

補間空間の理論と応用の若干

東 大 理 吉 川 敦

§ 0. はじめに

この話においては, 二つの Banach 空間の実補間空間の理論の概略を説明し, その応用としていくつかの埋込み定理を取扱ってみたい。まず本質的な内容をつぎの簡単な例によって示そう。

$B_p^{s,r}(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $s > 0$, によって, $L^p(\mathbb{R})$ の意味で $[s]$ 階微分可能 ($[s]$ は s より小さい, 最大自然数) な函数 f であって, かつ, $(\frac{d}{dx})^{[s]} f(x)$ が

$$\left[\int_0^\infty t^{-(s-[s])r-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left| (\frac{d}{dx})^{[s]} f(x) - (\frac{d}{dx})^{[s]} f(x+t) \right|^p dx \right\}^{\frac{r}{p}} dt \right]^{\frac{1}{r}} < \infty$$

をみたすような f の全体からなる Banach 空間をあらわそう。

(s が整数のとき, および p または $r = \infty$ のときやや修正を要する)。このとき, つぎの埋込み関係が知られている:

$$(0,1) \quad B_p^{s,r}(\mathbb{R}) \subseteq B_q^{t,r}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq r \leq \infty, t = s - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0, s > 0, 1 \leq p < q \leq \infty.$$

これは, たとえば Nikol'skii の著書 [6] に見るように, 整函数近

似の理論に基づいて導くことができる。しかし、われわれは、
 そのような立場をとらずに、空間 $B_p^{s,r}(\mathbb{R})$ が実補間空間の理論
 によって得られることに着目して出発する。詳しくは以下に
 述べること、または引用文献[2][4][5][10]によるべきであるが
 $B_p^{s,r}(\mathbb{R})$ は実補間空間として、 $L^p(\mathbb{R})$ と $L^q(\mathbb{R})$ に定義された平行移動
 (半)群の生成作用素 $A_p = \frac{d}{dx}$ の m 乗 ($m > 0$) の定義域 $D(A_p^m)$ の間の
 平均空間

$$(0.2) \quad B_p^{s,r}(\mathbb{R}) = (L^p(\mathbb{R}), D(A_p^m))_{\frac{s}{m}, r}$$

といて得られる。一方、平行移動(半)群の生成作用素のレゾル
 ヴェントについては

$$(\lambda - A)^{-1} f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+t) dt, \quad \lambda > 0,$$

に基づいて、簡単な計算により、 $(\lambda - A)^{-1}$ は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^q(\mathbb{R})$ へ
 $p < q$, λ の有界作用素であって、かつ、ノルムは

$$(0.3) \quad \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq L \lambda^{\sigma-1}, \quad \lambda > 0,$$

$\sigma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $L = (1-\sigma)^{1-\sigma}$, とみたらうことがわかる。

さて、(0.2) において本質的なのは A_p が半群の生成作用素で
 あるということであって、これと(0.3)型の評価を合せれば、
 (0.2) 型の定義で得られる補間空間の間には(0.1)型の埋込み関係
 が成立することと述べるのが、この話の内容といえる。

一方、たとえば、 $L^p(\mathbb{R})$ における Gauss 核:

$$G(t) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy, \quad t > 0,$$

を考慮してみると, $G(t)$ は $L^p(\mathbb{R})$ から $L^q(\mathbb{R})$, $p < q$, の有界作用素になっている, そのノルムは

$$(0.4) \quad \|G(t)\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C t^{-\sigma}, \quad t > 0, \sigma > 0,$$

$\sigma = \frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $C = (2\pi)^{-\sigma}(1-\sigma)^{\frac{1}{2}-\sigma}$, をみたしていることがわかる。(0.4) 型の評価値から (0.3) 型の評価値を得ることもできるのでこの場合にも $L^p(\mathbb{R})$ と $G(t)$ の生成作用素 $A_p = -\frac{d^2}{dx^2}$ の m 中の定義域 $D(A_p^m)$ との平均空間を考えれば, これらの間にも埋込み関係が成立する:

$$(0.2') \quad \Omega(s, p, r; R) = (L^p(\mathbb{R}), D(A_p^m))_{\frac{s}{2m}, r}, \quad s > 0, 1 \leq p, r \leq \infty, s < 2m,$$

$$(0.1') \quad \Omega(s, p, r; R) \subseteq \Omega(s - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, q, r; R), \quad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

