

一般 Lorentz 群上の調和解析

佐大 理工 牟田 洋一

§ 0. 序

G を中心有限な連結半単純 Lie 群, K をその極大 compact 部分群とする. 今 Γ が G の離散部分群で $\Gamma \backslash G$ が compact になるようなものであれば, Hilbert 空間 $L^2(\Gamma \backslash G)$ における G の正則表現 U は重複度有限な可算個の既約表現の和に分れる:

$$U = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \pi_j. \quad (1)$$

右辺に現われる既約表現のうち class 1 の表現の spectrum — G/K の laplacian の固有値ではかったもの — の漸近行動はいくつかの G に対して計算されている ([3], [4], [11]).

Gangolli [3] は, π_j のうち fixed $\lambda \in K$ を含むものについて spectrum の漸近行動を求めると提唱している. 我々は一般 Lorentz 群に対してこの問題を考察しよう.

§1. 一般 Lorentz 群 とその表現

n を 2 以上の整数とする. R^{n+1} の正則一次変換 $g = (g_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ で 2 次形式

$$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

を不変にするものは $GL(n+1, R)$ の閉部分群, よって Lie 群をつくる. この identity component $G_+(n)$ を $n+1$ 次の一般 Lorentz 群とよぶ.

$$K = \left\{ k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} : k_1 \in SO(n) \right\},$$

$$A_+ = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 1 \end{pmatrix} : t \in R \right\},$$

$$N = \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Delta}{2} & \xi_2 \cdots \xi_n \\ \frac{\Delta}{2} & 1 - \frac{\Delta}{2} & \xi_2 \cdots \xi_n \\ \xi_2 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ \xi_n & -\xi_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} : \xi_i \in R, \Delta = \sum \xi_i^2 \right\}$$

はそれぞれ $G = G_+(n)$ の compact, abelian および nilpotent subgroup で, $G = K A_+ N$ はその直積分解を与える. $M = Z_K(A_+)$ は $m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}$, $m_1 \in SO(n-1)$ の全体である.

compact 群 $K \cong SO(n)$ の既約 unitary 表現 τ_λ はその最高 weight λ によって定まる.

a) $n = 2l+1$ ($l \geq 1$) のとき.

$$\lambda = (m_1, m_2, \dots, m_l) \in Z^l : m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_l \geq 0$$

の全体が同値類の集合をつくる.

b) $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき.

$$\Lambda = (m_1, m_2, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l : m_1 \geq \dots \geq m_{l-1} \geq |m_l|$$

の全体が同値類の集合をつくる.

$M \cong SO(n-1)$ の表現についても同様である.

次に G の表現について述べる. 我々にとって *continuous* および *discrete* の *principal series* の表現が特に重要である.

a) $n = 2l+1$ ($l \geq 1$) のとき.

$\text{rank } G > \text{rank } K$ である discrete series はない. $M \cong SO(2l)$ の既約表現 σ_λ と $\nu \in \mathcal{R} \cong \hat{A}_+$ に対し, $\sigma_\lambda \otimes \nu$ が induce される G の表現を $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}$ で表わせば

$$\left\{ \mathcal{D}_{\lambda, \nu} : \begin{array}{l} \lambda = (m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}^l, \quad \nu \in \mathcal{R} \\ m_1 \geq \dots \geq m_{l-1} \geq |m_l| \end{array} \right\}$$

が *continuous series* を成す. $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}$ の character $\Theta_{\lambda, \nu}$ は G 上の tempered distribution である.

Plancherel formula は, $\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$c \cdot \varphi(1) = \sum_{\lambda \in \hat{M}} P(\lambda) \int_{\mathcal{R}} \Theta_{\lambda, \nu}(\varphi) \cdot \prod_{j=1}^l ((m_j + l - j)^2 + \nu^2) d\nu \quad (2)$$

に与えられている. ここに

$$P(\lambda) = \prod_{i < j} ((m_i + l - i)^2 - (m_j + l - j)^2)$$

であり, c は Haar 測度のとり方で決まる $constant > 0$.

b) $n = 2\ell$ ($\ell \geq 1$) のとき.

