

Sur des conditions nécessaires pour l'équation d'évolution
pour que le problème de Cauchy soit bien posé
dans la classe de Gevrey.

Keiichiro KITAGAWA (Univ.d'Ehimé)

北 川 桂 一 郎 (愛媛大・理)

Il s'agit du problème de Cauchy homogène :

$$(PC) \quad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x) u(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T_0] \times \mathbb{R}^d \\ \partial_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x) & j=1, \dots, m \end{cases}$$

pour une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients de la classe de Gevrey.

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x) u(t, x) \equiv [\partial_t^m - \sum_{j=1}^m a_j(t, x; \partial_x) \partial_t^{m-j}] u(t, x) = 0$$

$$\text{où } a_j(t, x; \xi) = \sum_{\alpha, k} t^{\sigma(j\alpha k)} x^{\nu(j\alpha k)} a_{j\alpha k}(t, x) \xi^\alpha$$

$$\text{avec } x^{\nu(j\alpha k)} = x_1^{\nu_1(j\alpha k)} \dots x_d^{\nu_d(j\alpha k)} \text{ et } \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}.$$

Nous considérons des conditions nécessaires pour que ce problème de Cauchy soit bien posé dans la classe de Gevrey.

Sur ce sujet, nous mentionnons tout d'abord un travail de S. Mizohata^[9]. Il y a montré une condition nécessaire pour une équation de p-évolution : Cette condition pour $p=1$ est bien connue comme la condition d'hyperbolicité (Théorème de Lax-Mizohata). Depuis les recherches sont orientées en deux directions

indépendamment : le cas $p > 1$ et celui $p \leq 1$.

Au cas $p > 1$, nous citons des recherches sur la parabolicité, par exemple, de K. Igari^[1] et M. Miyake^[8].

Au cas $p \leq 1$, si les racines caractéristiques sont bien distinctes, la condition de S. Mizohata (condition d'hyperbolicité) est déjà suffisante. On a considéré donc les cas dégénérés où les racines ne sont plus distinctes : Parmi eux nous envisageons ici un cas particulier mais canonique où toutes les racines se coïncident à zéro ; Dans ce cas cette dégénérescence est représentée par celle des coefficients. Au cas où la multiplicité de racines est constante, cas représenté par $p < 1$, ce sont des recherches sur la condition de Levi. Nous considérons ici le cas où la multiplicité de racines est variable et que toutes les racines coïncident à zéro à l'origine : C'est juste le cas $p < 1$ à l'origine si l'on redéfinit le poids p ponctuellement. Nous en citons des recherches de V. Ja. Ivrii,^{[2],[3],[4]} T. mandai^[7] et S. Mizohata^{[13],[14],[16],[17]}.

Sur le cas où $p = 1$, il y a des recherches plus approfondies, dans la classe de Gevrey, sur la nécessité de l'hyperbolicité : nous en citons celles de T. Nishitani^[18] et S. Mizohata^[11].

Ces recherches ramifiées en trois directions différentes en apparence ne sont qu'une à faire comme la généralisation au cas dégénéré du théorème de S. Mizohata^[9]. Les améliorations de la méthode de S. Mizohata^[9] faites par lui-même^{[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17]} et Y. Takei^[20] nous permettent de généraliser le théorème de S. Mizohata^[9] au cas dégénéré actuel.

Sur cette généralisation, notre collègue T. Sadamatsu^[19] travaille dans la catégorie de fonctions C^∞ . Tandisqu'il traite le

cas à coefficients C^∞ , nous traitons le cas à coefficients de Gevrey. Bien qu'on puisse faire pareillement, le traitement du cas C^∞ est pas mal différent de celui au Gevrey et nous envoyons les lecteurs, au cas à coefficients C^∞ , à la note de T. Sadamatsu.

Signalons toutefois que l'on acquiert, au cas non kowalevskien ($p > 1$), plus d'informations par supposer les coefficients à la classe de Gevrey : plus réguliers sont les coefficients, plus on montre des conditions nécessaires.

Par comparaison aux travaux de V. Ja. Ivrii ou de Mandai cités ci-hauts, nous soulignons que nous envisageons le problème de Cauchy homogène et ceci à $t=0$ fixé.

Pour énoncer notre résultat nous commençons par explication de notre terminologie.