この空間 $\Omega(s, p, r; R)$ は Taibleson [8] によって取扱われた Lipschitz 空間である。

なお, 上の場合 $G(t)$ は解析的半群であったが (0.4) 型の評価値は $G(t)$ が解析的でなくても成立する, たとえば

$$(0.5) \quad G(t)f(x) = e^{itx^4 - tx^2} f(x), \quad t \geq 0,$$

を考慮せば

$$(0.4') \quad \|G(t)f(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (\pi\sigma)^{\frac{\sigma}{2}} t^{-\frac{\sigma}{2}} \|f(x)\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad \sigma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \quad p < q$$

がわかる。(0.5) のような半群は, 牛島氏 [9] によって取扱われている。

もちろん, われわれの立場に立てば (0.3) または (0.4) 型の評価値が得られればよいので, 境界条件が付いていてもかまわない。

ii. 例として後には半空間における $-\Delta$ に Dirichlet 条件または Neumann 条件の付いた場合を考察しよう。この場合には、 L^p における $-\Delta$ の実現の分散中の定義域と L^q における分散中の 定義域の間の埋込み関係を得ることもできる。

§ 1. 実補間空間の理論

1.1. E, F を二つの Banach 空間とする。分離公理をみたす線型位相空間とがあって、 $E \subseteq E, F \subseteq E$ がなりたつとする⁽¹⁾。このとき Lions-Petre 両氏[5]に従って、 E, F の平均空間

$$(1.1) \quad S(r, \theta; E; r, \theta-1, F) = \underline{S}(r, \theta; E; r, \theta-1, F) = (E, F)_{\theta, r}, \quad 0 < \theta < 1, 1 \leq r \leq \infty,$$

をさうのように定義することができる。定義をする前に必要は記号を導入する： X を Banach 空間とするとき $L_*^r(X), 1 \leq r \leq \infty$, をもって正実軸 $\mathbb{R}^+$ で定義され値を X にとる強可測な函数 $f(t)$ についての条件 (1.2) をみたすものの全体からなる Banach 空間をあらわそう：

$$(1.2) \quad \begin{cases} \left[\int_0^\infty \|f(t)\|_X^r \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{r}} < \infty, & 1 \leq r < \infty, \\ \sup_{t>0} \|f(t)\|_X < \infty, & r = \infty \end{cases}$$

空間 $S(r, \theta; E; r, \theta-1, F)$ の定義 $u(t)$ を E に値をとる函数で

$$(1.3) \quad t^\theta u(t) \in L_*^r(E), \quad t^{\theta-1} u(t) \in L_*^r(F)$$

⁽¹⁾ 二つの位相空間 X, Y について、 $X \subseteq Y$ と書くときは、 X が Y の集合として含まれ、かつ $X \ni x \mapsto x \in Y$ が連続であることを意味する。

をみたすものとする。このとき

$$(1.4) \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

の張る空間を $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ であらわす。これは、ノルム

$$(1.5) \quad \|a\|_{S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)} = \inf \left\{ \max \left\{ \|t^\theta u(t)\|_{L_+^r(E)}, \|t^{\theta-1} u(t)\|_{L_+^r(F)} \right\} \right\}$$

によって Banach 空間になる。ただし、 $\inf$ は (1.3)(1.4) をみたす $u(t)$ 全体に対してとる。

空間 $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ の定義 $v(t), w(t)$ を $\mathcal{D}$ に値をとる函数代

$$(1.6) \quad t^\theta v(t) \in L_+^r(E), \quad t^{\theta-1} w(t) \in L_+^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

$$(1.7) \quad a = v(t) + w(t), \quad \text{a.e. } t > 0$$

の張る空間を $S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$ であらわす。これはノルム

$$(1.8) \quad \|a\|_{S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)} = \inf \max \left\{ \|t^\theta v(t)\|_{L_+^r(E)}, \|t^{\theta-1} w(t)\|_{L_+^r(F)} \right\}$$