$\text{rank } G = \text{rank } K = \ell$ であるから, a) で述べた continuous series のほかに discrete series も存在する. discrete series の表現は $\lambda = (m_1, \dots, m_{\ell-1}) \in \hat{M}$ と $m_{\ell-1} \geq p > 0$ なる $p \in \mathbb{Z}$ および $+$, $-$ によって記述できる. さらに

$$D_{\lambda, p}^+, D_{\lambda, p}^- : \lambda = (m_1, \dots, m_{\ell-1}) \in \hat{M}, m_{\ell-1} \geq p > 0$$

で表す.

Plancherel formula は, $\forall \varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$\begin{aligned} c \cdot \varphi(1) &= \sum_{\lambda, p} Q(\lambda, p) \{ \Theta_{\lambda, p}^+(\varphi) + \Theta_{\lambda, p}^-(\varphi) \} \\ &+ \sum_{\lambda \in \hat{M}} R(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \Theta_{\lambda, v}(\varphi) \cdot \prod_{j=1}^{\ell-1} ((m_j + \ell - j - \frac{1}{2})^2 + v^2) \cdot v \, \text{th} \pi v \, dv \quad (3) \end{aligned}$$

により与えられる. ここに $\Theta_{\lambda, p}^\pm$ は表現 $D_{\lambda, p}^\pm$ の character,

$$\begin{aligned} Q(\lambda, p) &= (p - \frac{1}{2}) \prod_{j=1}^{\ell-1} ((m_j + \ell - j - \frac{1}{2})^2 - (p - \frac{1}{2})^2) \\ &\times \prod_{j=1}^{\ell-1} (m_j + \ell - j - \frac{1}{2}) \cdot \prod_{i < j} ((m_i + \ell - i - \frac{1}{2})^2 - (m_j + \ell - j - \frac{1}{2})^2), \end{aligned}$$

$$R(\lambda) = \prod_{j=1}^{\ell-1} (m_j + \ell - j - \frac{1}{2}) \cdot \prod_{i < j} ((m_i + \ell - i - \frac{1}{2})^2 - (m_j + \ell - j - \frac{1}{2})^2),$$

また c' は a) での c と同様の意味をもつ.

§ 2. 関数環 $\mathcal{H}(G)$, 球関数 および Fourier 変換

$G = G_+(n)$ の Schwartz space $\mathcal{S}(G)$ は, vector space の構造のほか

$$(\varphi \circ \psi)(g) = \int_G \varphi(g_1^{-1}g) \psi(g_1) dg_1,$$

$$\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$$

を考えると $\mathcal{S}(G)$ は topological $*$ -algebra となる. K の既約表現 τ_λ を一つ固定する. その次元を d_λ , character を

$$\chi_\lambda(k) = d_\lambda \cdot \text{Tr}[\tau_\lambda(k)]$$

と書く.

$$\bar{\chi}_\lambda \circ \varphi = \varphi \circ \bar{\chi}_\lambda = \varphi,$$

$$\int_K \varphi(kgk^{-1}) dk = \varphi(g) \quad (g \in G)$$

をみたす $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ の全体 $\mathcal{H}(G)$ は $\mathcal{S}(G)$ の可換な sub-algebra である ([15] (ii)). したがって特に $\forall \pi \in \hat{G}$ は τ_λ を高々 1 回しか含まない.

さて可換 topological $*$ -algebra の調和解析の一般論によれば, $\mathcal{H}(G)$ の unitary characters を見出し Fourier 変換を実行することになるはずである.

実際, τ_λ を含む G の既約 unitary 表現 π の character を Θ_π とすれば, $\forall \varphi \in \mathcal{H}(G)$ に対し

$$\Theta_\pi(\varphi) = d_\lambda \cdot \int_G \varphi(g) \zeta_\pi(g) dg$$

が成立つ. ここに ζ_π は, Godement [5] によって define された表現 π に対する τ_Λ -spherical function であり, 以下の性質をみたす:

$$(i) \quad \zeta_\pi(kgk^{-1}) = \zeta_\pi(g) \quad \forall g \in G, k \in K,$$

$$(ii) \quad \chi_\Lambda \circ \zeta_\pi = \zeta_\pi \circ \chi_\Lambda = \zeta_\pi,$$

$$(iii) \quad \int_K \zeta_\pi(kgk^{-1}g') dk = \zeta_\pi(g) \zeta_\pi(g'),$$

(iv) ζ_π は $\zeta_\pi(1) = 1$ をみたす G 上の positive-definite な関数である,

(v) ζ_π は Ω の eigenfunction である.

