

ノルム, 数域ノルムを達成する作用素

木更津高専 和田州平 (SHUHEI WADA)
 千葉大自然 松井宏樹 (HIROKI MATUI)
 千葉大理 渚 勝 (MASARU NAGISA)

1. 序

ヒルベルト空間上の有界線形作用素の理論において作用素ノルムは基本的概念である. 作用素ノルムが単位ベクトルによって達成できるとき, その作用素は, NA (norm attaining) と呼ばれる. NA 作用素全体の稠密性は Lindenstrauss [2] によって示された.

定理 A 任意の有界線形作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して, ランク 1 の作用素 $R(\|R\| < \epsilon)$ が存在して, $A + R$ が NA になる.

一方, 有界線形作用素 A の数域 $W(A)$ と数域半径ノルム $w(A)$ は以下のように定義される.

$$W(A) := \{(Af|f) : \|f\| = 1\},$$

$$w(A) := \sup\{|(Af|f)| : \|f\| = 1\}.$$

作用素 A の数域半径ノルムが, 或る単位ベクトルによって達成できる時, すなわち,

$$\exists f : \|f\| = 1; w(A) = |(Af|f)|$$

となるとき A は NRA (numerical radius attaining) と呼ばれる. NRA に関して知られる性質のうち, Sims [3] が示した以下の結果は興味深い.

定理 B 自己共役作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して, ランク 1 の作用素 $R(\|R\| < \epsilon)$ が存在して, $A + R$ が NRA になる.

系 自己共役作用素 A に対して NRA 作用素の列 R_n が存在して, $\|A - R_n\| \rightarrow 0$ となる.

この系の一般化として Berg and Sims [1] は以下を示した.

定理 C 有界線形作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して, コンパクト作用素 $R(\|R\| < \epsilon)$ が存在して, $A + R$ が NRA になる

上記定理 A と定理 C は, バナッハ空間上の作用素に関する主張であった. これらの定

理は、ヒルベルト空間上の作用素に限定して考えれば、さらに改良できる。本稿では、まず、定理 B を改良し、その結果を用いて定理 A, 定理 C を改良する。

2. 自己共役作用素に関する定理

ヒルベルト空間上の自己共役作用素は微少なランク 1 作用素を加えて NRA 作用素にすることができることを前節定理 B で見た。本節では、まず Sims が与えた定理 B の証明を紹介する。

定理 B の証明) A は正作用素で、数域半径を達成していないとして十分である。数域半径の定義から、 $w(A) - \epsilon < (Af|f) < w(A)$ となる単位ベクトル f が存在する。ここで、 $R = \epsilon f \otimes f$ とすると、 $r(A) = w(A) < ((A+R)f|f) < r(A+R)$ となる。ここで、 $r(A)$ は A のスペクトル半径を表す。二つの作用素 A と $A+R$ に対してワイルの定理を適用すると $A+R$ には、最大固有値 $\alpha = r(A+R) = w(A+R)$ が存在することがわかる。(証明終わり)

上記証明の方法によれば、自己共役作用素を摂動によって NRA にすることはできるが、摂動後のノルムは摂動前のそれより一般に大きくなる。上記証明の持つ、「摂動前後のノルムの変化」に着目して、我々は、定理 B を改良した。

定理 B' 自己共役作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して、ランク 1 の作用素 $R(\|R\| < \epsilon)$ が存在して、 $A+R$ が NA で、さらに $\|A+R\| = \|A\|$ になる。

証明) $A \geq 0$, $\|A\| = 1$, $\sigma_p(A) \not\ni 1$ として十分。

$$\eta = (1-A)^{\frac{1}{2}}\eta_0, \|(1-A)^{\frac{1}{2}}\eta\| < \sqrt{\epsilon}$$

となる単位ベクトル $\eta \perp \ker A$ とベクトル $\eta_0 \neq 0$ を選ぶ。さらに、

$$\xi = (1-A)^{\frac{1}{2}}\eta, R = \xi \otimes \xi$$

とする。ここで、 $\xi \perp \ker A$ に注意する。さて、定理を示すには、 $1 - (A+R) \geq 0$ 、及び、 $(1-A-R)\eta_0 = 0$ を示せばよい。実際、

$$\begin{aligned} 1 - (A+R) &= 1 - A - \xi \otimes \xi \\ &= (1-A)^{\frac{1}{2}}(1 - \eta \otimes \eta)(1-A)^{\frac{1}{2}} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - (A+R))\eta_0 &= (1-A)\eta_0 - (\eta_0|\xi)\xi \\ &= \xi - (\eta|\eta)\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。(証明終わり)

3. 主定理

上で示した定理 B' を使えば, 次の定理が証明できる.

定理 1 有界線形作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して, ランク 1 の作用素 R ($\|R\| < \epsilon$) が存在して, $A + R$ は NA で, かつ $\|A + R\| = \|A\|$.