によって Banach 空間になる。ただし、 $\inf$ は (1.7) が成立するような v, w で (1.6) をみたすものの全体に対してとる。

命題 1.1. $1 \leq r \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ に対し、Banach 空間として

$$(1.1) \quad S(r, \theta, E; r, \theta-1, F) = S(r, \theta, E; r, \theta-1, F)$$

がなりたつ。この空間を、以下、 $(E, F)_{\theta, r}$ とあらわし、 E, F の平均空間という。

注意 1.1. 上記の定義は各 n 個の Banach 空間の場合に拡張することとできる。しかし、その場合命題 1.1 にあたることは、 $n \geq 3$ のときは一般には成立しない。

注意 1.2. 平均空間と同値な空間を与えるものに Lions 氏のトレース空間というのがある。これはつぎの定義から明らかたように境界値の集合であるので、境界値問題を考える際には、この定義に基づいておわかりやすい。

トレース空間 $T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, の定義: $u(t)$

を $\mathbb{R}$ に値をとる $\mathbb{R}^n$ で定義された関数で

$$(1.9) \quad t^\theta u(t) \in L_*^r(E), \quad t^\theta \frac{d}{dt} u(t) \in L_*^r(F)$$

をみたすものとする。このとき

$$(1.10) \quad a = u(0)$$

の張る空間を $T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)$ であらわす。これはノルム

$$\|u\|_{T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F)} = \inf \max \left\{ \|t^\theta u(t)\|_{L_*^r(E)}, \|t^\theta \frac{d}{dt} u(t)\|_{L_*^r(F)} \right\}$$

によって Banach 空間になる。ここで $\inf$ は (1.9) (1.10) をみたす

u 全体に対してとる。Banach 空間として

$$(1.11) \quad T(r, \theta - \frac{1}{r}, E; r, \theta - \frac{1}{r}, F) = (E, F)_{\theta, r}$$

がいえろ。

1.2. 後には必要になる平均空間の性質を以下に述べる。

命題 1.2. Banach 空間 E, F, E_1, F_1 を考える。分離公理をみたす線型位相空間 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1$ があって、 $E, F \subseteq \mathcal{E}$, $E_1, F_1 \subseteq \mathcal{E}_1$ をみたしているとしよう。 L を $\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}_1$ への線型作用素とする。 L が E から E_1 , F から F_1 へのそれぞれノルム A, B の有界作用素であるならば、 L は $(E, F)_{\theta, r}$ から $(E_1, F_1)_{\theta, r}$ への有界作用素であって

そのノルムは $\text{const. } A^{1-\theta} B^\theta$ である。

命題 1.3. $1 \leq r \leq r_1 \leq \infty$ ならば,

$$(E, F)_{\theta, r} \subseteq (E, F)_{\theta, r_1}, \quad 0 < \theta < 1$$

が成立する。

命題 1.4. つぎのことが成り立つ:

$$(E, F)_{\lambda, r} = ((E, F)_{\theta_0, r}, (E, F)_{\theta_1, r})_{\theta, r}, \quad \lambda = (1-\theta_0)\theta + \theta_1\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

$0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$. また $(E, F)_{0, r} = E$, $(E, F)_{1, r} = F$ とする。

命題 1.5 $E \subseteq F$ ならば

$$(E, F)_{\theta_0, r} \subseteq (E, F)_{\theta_1, r}, \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$$

である。

注意 1.3 命題 1.4, 1.5 は $(E, F)_{\theta_i, r}$ の代りに

$$(E, F)_{\theta_i, 1} \subseteq X_i \subseteq (E, F)_{\theta_i, \infty}, \quad i=0, 1$$

をみたす Banach 空間 X_i に対しても成立する。

§ 2 ある種の閉作用素と平均空間

E を Banach 空間とする。 A を E で定義された閉作用素でつぎの条件をみたすものとする。すなわち A は non-negative:

(2.1) $\lambda > 0$ は $-A$ のリールウエント集合にあり

$$\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M$$

が成り立つ。ただし, M は定数。さらに A の定義域 $D(A)$ は E において稠密であるとする。たとえば, $G(t)$, $t \geq 0$, を E にお