そこでこれを Λ -spherical functions ζ_π の全体 $\mathcal{S}_\Lambda(G)$ の dual をなし, $\varphi \in \mathcal{S}_\Lambda(G)$ の Fourier 変換を

$$\tilde{\varphi}(\pi) = \int_G \varphi(g) \zeta_\pi(g) dg \quad (4)$$

によって define できることがわかる.

§1 で述べた continuous series の表現 $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}$ において τ_Λ を含むのは $\lambda \in \hat{M}$ かつ τ_Λ/M に含まれるとき, かつそのときに限る. このような $\lambda \in \hat{M}$ の全体を $\hat{M}(\Lambda)$ で表す. $\lambda \in \hat{M}(\Lambda)$ のとき $\mathcal{D}_{\lambda, \nu}$ の表現空間において実際に表現作用素の trace を計算することにより, 対応する Λ -spherical function $\zeta_{\lambda, \nu}$ を求めることができる. $\lambda \in \hat{M}(\Lambda)$ の character を χ_λ と書くとき $\zeta_{\lambda, \nu}$ は

$$\zeta_{\lambda, \nu}(g) = \int_K \beta_{\lambda, \nu}(kgk^{-1}) dk, \quad (5)$$

$$\beta_{\lambda, \nu}(ka_t n) = \frac{(\chi_{\lambda} \circ \gamma_{\lambda})(k)}{(\chi_{\lambda} \circ \gamma_{\lambda})(1)} e^{-\left(\frac{n-1}{2} + \nu\right)t}$$

と表わせる. 更に $\zeta_{\lambda, \nu}$ は微分作用素 Ω の eigenfunction であるから, 対応する eigenvalue は

$$-(\Lambda, \Lambda + 2\delta) + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \nu^2 \quad (6)$$

である.

Fourier 変換 $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ に対し, Plancherel formula は §1 の結果を用いて次のように表わすことができる:

a) $n = 2l + 1$ ($l \geq 1$) のとき.

$$c \cdot \varphi(1) = d_{\lambda} \cdot \sum_{\lambda \in \hat{M}(\Lambda)} P(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(\lambda, \nu) \cdot \prod_{j=1}^l ((n_j + l - j)^2 + \nu^2) d\nu \quad (7)$$

b) $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき.

$$\begin{aligned} c \cdot \varphi(1) &= d_{\lambda} \cdot \sum_{\lambda, p}^{\Lambda} Q(\lambda, p) \{ \zeta_{\lambda, p}^{+}(\varphi) + \zeta_{\lambda, p}^{-}(\varphi) \} \\ &+ d_{\lambda} \cdot \sum_{\lambda \in \hat{M}(\Lambda)} R(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(\lambda, \nu) \cdot \prod_{j=1}^{l-1} \left((n_j + l - j - \frac{1}{2})^2 + \nu^2 \right) \nu \tanh \pi \nu d\nu. \quad (8) \end{aligned}$$

§ 3. Λ -automorphic forms.

§0 で導入した Γ に更に条件

" $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1$ は G/K に fixed point をもたない"

をつけ加える. このとき $\Gamma \backslash G/K$ は C^∞ -manifold で, $\Gamma \backslash G$ は $\Gamma \backslash G/K$ 上の K を structure group とする fiber bundle である. $\Gamma \backslash G$ に表現 $\tau_\lambda = \{\tau_\lambda, F\}$ を associate して得られる vector bundle $(\Gamma \backslash G) \times_K F \rightarrow \Gamma \backslash G/K$ を $\mathcal{F}_\lambda$ で表わす:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \backslash G & & \mathcal{F}_\lambda \\ \downarrow & \nearrow \tau_\lambda(k) & \\ \Gamma \backslash G/K & & \end{array}$$

vector bundle $\mathcal{F}_\lambda$ の 0-forms, 1-forms, ... のつくる空間 $\mathcal{A}^0 = C^\infty(\mathcal{F}_\lambda)$, $\mathcal{A}^1$, ... に F の内積と $\Gamma \backslash G$ の invariant measure から導かれる内積を入れ, それによる $C^\infty(\mathcal{F}_\lambda)$ の completion を $L^2(\mathcal{F}_\lambda)$ とする. forms の間の differentiation d とその adjoint δ

$$\mathcal{A}^0 \xrightleftharpoons[\delta]{d} \mathcal{A}^1 \xrightleftharpoons[\delta]{d} \dots$$