Soient $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $s = (s_1, \dots, s_d)$, $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d)$ tels que $0 \leq \delta_j < \rho_j \leq 1 \leq \tilde{s}_j \leq s_j < +\infty$, $1 < s_j$ ($j=1, \dots, d$)

Nous expliquons brièvement les classes de Gevrey. Soient, pour un voisinage Ω de l'origine de R^d ,

$$\gamma_R^s(\Omega) = \{f(x) \in C^\infty(\Omega); \forall K \text{ compact } \subset \Omega : \sup_{x \in K, \alpha} |f^{(\alpha)}(x)| / (\alpha!)^s R^s < \infty\}$$

$$\gamma^{(s)}(\Omega) = \bigcup_{R>0} \gamma_R^s(\Omega), \quad \gamma^{<s>}(\Omega) = \bigcap_{R>0} \gamma_R^s(\Omega)$$

$$W_R^s = \{f(x) \in C^\infty(R^d); \sup_{\alpha} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2} / (\alpha!)^s R^s < \infty\}$$

$$W^{(s)} = \bigcup_{R>0} W_R^s, \quad W^{<s>} = \bigcap_{R>0} W_R^s$$

$$\text{où } (\alpha!)^s = \alpha_1!^{s_1} \dots \alpha_d!^{s_d} \text{ et } R^s = R^{s_1 + \dots + s_d}.$$

Nous disons qu'une fonction de $\gamma^{(s)}(\Omega)$ ou de $W^{(s)}$ est d'indice (s) .

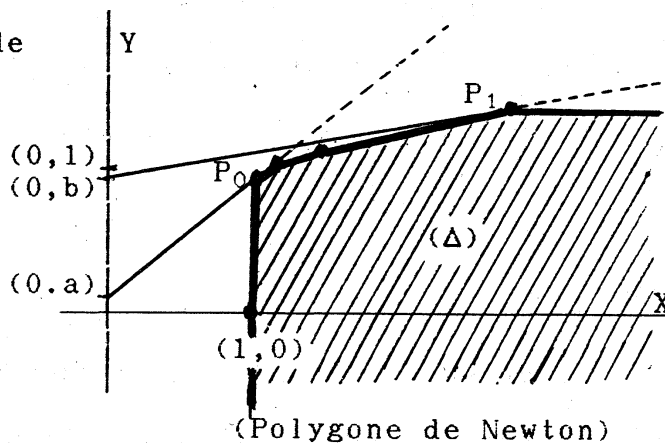
Nous supposons que les coefficients sont des fonctions d'indice (s) et nous considérons le problème de Cauchy dans la classe de Gevrey d'indice (s) .

Soient : $a = \max_j \frac{\rho_j}{s_j}$, et $b = \min_j \frac{\rho_j - \delta_j}{s_j}$.

Nous faisons correspondre à $(j\alpha k)$ le point $(1 + \frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{\rho \cdot \alpha - \delta \cdot v(j\alpha k)}{j})$, au plan X-Y ($\rho \cdot \alpha \equiv \rho_1 \alpha_1 + \dots + \rho_d \alpha_d$, $\delta \cdot v(j\alpha k) \equiv \delta_1 v_1(j\alpha k) + \dots + \delta_d v_d(j\alpha k)$).

Nous y ajoutons un point $(1,0)$ exprès. Nous appelons le polygone de Newton, noté par (Δ) , le plus petit polygone à côtés de pente non négative contenant tous ces points.

Soit P_0 le point de contact de la tangente au (Δ) , à pente non négative, tiré du point $(0,a)$: Quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ) , P_0 est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrémité gauche de ce côté.



Soit P_1 le point de contact de la tangente au (Δ) , à pente non négative, tiré de $(0,b)$: Quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ) , P_1 est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrémité gauche de ce côté. Et quand il n'y a pas de telle tangente, P_1 est convenu d'être pris pour le sommet à l'extrême droite du (Δ) . Soit $[P_0, P_1]$ l'ensemble de tous les sommets du (Δ) entre ces deux sommets, P_0, P_1 inclus.