ける有界作用素の (Co) -半群とし, その生成作用素を $-A$ とすれば, A は non-negative である。

ある自然数 m に対し A の m 中を A^m , その定義域を $D(A^m)$ と書く。このとき, 以下のことがなりたつ。

命題 2.1 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$, は

$$t^{\theta m} (A(t+A)^{-1})^m x \in L_*^r(E)$$

であり, $x \in E$ の全体であって, そのノルムは

$$\|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}} = \|x\|_E + \|t^{\theta m} (A(t+A)^{-1})^m x\|_{L_*^r(E)}$$

である。

注意 2.1

$$(2.2) \quad u(t) = C_m t^m A^m (t+A)^{-2m} x, \quad t > 0, \quad C_m = \Gamma(2m)/\Gamma(m)^2$$

と置く。このとき

$$(2.3) \quad t^{m\theta} u(t) \in L_*^r(E), \quad t^{m\theta-m} u(t) \in L_*^r(D(A^m))$$

$$(2.4) \quad x = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

がなりたつ, さらに, Grisvard のように

$$(2.5) \quad \max \left\{ \|t^{m\theta} u(t)\|_{L_*^r(E)}, \|t^{m\theta-m} u(t)\|_{L_*^r(D(A^m))} \right\} \leq C \|x\|_{(E, D(A^m))_{\theta, r}}$$

が成立する。

命題 2.2 $m, n > 0$ を自然数, $0 < \theta, \varphi < 1$ とする。 $m\theta = n\varphi$ ならば,

$$(2.6) \quad (E, D(A^m))_{\theta, r} = (E, D(A^n))_{\varphi, r}$$

がなりたつ。

命題 2.3 $m, n > 0$ は自然数とする。 $0 < \theta - \frac{n}{m} < \theta < 1$ としよう。

このとき、つぎの二条件 (2.7), (2.8) は同値である。

$$(2.7) \quad x \in (E, D(A^m))_{\theta, r}$$

$$(2.8) \quad x \in D(A^n) \text{ かつ } A^n x \in (E, D(A^m))_{\theta - \frac{n}{m}, r}.$$

注意 2.2 命題 2.2, 2.3 における $m, n > 0$ は実数でよい。

とくに, $-A$ が (C_0) 半群 $G(t)$, $t \geq 0$, の生成作用素であるときには, つぎの命題が成り立つ。

命題 2.4 空間 $(E, D(A^m))_{\theta, r}$ は

$$(2.9) \quad t^{-m\theta} (I - G(t))^m x \in L_*^r(E)$$

をみたす, すべての $x \in E$ からなる Banach 空間である。そのノルムは

$$\|x\|_E + \|t^{-m\theta} (I - G(t))^m x\|_{L_*^r(E)}$$

で与えられる。

命題 2.5 $G(t)$ がとくに解析的半群とする。このとき $(E, D(A^m))_{\theta, r}$

$$(2.10) \quad t^{m-m\theta} A^m G(t)x \in L_*^r(E)$$

をみたす, すべての $x \in E$ からなる Banach 空間である。ノルムは,

$$\|x\|_E + \|t^{m-m\theta} A^m G(t)x\|_{L_*^r(E)}$$

で与えられる。

注意 2.3 命題 2.5 において, m は正の実数でよい。

論理的な順序はやや狂うが, $\alpha > 0$ に対し, つぎのことかた

りたつ。

命題 2.6 $m > \alpha$ とする。

$$(E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m}, 1} \subseteq D(A^\alpha) \subseteq (E, D(A^m))_{\frac{\alpha}{m}, \infty}.$$