を普通のように定め, $C^\infty(\mathcal{F}_\lambda)$ 上の differential operator

$$\Delta = \delta d$$

を $\mathcal{F}_\lambda$ の laplacian と呼ぶ. Δ は, $f \in C^\infty(\mathcal{F}_\lambda)$ に対し

$$\Delta f = \Omega f + (1, 1+2\delta)f \quad (9)$$

により作用する.

さて, $\Gamma \backslash G/K$ は compact であるから, Δ は重複度有限の discrete spectrum を有し, eigenvalue はすべて ≥ 0

である. $C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ の元で, Δ の eigenfunction になるものを Λ -automorphic form と呼ぶ. eigenvalue $r \geq 0$ に属する Λ -automorphic forms のなす vector space $A(\Gamma, \Lambda, r)$ は常に有限次元である. そして U の分解 (1) に現われる π_j のうち π_Λ^* を含み

$$\pi_j(\Omega) = r - (\Lambda, \Lambda + 2\delta)$$

となるものの全体を Π_r^* とおけば, [9], [10] (ii) と (6) により

$$\dim A(\Gamma, \Lambda, r) = \sum_{\pi \in \Pi_r^*} (U : \pi) \quad (10)$$

であることが導かれる.

$C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ の completion を $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$, Δ の相異なる eigenvalues を

$$0 \leq r_0 < r_1 < \dots \uparrow \infty$$

とすれば

$$L^2(\mathcal{F}_\Lambda) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} A(\Gamma, \Lambda, r_j). \quad (11)$$

$\varphi \in \mathcal{H}(G)$ に対し, $C^\infty(G) \otimes \text{Hom}(F, F)$ の元 A_φ を

$$A_\varphi(f) = \int_K \varphi(gk) \tau_\Lambda(k) dk \quad (12)$$

により, また $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ の有界作用素 T_φ を

$$(T_\varphi f)(g) = \int_G A_\varphi(g_1^{-1}g) f(g_1) dg_1 \quad (13)$$

によって define すると, $\{T_\varphi; \varphi \in \mathcal{H}(G)\}$ は互に commute する $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ の compact, normal operators の族をなし, 対応 $\varphi \rightarrow T_\varphi$ は $\ast$ -algebra $\mathcal{H}(G)$ の $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ における表現である. したがって, Hilbert 空間 $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ は $T_\varphi, \varphi \in \mathcal{H}(G)$ の同時固有空間の可算和に分解する:

$$L^2(\mathcal{F}_\Lambda) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}(\omega_j). \quad (14)$$

ここに各 $\mathcal{H}(\omega_j)$ は有限次元で, $\forall f \in \mathcal{H}(\omega_j), \forall \varphi \in \mathcal{H}(G)$ に対し

$$T_\varphi f = \omega_j(\varphi) f \quad (15)$$

が成立つ. ω_j は $\mathcal{H}(G)$ の unitary character である. そこで今

[仮定 I]: ' ω_j はすべて G 上の連続関数である'

を認めるならば, [5] に基づいて, ω_j は

$$\zeta_{\lambda, \nu}, \quad \zeta_{\lambda, \rho}^{\pm} : \lambda \in \hat{M}(\Lambda), \nu \in \mathbb{R}, \lambda > \rho > 0$$

のいずれかに等しいことがわかる. しかも $\mathcal{F}_\Lambda$ を含む discrete series の表現は有限個しかないから, 有限個を除いて ω_j は $\zeta_{\lambda, \nu}$ のいずれかに一致する. 今 ω_j があらずに等しく,

$$\Omega \zeta = (r_i - (1, 1+2\delta)) \zeta \quad (16)$$

であるならば, $\forall f \in \mathcal{H}(\omega_j) \cap C^\infty(\mathcal{F}_\Lambda)$ に対し

$$T_{\Omega\varphi} f = S(\Omega\varphi)f \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{H}_\Lambda(G) \quad (17)$$

が成立つ. ここで φ を $\mathcal{H}_\Lambda(G)$ の δ -sequence $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ におきかえて $\alpha \rightarrow \infty$ とすることにより

$$\Omega f = (r_i - (\Lambda, \Lambda + 2\delta))f$$

が得られる. このことより $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ は有限個の $\mathcal{H}(\omega_j)$ の direct sum として書けることがわかる. 以上をまとめて

定理 1. Hilbert space $L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ の 2 つの分解 (11), (14) において, 高々有限個のを除き $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ は有限個の $\mathcal{H}(\omega_j)$ の直和として表わされる. また表現 U の分解 (1) と $A(\Gamma, \Lambda, r_i)$ の次元の間には等式 (10) が成立つ.