Soit, pour un point $P \in [P_0, P_1]$,

$$p_P(\lambda)(t, x; \xi) \equiv \lambda^m - \sum_{(j\alpha k) \in \Gamma_P} a_{j\alpha k}(t, 0) x^{v(j\alpha k)} (i\xi)^{\alpha} \lambda^{m-j}$$

où $\Gamma_P \equiv \{(j\alpha k); (1 + \frac{\sigma(j\alpha k)}{j}, \frac{\rho \circ \alpha - \delta \circ v(j\alpha k)}{j}) = P\}$.

Disons que le problème de Cauchy (PC) est (s)-bien posé au cas suivants :

Version globale :

Les coefficients sont de $C^0([0, T_0], W^{(s)})$, et il existe un T ($0 < T \leq T_0$) tel que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in W^{(s)}$ ($j=1, \dots, m$), il existe une et une seule solution $u(t, x) \in C^m([0, T], H^\infty)$.

Version locale :

Les coefficients sont de $C^0([0, T_0], \gamma^{(s)}(\Omega_0))$ et il existe un T ($0 < T \leq T_0$) et un voisinage de l'origine $\Omega_1 \subset \Omega_0$ tels que, pour toutes les données $\varphi_j(x) \in \gamma^{(s)}(\Omega_0)$, il existe une et une seule solution $u(t, x) \in C^m([0, T], C^\infty(\Omega_1))$.

Théorème.

Pour que le problème de Cauchy (PC) soit (s)-bien posé, il faut que la partie réelle de la racine de $p_P(\lambda)(0, x; \xi) = 0$ soit non positive pour tous ρ, δ tels que $a \leq b$ et tout $P \in [P_0, P_1]$.

Remarques.

1) A ce théorème, si l'on veut remplacer la classe (s) par la classe <s>, au lieu de choisir P_0 "à l'extrémité gauche du côté", on choisit "à l'extrémité droite du côté" et on remplace la condition $a \leq b$ par $a < b$.

2) Ce théorème subsiste encore au cas C^∞ si l'on remplace (0.a) par l'origine, qu'on choisit P_0 "à l'extrémité droite du coté" comme ci-haut, que l'on suppose $0 \equiv a < b$ et qu'on remplace $W^{(s)}$ par H^∞ et $\gamma^{(s)}(\Omega)$ par $C^\infty(\Omega)$ respectivement.

La démonstration détaillée sera donnée dans [6]. Nous nous contentons ici de remarquer que la démonstration est faite par la méthode de micro-localisation de S. Mizohata tout pareillement à la démonstration du théorème inverse de Cauchy-Kowalevski [6], [10] : Seules différences sont d'une part on fait la localisation dépendant de n en x même et on met le poids suivant :

$$x_j \longrightarrow n^{-\delta_j} \quad \text{et} \quad \xi_j \longrightarrow n^{\rho_j} \quad (0 \leq \delta_j < \rho_j \leq 1 : j=1, \dots, d)$$

D'autre part, pour développer le produit des opérateurs pseudo-différentiels en une série asymptotique on a donc besoin d'une forme un peu différente de celle ordinaire.

Nous terminons cette note par montrer quelques exemples qui montrent que les résultats sont similaires à ceux de V. Ja. Ivrii.

Exemples.

$$(1) \quad L_1(t, x; \partial_t, \partial_x) = \partial_t^2 - a(t, x) x^{2\mu} \partial_x^2 - b(t, x) x^\nu \partial_x.$$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait

$$1) a(0, 0) \geq 0$$

$$2) \text{ Si } \mu > \nu, s \sim \frac{2\mu-\nu-1}{2\mu-\nu} s \text{ et } s \geq \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu}, \text{ alors on a } b(0, 0) = 0.$$

$$(2) \quad L_2(t, x; \partial_t, \partial_x) = \partial_t^2 - a(t, x) t^{2\mu} \partial_x^2 - b(t, x) t^\nu \partial_x.$$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

$$1) \text{ Si } \mu \leq \nu+1 \text{ ou que } \mu > \nu+1, s \leq \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}, (\text{sauf } s = s \sim \frac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}), \text{ alors on a}$$

$$a(0,0) \geq 0$$

2) Si $\mu > \nu + 1$ et $s \geq \frac{2\mu - \nu}{\mu - \nu - 1}$, alors on a $b(0,0) = 0$.

$$(3) \quad L_3(t, x; \partial_t, \partial_x) = \partial_t - a(t, x) x^\mu \partial_x^2 - b(t, x) x^\nu \partial_x.$$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

1) Si μ est paire, alors on a $\operatorname{Re} a(0,0) \geq 0$, et si μ est impaire, alors on a $\operatorname{Re} a(0,0) = 0$.