§ 3 埋込み定理

E, F, E を § 1 のようにとる。 $A \in \mathcal{E}$ の ^{連続な}線型作用素で $\lambda + A$, $\lambda > 0$, $\mathcal{D}$ -対-であるとする。さらに, A を E に制限した作用素を A_E とする。すなわち

$$(3.1) \quad D(A_E) = \{x \in E; Ax \in E\}.$$

$$A_E x = Ax, \quad x \in D(A_E)$$

A_F についても同様。 A_E, A_F は明らかに閉作用素である。つぎの仮定をおく:

$$(3.2) \quad A_E, A_F \text{ は non-negative,}$$

$D(A_E), D(A_F)$ はそれぞれ E, F において稠密。

(したがって § 2 に基いて $(E, D(A_E^m))_{\theta, r}, (F, D(A_F^m))_{\theta, r}$ を計算できる。このとき, Grisvard 氏に於ては,

命題 3.1 Banach 空間として,

$$((E, D(A_E^m))_{\theta, r}, (F, D(A_F^m))_{\theta, r})_{t, r} = (X, D(A_X^m))_{\theta, r}$$

$E \in \mathcal{E}'$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 < t < 1$, $X = (E, F)_{t, r}$, A_X は A を X に制限した作用素である。

定義 3.1 $A \in (\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは $\lambda > 0$ に対し, $(\lambda + A)^{-1}$ が

E から F の作用素として有界であって、かつ

$$(3.3) \quad \|(\lambda + A)^{-1}\|_{E \rightarrow F} \leq L \lambda^{\sigma-1}, \quad L: \text{定数} > 0,$$

がなりたつ作用素 A をいう。

また、別の場合として、 $G(t)$, $t \geq 0$, が E にあける作用素の半群とし、 $G(t)$ を E, F に制限した作用素族 $G_E(t)$, $G_F(t)$ が、それぞれ E, F にあける (C_0) 半群になっている場合を考えよう。

定義 3.2 $G(t) \in S(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは $t > 0$ に $\bar{\sigma} t$ し、 $G(t)$ が E から F の作用素として有界で、かつ

$$(3.4) \quad \|G(t)\|_{E \rightarrow F} \leq K t^{-\sigma}, \quad K > 0,$$

がなりたつ $G(t)$ をいう。

命題 1.2 および 命題 3.1 によって E, F の間には空間の鎖 $(E, F)_{\theta, r}$, $0 \equiv \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = 1$, $1 \leq r \leq \infty$, を、ほめこんで考えればよいので、以下の議論で、定義 3.1, 3.2 の σ を

$$(3.5) \quad 0 < \sigma < 1$$

と仮定して差支えはない。このとき、つぎのことがいえる。

命題 3.2 $G(t)$ の生成作用素を $-A$ とする。 $G(t) \in S(\sigma, E, F)$

ならば $A \in (\sigma, E, F)$ である。

命題 3.3 $A \in (\sigma, E, F)$ とする。このとき、つぎの埋込み定理

が、なりたつ。ただし、 $0 < \theta < \theta + \frac{\sigma}{m} < 1$, $1 \leq r \leq \infty$:

$$(E, D(A_E^m))_{\theta + \frac{\sigma}{m}, r} \hookrightarrow (F, D(A_F^m))_{\theta, r}.$$

§4 命題 3.2 および 3.2 の証明

これらの証明では、必要に応じて補間定理を用いればよいから、 $0 < \sigma < 1$ とおいて、一般性を失わない。

命題 3.2 は、次の公式から直ちに従う：

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt, \quad \lambda > 0.$$

命題 3.3 を証明する。 $\alpha \in (E, D(A_E^m))_{\theta + \frac{\sigma}{m}, r}$ とする。

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A_E^k (t + A_E)^{-2k} \alpha \\ &= \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(k)^2} t^k A^k (t + A)^{-2k} \alpha \end{aligned}$$

とおく。ただし、 $k \geq m$, $t > 0$ 。 命題 2.1 および 注意 2.1 より

$$(4.1) \quad \begin{cases} t^{m\theta + \sigma} u_k(t) \in L_*^r(E) \\ t^{m\theta + \sigma - k} A^k u_k(t) \in L_*^r(E) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \alpha = \int_0^{\infty} u_k(t) \frac{dt}{t}$$

