \wedge y$ に加えて以下で次の記号を用いる：
 $x^{++} := x \vee 0$, $x^{--} := (-x) \vee 0$, $|x|_F := x \vee (-x)$
 $\implies x \in F$ 。

lemma 1. F は vector lattice E の quasi-sublattice とする。

F の元の有限族 $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$, $\{t_{kl}\}_{k \in K, l \in L}$ が

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} t_{kl}$$

をみたすとする。

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} t_{kl}$$

が成り立つ。

proof) 最初に $a_{ij} \in F$, $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$ のとき $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$ が成り立つことを示そう。実際 E における分配則から

$$\bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \geq 0$$

が成り立つ，ここで $\Sigma = J^I$ 。よ，任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し

$$\bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

となり $\vee$ と $\wedge$ の関係から $\bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$ 。これより F における分配則を用いて

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} = \bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

を得る。

$$\begin{aligned} \text{次に } \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} &= \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} \text{ にも } i \in I \text{ を固定すると,} \\ \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} &\geq \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \text{ が成り立つから, したがって} \\ \bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} (b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij}) &\geq 0 \end{aligned}$$

と言える。前半のことは $(b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij}) \in F$ に注意)

$$\bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} (b_{kl} - \bigwedge_{j \in J} a_{ij}) \geq 0$$

となる。これから

$$\bigvee_{k \in K} \bigwedge_{l \in L} b_{kl} \geq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij}$$

を得るが対称性から上式で等号が成り立つ。 //

Theorem 1. F を vector lattice E の quasi-sublattice とする。
 F_0 を F の生成する E の sublattice とすると, F_0 上で定義された positive projection P で値域が F となるものが存在する。
 更に P は F_0 から F への写像として lattice homomorphic にとれる。

$$\text{proof)} \quad F_0 = \left\{ \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \ ; \ I, J \text{ finite set, } a_{ij} \in F \right\}$$

と表わされる (Bleier, p. 74) こと, lemma 1 から

$$P : \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \longmapsto \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij} \quad (I, J \text{ finite, } a_{ij} \in F)$$

は F_0 上で定義された写像となる。 $P^2 = P$ なることは明らかであり, $P \geq 0$ も lemma 1 の証明中で示されている。

P が linear であることも分配則を用いて証明される。定理の最後の主張も同様。 //

定理 1 の逆を述べておこう。

Proposition 1. E が vector lattice で P を E 上で定義され
 E positive projection とする。このとき P の値域 PE は E の
 quasi-sublattice となり PE の元の有限族 $\{a_j\}_{j \in I, j \in J}$ に対し

$$P\left(\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij}\right) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} a_{ij}$$

が成り立つ。

Remark: Theorem 1 は quasi-sublattice が常に sublattice
 をとり、更に positive projection の値域をとるという二回の操
 作で得られることを示している。

§3. Banach quasi-sublattice

quasi-sublattice の概念に Banach lattice のカテゴリーで対
 応するものを次のように定義する：

定義 2. Banach lattice E の閉部分空間 F が E の Banach
 quasi-sublattice であるとは F が E から自然に導入される順序
 ノルムに関して Banach lattice になることを言う。

明らかに F が E の Banach quasi-sublattice であることは F
 が E の quasi-sublattice で $\forall x \in F \quad \|x\|_F = \|x\|$ が成り立つ
 ことと同等である。これから P を E 上の $\|P\| \leq 1$ なる

positive projection とすると, P の値域は E の Banach quasi-sublattice となる。もっと具体的に Banach quasi-sublattice の例としては $E = C(\bar{D})$ ($D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$) としたとき $F = \{f \in E; \Delta f = 0 \text{ in } D\}$ としたときがある。この例において $I = \{f \in E; f = 0 \text{ on } \partial D\}$ とし $\pi: E \rightarrow E/I$ を canonical surjection とすると, $\pi(F)$ は E/I の sublattice であり, $\pi|_F$ は isometric であることを注意しよう (最大値原理)。

Theorem 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice とし, $\tilde{F}$ を F の生成する E の closed vector sublattice とする。このとき次の a), b) は同値:

(a) E の closed ideal I で canonical surjection $\pi: E \rightarrow E/I$ の F への制限が isometric かつ F から E/I への束縛同型となるものが存在する。