2) Si $\mu > 2\nu$, $s \leq \frac{\mu - \nu - 1}{\mu - \nu} s$ et $s \geq \frac{\mu - \nu}{\mu - 2\nu}$, alors on a $\operatorname{Im} b(0,0) = 0$.

$$(4) \quad L_4(t, x; \partial_t, \partial_x) = \partial_t - a(t, x) t^\mu \partial_x^2 - b(t, x) t^\nu \partial_x.$$

Pour que le (PC) soit (s)-bien posé, il faut que l'on ait :

1) Si $\mu \leq 2\nu + 1$ ou que $\mu > 2\nu + 1$ et $s \leq \frac{\mu - \nu}{\mu - 2\nu - 1}$, (sauf $s = s^* = \frac{\mu - \nu}{\mu - 2\nu - 1}$), alors on a $\operatorname{Re} a(0,0) \geq 0$.

2) Si $\mu > 2\nu + 1$ et $s \geq \frac{\mu - \nu}{\mu - 2\nu - 1}$, alors on a $\operatorname{Im} b(0,0) = 0$.

Bibliographie.

- [1] K. Igari : Well-Posedness of the Cauchy Problem for Some Evolution Equations. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 9 (1974) 613-629.
- [2] V. Ja. Ivrii - V. M. Petkov : Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed. Uspehi Mat. Nauk, 29(1974), 3-70. (Russian Math. Surveys, 29 (1974) 1-70).
- [3] V. Ja. Ivrii : Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes Sib. Math. J. 17-4-6 (1976) 921-931. (Sib. Mat. Z. 17-6 (1976)

(1256-1270.)

- [4] V.Ja.Ivrii : Conditions that the Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity be well posed in Gevrey classes. Soviet Math.Dokl. 16-2 (1975) 501-503.
- [5] K.Kitagawa : Sur le théorème de Cauchy-Kowalevski — Une remarque sur le mémoire du même titre de S.Mizohata.
(en préparation)
- [6] K.Kitagawa : Sur des conditions nécessaires pour l'équation d'évolution pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans la classe de Gevrey. (en préparation)
- [7] T.Mandai : Generalized Levi conditions for weakly hyperbolic equations - An attempt to treat the degeneracy with respect to the space variables. Publ.Res.Inst.Math.Sci.22-1 (1986) 1-23.
- [8] M.Miyake : Degenerate parabolic differential equations — Necessity of the well-posedness of the Cauchy problem. J.Math. Kyoto Univ. 14 (1974) 461-476.
- [9] S.Mizohata : Some remarks on the Cauchy problem. J.Math, Kyoto Univ., 1-1 (1961) 109-127.
- [10] S.Mizohata : On the Cauchy-Kowalevski theorem. Math.Anal.& Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7 B (1981) (Acad.Press) 617-652.
- [11] S.Mizohata : On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes. Hokkaido Math. J. 12-3 (1983) 298-310.
- [12] S.Mizohata : On analytic regularities, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J.Vaillant), Hermann (1985), 82-105

- [13] S.Mizohata : Sur l'indice de Gevrey, Séminaire sur Propagation des singularités et opérateurs différentiels (J.Vaillant), Hermann (1985) 106-120.
- [14] S.Mizohata : On the Cauchy problem for hyperbolic equations in C^∞ and Gevrey classes. Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Matematica (1986) (Springer)
- [15] S.Mizohata : On the Cauchy problem. (Lecture note at Wuhan) Acad. Press. (1986)
- [16] S.Mizohata : On the Cauchy problem for hyperbolic equations and related problems (micro-local energy method) Taniguchi Symposium "Hyperbolic Equations and Related Topics".
- [17] S.Mizohata : On the Levi condition. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques et holomorphes (J.Vaillant).
- [18] T.Nishitani : On the Lax-Mizohata Theorem in the Analytic and Gevrey Classes. Proc. Japan Acad. 53--A-3 (1977) 88-90
- [19] T.Sadamatsu : On a necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for evolution equations. (en preparation)
- [20] Y.Takei : Mizohata's micro-localization. Master Thesis, Kyoto Univ. 1986.