である。一方、仮定から、

$$\|u_{m+1}(t)\|_F \leq \text{const. } t^{\sigma} \|u_m(t)\|_E$$

$$\|A^m u_{m+1}(t)\|_F \leq \text{const. } t^{\sigma} \|A^m u_m(t)\|_E$$

であるから、(4.1) より

$$(4.3) \quad \begin{cases} t^{m\theta} u_{m+1}(t) \in L_*^r(F) \\ t^{m\theta - m} A^m u_{m+1} \in L_*^r(F) \end{cases}$$

それゆえ、 $\theta = \int_0^{\infty} u_{m+1}(t) \frac{dt}{t}$ は F に収束し、 $\theta \in (F, D(A_F^m))_{\theta, r}$ 。

いかに、 ε に対して $\alpha = \theta$ であるから、 $\alpha \in (F, D(A_F^m))_{\theta/m, r}$ 。

閉グラフ定理から

$$\|a\|_{(F, D(A_F^m))_{\frac{p}{m}, r}} \leq \text{const.} \|a\|_{(E, D(A_E^m))_{\frac{p}{m} + \sigma, r}}.$$

§5. 分数巾の定義域と埋込み関係.

定義5.1. $A^{-1}, A_E^{-1}, A_F^{-1}$ は有界とする。 $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$, $\sigma > 0$, とは, A_E, A_F が non-negative であって,かつ, $A^{-\sigma}$ が E から F への作用素として有界であることと意味する。

命題5.1. $-A$ は (C_0) 半群 $G(t)$ の生成作用素とする。 $G(t)$ が解析的であるときは, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ である。

実際 $G(t) = A^{-\sigma} A^{\sigma} G(t) = A^{\sigma} G(t) A^{-\sigma}$ であるから

$$\|G(t)\|_{E \rightarrow F} \leq \|A^{\sigma} G(t)\|_{F \rightarrow F} \|A^{-\sigma}\|_{E \rightarrow F} \leq \text{const } t^{-\sigma}$$

が得られる。

命題5.2. $0 < \sigma < 1$ とする。次の三条件は同値である:

$$(5.1) \quad D(A_E) \subset D(A_F^{1-\sigma});$$

$$(5.2) \quad D(A_E^{\alpha+\sigma}) \subset D(A_F^{\alpha}), \quad \forall \alpha > 0;$$

$$(5.3) \quad A \in \Sigma(\sigma, E, F)$$

証明には、分数巾の定義(小松[4])と、命題5.1、命題3.3、命題2.6 を用いれば、容易である。

命題5.1の逆は一般に成立せず、反例としては、

$$(G(t)f)(x) = e^{-t(1+x^2)} f(x), \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p < \infty$$

がある。実際、これは、解析的半群を各 $L^p(\mathbb{R})$ でなし、

$$G(t) \in S\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right), \quad 1 \leq p < q < \infty$$

をみたすが、その生成作用素 $-A$ については、

$$A \in \Sigma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R})\right)$$

は、 p, q , $1 \leq p < q < \infty$, をどう選んでも成立しない。

二、三の特別な場合を考察する。

命題 5.3 $F \subset E$ とする。 A^{-1} が E から F の作用素として有界であるための必要十分条件は、 $D(A_E) \subset F$ である。

これを用いると、函数論的補間空間 (Calderon [12]) より、

命題 5.4 $F \subset E$ とする。もし、ある Banach 空間 X があって $D(A_E) \subset X$ かつ $F = [E, X]_\theta$ がある $\theta \in]0, 1[$ に対して成立するとする。このとき、 $[E, D(A_E)]_\theta \subset F$ である。ただし $[Y, Z]_\theta$ は、Banach 空間 Y と Z の函数論的な補間空間をあらわす。すなわち、 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ で定義され、値を $Y + Z$ にとる連続函数 $f(z)$ で、 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ において正則、かつ、

$$\|f(iy)\|_Y, \quad \|f(1+iy)\|_Z \quad (y \in \mathbb{R}) \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty,$$

をみたすものの全体を $\mathcal{H}$ とおくとき、

$$[Y, Z]_\theta = \{f(\theta); f \in \mathcal{H}\}$$

である。ノルムは、

$$\|a\|_{[Y, Z]_\theta} = \inf_{\substack{f(\theta)=a \\ f \in \mathcal{H}}} \left\{ \max \left[\sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(iy)\|_Y, \sup_{y \in \mathbb{R}} \|f(1+iy)\|_Z \right] \right\}$$