(b) positive projection $P \in \mathcal{L}(\tilde{F})$ で $\|P\| \leq 1$ かつ値域が F となるものが存在する。

proof) (a) $\Rightarrow$ (b): I を (a) の条件を満たす ideal, π を canonical surjection $E \rightarrow E/I$ とする。 $\{a_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ を F の元の有限族とすると $\|\bigvee_j a_{ij}\| \geq \|\pi(\bigvee_j a_{ij})\| = \|\bigvee_j \pi(a_{ij})\| = \|\pi(\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij})\| = \|\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij}\|$ が成り立つ。これは,

- 6 -

Theorem 1 の写像 P が $\tilde{F}$ から F への $\text{contractive positive projection}$ に一意的に拡張できることを示しているの $\Rightarrow$ (b) が成り立つ。

(b) $\Rightarrow$ (a): P を $\tilde{F}$ から F への作用素として見ると, §2 Proposition 1 から lattice homomorphic である。従って $\text{Ker } P$ は $\tilde{F}$ の closed ideal となり明らかに $\forall x \in F$ に対し $x^{++} - x^+$, $|x|_F - |x|$ は $\text{Ker } P$ に属する。 $I = \text{Ker } P$ として (a) が成立することを見るには上記のことから $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ ($x \in F$, $\pi: E \rightarrow E/I$ は natural map) が成り立つことを見ればよい。また $x \in F$ に対して

$$\|\pi(x)\| = \| |\pi(x)| \| = \|\pi(|x|)\| = \|\pi(|x|_F)\|$$

かつ $\|x\| = \| |x|_F \|$ だから $F \ni x \geq 0$ に対し $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が言えれば十分である。そこで $F \ni x \geq 0$ とし任意の $y \in I$ をとると $(x+y)^+ \geq (x-|y|)^+$ より

$$\|x+y\| \geq \|(x+y)^+\| \geq \|(x-|y|)^+\| \geq \|P(x-|y|)^+\| = \|(P(x-|y|))^{++}\|$$

となり最後の項は $\|x\|$ に等しい。これより $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が示された。 //

次に positive linear functional の拡張可能性を示すための補題を示そう。

lemma 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice

とすると任意の $x \in F$ に対し $\|x^{++}\| = \|x^+\|$ が成り立つ。

proof) $x \in F$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し $x_n := nx^{++} + x \in F$

と置く。 $x_n = (n+1)x^{++} - x^- = nx^{++} + x^+ - x^-$ と書けるか

ら $|x_n|_F \geq (n+1)x^{++} + x^- \geq nx^{++} + x^+ + x^-$ と

$|x_n| \leq nx^{++} + x^+ + x^-$ が成り立つ。故に

$$\| |x_n|_F \| \geq \| (n+1)x^{++} + x^- \| \geq \| nx^{++} + x^+ + x^- \| \geq \| |x_n| \| = \| |x_n|_F \|$$

が言えて $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で $\| nx^{++} + x^+ + x^- \| = \| (n+1)x^{++} + x^- \|$

が成立する。これから帰納的に $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で

$$\| nx^{++} + x^- \| \leq n \| x^+ \| + \| x^- \|$$

が証明される。上式を n で割り、 $n \rightarrow \infty$ とすれば $\| x^{++} \| \leq$

$\| x^+ \|$ を得るが、 $\| x^{++} \| = \| x^+ \|$ が示された。 //

Proposition 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-

sublattice とすると、 F 上の任意の positive linear functional φ

はノルムを保って E 上の positive linear functional に拡張できる。

proof) $p(x) := \|\varphi\| \|x^+\|$ ($x \in E$) とおくと p は E 上

の positively homogeneous, subadditive function で、lemma 2 から

$\forall x \in F$ で $\varphi(x) \leq p(x)$ が成り立つ。Hahn-Banach の定理より

φ の E 上への linear extension ψ で $\forall x \in E$ $\psi(x) \leq p(x)$ を満

たすものが存在するが、これが条件を満たす拡張であること

は容易に分る。 //

Remark: Prop. 2 は sublattice の場合 によく知られている結果 (Schaefer, p 86 Prop. 5.6) の拡張である。

特に AM-space の Banach quasi-sublattice については次のような事が分っている。

Proposition 3 F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であれば F も AM-space となる。

(この証明は簡単なので略す。詳しくは Miyajima を見よ。)