次に φ を $\mathcal{H}_\Lambda(G)$ に属する関数で 級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} A_\varphi(g_1^{-1} \gamma g) \quad (18)$$

が $G \times G$ 上の $\text{Hom}(F, F)$ -valued continuous function $B_\varphi(g, g_1)$ に広義一様, 絶対収束するものと仮定しよう. このとき

$B_\varphi(g, g_1)$ は $\Gamma \backslash G \times \Gamma \backslash G$ 上の関数であり, $\forall f \in L^2(\mathcal{F}_\Lambda)$ に対し

$$(T_\varphi f)(g) = \int_{\Gamma \backslash G} B_\varphi(g, g_1) f(g_1) dg_1 \quad (19)$$

が成立つ.

$L^2(\mathcal{F}_\lambda)$ の subspace $\mathcal{H}(\omega_j)$ ($j=1, 2, \dots$) の orthonormal basis を

$$\{f_i^{(j)}; 1 \leq i \leq K_j\} \quad (K_j = \dim \mathcal{H}(\omega_j))$$

とすれば, $f_i^{(j)}$ の全体は $L^2(\mathcal{F}_\lambda)$ の orthonormal basis をなす.

次の Lemma が成立つ:

Lemma. X を compact manifold, dx を X の volume element, F を有限次元 Hilbert space とせよ. $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H} \subset L^2(X) \otimes F$ なる Hilbert space とし, 連続核 $B \in C(X^2) \otimes \text{Hom}(F, F)$ をもつ $\mathcal{H}$ 上の positive integral operator T を考える:

$$(Tf)(x) = \int_X B(x, y) f(y) dy \quad f \in \mathcal{H}.$$

T は当然 discrete spectrum を有するが, T の eigenvalues と対応する eigenfunctions のつくる $\mathcal{H}$ の orthonormal basis を

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

$$f_1, f_2, \dots$$

とすれば級数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(x) \otimes f_j(y)$$

は X^2 上一様, 絶対 に $B(x, y)$ に収束する.

この Lemma に よ り は, 我々の kernel B_φ は一様収束級数

$$B_\varphi(g, g_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\varphi) \sum_{i=1}^{K_j} f_i^{(j)}(g) \otimes f_i^{(j)}(g_1) \quad (20)$$

で表わされる. よって T_φ の trace は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma G} \text{Tr } B_\varphi(g, g) dg &= \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(\varphi) \sum_{i=1}^{K_j} \int_{\Gamma G} \text{Tr}(f_i^{(j)}(g) \otimes f_i^{(j)}(g)) dg \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} K_j \cdot \omega_j(\varphi) \end{aligned} \quad (21)$$

に等しいが, 左辺は更に

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma G} \text{Tr } A_\varphi(g^{-1}\gamma g) dg = d_\Lambda^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma G} \varphi(g^{-1}\gamma g) dg$$

となる. Γ を conjugate classes の和に分け, class に関する和を Σ' , $\gamma \in \Gamma$ の G における centralizer を G_γ , Γ_γ と書けば上式は

$$d_\Lambda^{-1} \cdot \sum'_{\{\gamma\}} \text{vol}(\Gamma_\gamma | G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} \varphi(g^{-1}\gamma g) d_\gamma g \quad (22)$$

に等しい. $d_\gamma g$ は $G_\gamma \backslash G$ での invariant measure である.

これが我々の trace formula である.

