

サブシフトからとる C^* 環の自己同型について

上越教育大 松本 健吾 (Kengo Matsumoto)

1. はじめに

ここでは, 片側サブシフトの上の自己同型の性質と, 対応する C^* 環上の自己同型の性質について調べる。内容の一部は, Preprint

「Y. Katayama - H. Takehana: On automorphisms of generalised Cuntz algebras」

と重複がある可能性がある。

2. 準備

$2 \leq n \in \mathbb{N}$ を固定する。 $\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$ とおき $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 上のシフト σ を $\sigma(x_i) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ で定義する。 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ の σ -不変閉部分集合 Λ に対し, 位相力学系 (Λ, σ) を ^(両側) サブシフト と呼ぶ。 サブシフト (Λ, σ) に対し $X_\Lambda = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid (x_i)_{i=-\infty}^0 \in \Lambda\}$ とおき, 力学系 (X_Λ, σ) を (対応する片側) サブシフト と呼ぶ。

以後, サフシフトはすべて右片側サフシフト (X_Λ, σ) とする。

3. サフシフトから定まる C^* 環

サフシフト (X_Λ, σ) に対して C^* 環 $\mathcal{O}_\Lambda$ を $[Ma]$ に従って構成する。その canonical な generating partial isometries を $S_1, \dots, S_n$ とする。以下, 記号は全て $[Ma]$ に従うとする。ここで

$$\mathcal{Q}_\Lambda = S_\mu S_\mu^*, \mu \in \Lambda^* \text{ によって生成される } C^* \text{ 環}$$

$$D_\Lambda \equiv S_\mu a S_\mu^*, \mu \in \Lambda^*, a \in A_\Lambda \text{ によって生成される } C^* \text{ 環}$$

$$\phi_\Lambda(X) \equiv \sum_{j=1}^n S_j X S_j^*, X \in \mathcal{O}_\Lambda \text{ である。}$$

サフシフト (X_Λ, σ) の上の自己同型の全体を $\text{Aut}(X_\Lambda)$ で表す。つまり

$$\text{Aut}(X_\Lambda) = \{h: X_\Lambda \rightarrow X_\Lambda: \text{同相で } h^* \sigma = \sigma \circ h\}$$

以下調べることにしよう。 $\text{Aut}(X_\Lambda)$ と $\text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$ の関係である。

4. サフシフトの自己同型と C^* 環の自己同型

次の補題が重要である (サフシフトは条件 (I) を満たすとしている)。

補題 1. 任意の $h \in \text{Aut}(X_\Lambda)$ に対して, (必ずしも唯一ではない)

$$\alpha_h \in \text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda) \text{ が存在して, } \alpha_h|_{\mathcal{Q}_\Lambda} = h^* \text{ on } C(X_\Lambda) = \mathcal{Q}_\Lambda$$

を満たす。さらに, 対応 $h \in \text{Aut}(X_\Lambda) \xrightarrow{\alpha} \alpha_h \in \text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$

は準同型にとれる。

同一視 $(\mathcal{D}_\Lambda, \phi_\Lambda) = (C(X_\Lambda), \sigma^*)$ の下で, $\text{Aut}(X_\Lambda)$ の $\text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$ への extension の全体を $\text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$ と表す。
つまり

$$\text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) = \{ \alpha \in \text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda) \text{ such that } \alpha(\mathcal{D}_\Lambda) = \mathcal{D}_\Lambda, \alpha \circ \phi_\Lambda = \phi_\Lambda \circ \alpha \text{ on } \mathcal{D}_\Lambda \}$$

サフシフトが条件(I)を満たしていれば, 次の補題が成り立つ。

補題2. $\mathcal{D}_\Lambda' \cap \mathcal{O}_\Lambda = D_\Lambda$: Relative commutant of $\mathcal{D}_\Lambda$ in $\mathcal{O}_\Lambda$.

従って, 上の $\text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$ は次のようになる

定理3 $\text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) \cong \mathcal{U}(D_\Lambda) \rtimes \text{Aut}(X_\Lambda)$: 半直積

但し $\mathcal{U}(D_\Lambda)$ は D_Λ の unitary 群。

系4. 任意の $k \in \text{Aut}(X_\Lambda)$ に対し, K -群 $K_*(\mathcal{O}_\Lambda)$ の自己同型 $k_* \in \text{Aut}(K_*(\mathcal{O}_\Lambda))$ が存在して, 対応

$$k \in \text{Aut}(X_\Lambda) \longrightarrow k_* \in \text{Aut}(K_*(\mathcal{O}_\Lambda))$$

が準同型的になる。

この系は, 今後のサフシフトの自己同型の研究に役に立つと思われる。

5. 外部自己同型

$\text{Aut}(X_\Lambda)$ の元を $\text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$ への extension したとき, いち $\mathcal{O}_\Lambda$ の外部自己同型を手えるかは, 大変興味があるような問題に思える。

$$\text{Int}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) \equiv \text{Int}(\mathcal{O}_\Lambda) \cap \text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$$

$$\text{Out}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) \equiv \text{Aut}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) / \text{Int}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda)$$

とおく。

このとき、サブシフトの条件 (I) よりやや強い条件 (D) (cf. [Mar])

というのを満たしていれば、

命題 5, 任意の $k \in \text{Aut}(X_\Lambda)$ ($k \neq id$) に対し、そのいかなる $\text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$ への extension も outer である。

すると、たいてい予想できるような、

$$Z_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) = \{u: N \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda) \mid$$

$$u(k+l) = u(k) \phi_\Lambda^k(u(l)) \quad \forall k, l \in N\}$$

$$B_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) \equiv \{u: N \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda) \mid \exists v \in \mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda);$$

$$u(k) = v \phi_\Lambda^k(v^+), \quad k=1, 2, \dots\}$$

と置き

$$H_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) = Z_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) / B_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda))$$

とおくと、 $Z_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) \cong \mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)$ であることが

定理 6. $\text{Out}_\sigma(\mathcal{O}_\Lambda, \mathcal{D}_\Lambda) = H_\sigma^1(\mathcal{U}(\mathcal{D}_\Lambda)) \rtimes \text{Aut}(X_\Lambda)$ と直積

と分解される。これによって、 $\text{Aut}(X_\Lambda) \rtimes \text{Aut}(\mathcal{O}_\Lambda)$ の関係が分って来たようである と言えらると思う。

サフシフトの自己同型の具体的な例を便, 計算や, こ
こ述べた定理や補題の証明はすべて [Ma2] に現れようである

主な
References

[C]: J. Cuntz: Automorphisms certain simple C^* -algebras,
in Quantum Fields Algebras, Springer (1980) 187-196

[ETW]: M. Enomoto, H. Takehana, Y. Watatani, Automorphisms
on Cuntz algebras. Math. Japonica 24(1979), 231-234

[KT]: Y. Katayama, H. Takehana, On automorphisms of
generalised Cuntz algebras, preprint

[Ma1]: K. Matsumoto, On C^* -algebras associated with subshifts.
Internat. J. Math. 8(1997)

[Ma2]: _____ On automorphism of C^* -algebras associated
with subshifts, preprint 現在改訂中