証明) $A = UP$ と極分解し, 正作用素 P に対して, 定理 B' を使えば,

$$\|P\| = \|P + R\|, \|R\| < \epsilon, \|P + R\| \in \sigma_p(P + R)$$

になる. 固有値 $\|P + R\|$ の固有ベクトルを f とすれば, 定理 B' の証明から $Rf \perp \ker P$ が分かる. この事実を使えば

$$\begin{aligned} \|(A + UR)f\| &= \|U(P + R)f\| \\ &= \|(P + R)f\| \\ &= \|P + R\| \|f\| \\ &\geq \|A + UR\| \|f\| \end{aligned}$$

となるから, 求められているランク 1 作用素を UR とすればよい. (証明終わり)

定理 2 有界線形作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して, ランク 1 の作用素 R ($\|R\| < \epsilon$) が存在して, $A + R$ が NRA となる.

証明) $w(A) \in \overline{W(A)}$ として十分. $\operatorname{Re} A$ に対して定理 B' を適用すると

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} A + R)f &= \|\operatorname{Re} A + R\|f \\ &= \|\operatorname{Re} A\|f \\ &= w(\operatorname{Re} A)f \\ &= w(A)f \end{aligned}$$

となる. もし $w(A + R) = w(A)$ なら, 定理は明らかに正しいので, $w(A + R) > w(A)$ とすると,

$$\begin{aligned} w(A + R) &= w(\operatorname{Re} e^{i\theta}(A + R)) \\ &= r(\operatorname{Re} e^{i\theta}(A + R)) \\ &> w(A) \\ &\geq w(\operatorname{Re} e^{i\theta}A) \\ &= r(\operatorname{Re} e^{i\theta}A). \end{aligned}$$

ここで, 作用素 $\operatorname{Re} e^{i\theta}A$ と $\operatorname{Re} e^{i\theta}(A + R)$ にワイルの定理を適用すれば, 単位ベクトル g が存在して, $\operatorname{Re} e^{i\theta}(A + R)g = w(A + R)g$ となることが分かる. この時, 明らかに $|(A + R)g| = w(A + R)(g|g)$ である. (証明終わり)

4. シフト作用素

作用素に摂動を加えた場合、摂動の前後で数域や数域半径の変化を完全に予測することは難しいが、シフト作用素の摂動については多くの事実が分かっている ([4]). 本節では、シフト作用素について知られる既知の事実に着者らの考察を加えた結果について報告する. 具体的には、シフト作用素を、特定のランク 1 作用素によって摂動し、摂動後の数域について考察する.

例 1) $l^2(\mathbb{N})$ 上の片側シフト作用素 S (i.e. $Se_k = e_{k+1}$, ここで $\{e_k\}$ は $l^2(\mathbb{N})$ の正規直交基底) はランク 1 作用素 R で摂動すれば NRA にできる. 実際、自然数 n に対して

$$R_n := \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n e_k \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^n e_k \right)$$

とすると、ワイルの定理から $S + \epsilon R_n$ は十分大きな n に対して、NRA となる. さらに、 $W(S + \epsilon R_n) \not\ni -1$ かつ、 $W(S + \epsilon R_n) \ni -1$ なので $W(S + \epsilon R_n)$ は閉ではない.

例 2) 自然数 n に対して、

$$R_n e_k := a_k e_{k+1},$$

$a_n = 1, a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$) とする. もし、 $\epsilon > \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$ ならば $W(S + \epsilon R_n)$ は閉円盤となり $\epsilon \leq \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1$ ならば $W(S + \epsilon R_n)$ は開円盤となる.

例 3) 両側シフト作用素 U (i.e. $Ue_k = e_{k+1}$, ここで $\{e_k\}$ は $l^2(\mathbb{Z})$ の正規直交基底) を考える.

$$R_n e_k := a_k e_{k+1},$$

$a_n = 1, a_k = 0$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$) とする. もし、 $\epsilon > 0$ ならば $W(U + \epsilon R_n)$ は閉円盤となり、 $\epsilon = 0$ ならば $W(U + \epsilon R_n)$ は開円盤となる.

5. 新しい問題

数域ノルムを達成する作用素について議論してきた. 本節では、数域が閉になる作用素について得られた結果を報告する. 具体的に問題とするのは次の予想が成り立つか否かである.

予想 有界線形作用素 A と $\epsilon > 0$ に対して、コンパクト作用素 R ($\|R\| < \epsilon$) が存在して $A + R$ の数域が閉となる.

現在までに以下のような事実が分かっている.

定理 3 正規作用素 A と $\epsilon > 0$ に対してコンパクト作用素 R ($\|R\| < \epsilon$) が存在して、 $A + R$ の数域が閉となる.

参 考 文 献

- [1] I. D. Berg and B. Sims, *Denseness of operators which attain their numerical radius*, J. Austral. Math. Soc. Ser A **3** (1989), 130–133.
- [2] J. Lindenstrauss, *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1963), 139–148.
- [3] B. Sims, *On numerical range and its application to Banach algebra*, Ph.D. dissertation, University of Newcastle, Australia, 1972.
- [4] Tin-Yau Tam, *On a conjecture of Ridge*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3581–3592.