で与えられる。

これより,

命題 5.5 命題 5.4 と同じ仮定のもとで考える。もし,

$$[E, D(A_E)]_0 = D(A_E^0) \text{ ならば, } A \in \Sigma(\sigma, E, F) \text{ である。}$$

分断中の定義域が上記の場合のように与えられるためには

$$\|A^{ik}\| \leq \text{Const } e^{\omega|k|}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega = \text{定数}$$

が成立すればよい。これについては、藤原氏、高倉氏の研究がある他、 E が Hilbert 空間、 A が自己共役の場合には、明らかである。

第二の特別な場合として、つぎのような場合を考える。

E, F を今までつような Banach 空間とし、さらに、 E_1, F_1 という Banach 空間と、 $E_1, F_1 \subseteq E$ なる分離公理をみたす線型位相空間が存在するとしよう。 E_1 から E 、および E から E_1 への写像 L, R がそれぞれ存在して、これらの、

$$E_1 \xrightarrow{L} E \xrightarrow{R} E_1,$$

$$F_1 \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} F_1,$$

の写像として連続であり、かつ、 $RL=1$ を満足するとしよう。 $P=LR$ とおけば、 P は、 $E \rightarrow E, F \rightarrow F$ の写像として有界であって、 $P^2=P$ をみたすことがわかる。

命題 5.6 $\lambda > 0$ に対し、 $(\lambda + A_E)^{-1}P = P(\lambda + A_E)^{-1}$,

$(\lambda + A_F)^{-1}P = P(\lambda + A_F)^{-1}$ とする。このとき、 $A \in (\sigma, E, F)$

ならば、 $RAL \in (\sigma, E_1, F_1)$, $G(t) \in S(\sigma, E, F)$ ならば

$RG(t)L \in S(\sigma, E, F)$, また, $A \in \Sigma(\sigma, E, F)$ ならば $RAL \in \Sigma(\sigma, E, F)$ である。

§ 6 例

例 6.1. $L^p(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$ における平行移動(半)群の生成作用素を $-A$ とする。このとき,

$$(6.1) \quad A \in \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})\right), \quad 1 \leq p < q < \infty,$$

$$(6.2) \quad A \in \left(\frac{1}{p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R})\right), \quad 1 \leq p < \infty$$

が成り立つ。

証明は、本質的には Hausdorff-Young の不等式を用いればよい。

例 6.2. $L^p(\mathbb{R}^n)$, $C(\mathbb{R}^n)$ における Gauss 核から得られる半群を $G(t)$ とする:

$$(G(t)f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y) dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0. \end{cases}$$

このとき,

$$(6.3) \quad G(t) \in S\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 \leq p < q < \infty.$$

$$(6.4) \quad G(t) \in S\left(\frac{n}{2p}, L^p(\mathbb{R}), C(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$(6.5) \quad 1 - \Delta \in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)\right), \quad 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ。

(6.5) は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式 ([3], [7]) から、直

ちに従う。

例 6.3 $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ にあける $-\Delta$ の Dirichlet 条件または Neumann 条件のもとでの実現を $-A$ とする。このとき,

$$(6.6) \quad 1+A \in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right), L^p(\mathbb{R}_+^n), L^q(\mathbb{R}_+^n)\right), \quad 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ。

(6.5) と命題 5.6 を用いればよい。Dirichlet 条件の場合には $E_1 = L^p(\mathbb{R}_+^n)$, $F_1 = L^q(\mathbb{R}_+^n)$, $E = L^p(\mathbb{R}^n)$, $F = L^q(\mathbb{R}^n)$ として,

$$(Lf)(x) = \begin{cases} f(x) & x_n > 0 \\ -f(x'_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & x_n < 0, \quad x'_1 = (x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad \begin{matrix} f \in E_1 \\ (f \in E_1, F_1) \end{matrix}$$

$$(Rg)(x) = \frac{1}{2} [g(x'_1, x_n) - g(x'_1, -x_n)] \Big|_{\mathbb{R}_+^n}, \quad g \in E \text{ (または } F)$$