Theorem 3. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice とすると, E の closed ideal I での natural map $\pi: E \rightarrow E/I$ の F への制限が F から E/I への isometric lattice homomorphism となるものが存在する。

proof) $X := \{f \in E'; f \geq 0, \|f\| \leq 1\}$, $Y := \{\varphi \in F'; \varphi \geq 0, \|\varphi\| \leq 1\}$ とおくと X, Y はそれぞれ E', F' の w^+ -compact convex subset で, 各々の 0 でない端点全体を X_0, Y_0 とおくと, X_0, Y_0 の元は E, F 上の lattice homomorphic functional から成る。Proposition 2 は restriction

$$r: \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ f \longmapsto f|_F \end{cases}$$

が全射であることを示している。ここに $\varphi \in Y_0$ に対して

$r^{-1}(\varphi)$ は X の空でない face となるから $r^{-1}(\varphi) \cap X_0 \neq \emptyset$ であることに注意しよう。

ここで $X_1 := r^{-1}(Y_0) \cap X_0$ とし, $I := \{x \in E; \forall f \in X_1, f(x) = 0\}$ とおくと I が定理の条件を満たすことを示そう。

まず $\pi: E \rightarrow E/I$ を natural map として $x \in F$ に対し $\|x\| = \|\pi(x)\|$ となることは次の 2 つのことから分る:

$$(i) \quad x \in F, y \in I, f \in X_1 \quad \text{とすると} \quad \|x+y\| \geq |f(x+y)| = |f(x)|$$

$$(ii) \quad x \in F \quad \text{とすると} \quad \|x\| = \|x|_F\| = \sup\{|f(x)|; f \in Y_0\}$$

$$= \sup\{|f(x)|; f \in X_1\}, \quad (\text{2 つめの等号は } \varphi \in Y_0 \text{ が}$$

lattice homomorphic であることから出, 最後の等号は $r(X_1) = Y_0$

から従う。)

また $\pi|_F$ が F から E/I への lattice homomorphism であることは $x, y \in F, f \in X_1$ に対して

$$f(x \vee y - x \wedge y) = r(f)(x \vee y) - f(x \wedge y) = 0$$

であることから言える。 //

Corollary 4. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であるための条件は E の closed sublattice $\widehat{F}$ と positive contractive projection $P \in \mathcal{L}(\widehat{F})$ で $P\widehat{F} = F$ を満たすものが存在すること。

Proof) 十分性は定義のあとの注意から明らか。必要性は $\widehat{F}$ を F の生成する E の closed sublattice とすると, 定理

2, 3 から $P\hat{F} = F$ なる contractive positive projection $P \in \mathcal{L}(\hat{F})$ が存在することが出るのでよい。 //

Remark. Cor. 1 は Theorem 1 の Banach lattice version が E が AM-space のときに成り立つことを示している。一般の E に対して同じことが成り立つかどうかは分っていない。

定理 3 より, E が最初から $C(K)$ (K : compact Hausdorff) の closed sublattice として実現されている場合, この E の最初にあげた例にあける "Poisson の積分公式" と同じようなことが言える:

Corollary 2. K が compact Hausdorff space, E は $C(K)$ の closed sublattice とする。このとき E の任意の Banach quasi-sublattice F に対して closed subset $K_0 \subset K$ として $F|_{K_0} := \{x|_{K_0}; x \in F\}$ が $C(K_0)$ の sublattice であり $\forall x \in F$ に対し $\|x\| = \|x|_{K_0}\|$ が成り立つものが存在する。更に F が定数関数を含めば, 次の条件 (i), (ii) をみたす compact Hausdorff 空間 K_1 , 連続写像 $p: K_0 \rightarrow K_1$, $\mu: K \rightarrow \mathcal{M}_1^+(K_1)$ が存在する:

$$(i) \text{ 写像 } p^* : \begin{cases} C(K_1) \rightarrow C(K_0) \\ g \mapsto g \circ p \end{cases} \text{ は } C(K_1) \text{ から } F|_{K_0}$$

の $\pm$ の isometric lattice isomorphism

(ii) $\forall x \in F, \forall s \in K$

$$x(s) = \int p^{*-1}(x|_{K_0}) d\mu_s$$

が成り立つ。(μ_s は μ の s での値)

References

- [1] Bleier, R.D.: Free vector lattices, Trans. A.M.S., 176 (1973), 73-78
- [2] Miyajima, S.: Structure of Banach quasi-sublattices, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 83-91
- [3] Schaefer, H.H. : Banach Lattices and Positive Operators, Springer (1974)