ととればよい。Neumann 条件の場合には、 $\mathbb{R}_+^n$ 偶函数に拡張する。これは藤原氏の技巧である。

例 6.4 A を 2 階の楕円型作用素とする。 C^∞ 係数とし、主部係数は実数値とする。 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし境界は滑らかとする。 $L^p(\Omega)$ に作用素 A_p を,

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{u; u \in W^{2,p}(\Omega), Bu|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ただし $Bu = u$ または $Bu = \frac{\partial}{\partial n} u$ (n : 外法線) とする。

このとき A_2 が accretive になるとしてよく,

$$(6.7) \quad A \in \Sigma\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ。

これは、上記の場合 A の純虚数中が有界に有ることから知られているからである (藤原 (c)).

例 6.4. A を $2m$ 階の楕円型作用素とする。 Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域、 $\partial\Omega$ は Ω の境界で滑らかとする。 A の係数は Ω で滑らかとし、 $B_1, \dots, B_m$ を境界作用素とする。作用素 $A_p \in L^p(\Omega)$ に、つぎのように定義する:

$$A_p u = Au, \quad u \in D(A_p)$$

$$D(A_p) = \{u \in W^{p,m}(\Omega); B_j u|_{\partial\Omega} = 0 \quad j=1, \dots, m\}$$

もし A_2 が正定値な自己共役作用素であれば、

$$(6.8) \quad A \in \Sigma\left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p \leq 2 \leq q < \infty$$

が成り立ち、したがって

$$(6.9) \quad A \in \left(\frac{n}{2m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), L^p(\Omega), L^q(\Omega)\right), \quad 1 < p < q < \infty$$

が成り立つ。

証明は命題 5.5 と補間定理による。(6.8) が $p \leq 2 \leq q$ の制限なしに成立するかどうかについては、筆者は、まだ、何ともいえない。

§ 8 文献.

1. Fujiwara Daisuke (a) Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order, Proc JAPAN ACAD 43 (1967) 82-86.; (b) L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 15 (1968), 169-177
2. Grisvard, Pierre, 学位論文, IP 大学, 1965.
3. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, CAMBRIDGE UNIV. PRESS.
4. Komatsu Hikosaburo (a) Fractional powers of operators, PACIFIC J. MATH. 19 (1966), 285-346, (b) Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, Ibidem. 21 (1967), 89-111, (c) Fractional powers of operators, III, Negative powers, J. MATH. Soc. JAPAN, 21 (1969) 205-220, (d) Fractional powers of operators, IV, potential operators, Ibidem. 21 (1969) 221-228.
5. Lions & Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Pub. MATH. I.H.E.S., 19 (1964), 5-68.
6. Nikol'skii, S. M., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Изд. НАУКА, 227, 1969.
7. Sobolev, S. L., Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб. 4 (46), 1938, 471-497.
8. Taibleson, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions

on Euclidean n -space I, Principal properties. J. MATH. MECH. 13 (1964), 407-479.

9. Ushijima Teruo, 線型作用素の半群の滑らかさについて,
発展系の数値解法予稿 京大数解研, 1969

10. YOSHIKAWA, A. Remarks on the theory of interpolation spaces
J. FAC. Sci. UNIV. Tokyo, Sec. 1, 15 (1968), 209-251.

11. Yosida, KôSAKU. Functional Analysis, Springer-V., 1965.

§ $\infty+1$ 文献追加

18is Fujiwara, D. (c) On the asymptotic behaviour of the Green operators for elliptic boundary problems and pure imaginary powers of some second order operators, *J. Math. Soc. JAPAN*, 21, (1969), p. 481-522.

12. Calderón, A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math.*, 24 (1964), 113-190.

13. Shimakura, Norio, (a) Problèmes aux limites variationnels du type elliptique, *Ann. E.N.S., Ser. 4*, 2, (1969), 255-310,
(b) 東京大学理学部数学教室, 解析火曜セミナー講演,
1969年12月9日.

14. Agmon, Shmuel, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 15 (1962), 119-147.