§ 4. Asymptotic behaviour of spectrum of the laplacian.

vector bundle E_n の laplacian Δ の相異なる固有値を

$$0 \leq r_0 < r_1 < \dots \uparrow \infty$$

とし, $\forall r > 0$ に対して

$$N(r) = \sum_{r_i < r} r_i \cdot \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i) \quad (23)$$

とおく. 定理1によって, $r \rightarrow \infty$ のときの $N(r)$ の漸近行動は, U の分解(1)に現われた成分で, τ_Λ^* を含み, 主系列に属するものの asymptotic behaviour を表わしている. 我々の問題は

“ $r \rightarrow \infty$ のときの $N(r)$ の asymptotic behaviour を求めること”
である. そのため, $N(r)$ の Laplace 変換

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha r} dN(r) \quad (\alpha > 0) \quad (24)$$

が theta function

$$\mathrm{Tr}(e^{-\alpha \Delta}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha r_i} \cdot \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i) \quad (25)$$

に等しいことに着目し, heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Delta u = 0 \quad (26)$$

の elementary solution $B_\alpha(g, g_1)$ を構成する. $B_\alpha(g, g_1)$ は $C^\infty(\Gamma G \times \Gamma G) \otimes \mathrm{Hom}(F, F)$ の関数であるから, これを (9) に基づいて考えられる方程式

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + (\Omega + (\Lambda, \Lambda + 2\delta))A_\alpha = 0 \quad (27)$$

の (12) の形の解 A_α を用いて

$$B_{\alpha}(g, g_1) = \sum_{\gamma \in \Gamma} A_{\alpha}(g_1^{-1} \gamma g)$$

なる形で求めた。 (27) の解を得るために

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha}}{\partial \alpha} + (\Omega + (\Lambda, \Lambda + 2\delta)) \mathcal{E}_{\alpha} = 0 \quad (28)$$

の解 $\mathcal{E}_{\alpha}$ を $\mathcal{H}_{\Lambda}(G)$ の中に求める。

a) $n = 2l + 1$ ($l \geq 1$) のとき。

(28) の両辺を $\zeta_{\lambda, \nu}$ により Fourier 変換すれば

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}}{d\alpha} + (l^2 + \nu^2) \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha} = 0.$$

この方程式の解として $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}(\lambda, \nu) = e^{-\alpha(l^2 + \nu^2)}$ を採ることに
できる。これを逆変換 (7) で変換した関数

$$\mathcal{E}_{\alpha}(g) = c^{-1} d_{\Lambda} \sum_{\lambda \in \hat{M}(\Lambda)} P(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(l^2 + \nu^2)} \overline{\zeta_{\lambda, \nu}(g)} \prod_{j=1}^l ((n_j + l - j)^2 + \nu^2) d\nu \quad \dots\dots\dots (29)$$

は $\mathcal{H}_{\Lambda}(G)$ に属する。これは確かに (28) を満たす。

b) $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき。

discrete series の表現に対応する Λ -spherical function $\zeta_{\lambda, p}^{\pm}$ は central eigendistribution である。 $\Omega + (\Lambda, \Lambda + 2\delta)$ に対する eigenvalue を $\rho_{\lambda, p}^{\pm}$ とすれば

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha}(g) = & c^{-1} d_{\Lambda} \sum_{\lambda, p}^{\Lambda} Q(\lambda, p) \{ e^{-\alpha \rho_{\lambda, p}^{+}} \overline{\zeta_{\lambda, p}^{+}(g)} + e^{-\alpha \rho_{\lambda, p}^{-}} \overline{\zeta_{\lambda, p}^{-}(g)} \} \\ & + c^{-1} d_{\Lambda} \sum_{\lambda \in \hat{M}(\Lambda)} R(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha((l-\frac{1}{2})^2 + \nu^2)} \overline{\zeta_{\lambda, \nu}(g)} \prod_{j=1}^{l-1} ((n_j + l - j - \frac{1}{2})^2 + \nu^2) \nu \tanh \pi \nu d\nu \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

が (28) をみたす $\mathcal{H}(G)$ の元である。

$E_\alpha(g) \in \mathcal{H}(G)$ を上に define したときとして

$$A_\alpha(g) \equiv \int_K E_\alpha(gk) \tau_\Lambda(k) dk \quad (31)$$

とおけば、これは (27) を満足する。そこで

$$B_\alpha(g, g_1) = \sum_{\gamma \in \Gamma} A_\alpha(g_1^{-1} \gamma g) \quad (32)$$

によって $B_\alpha(g, g_1)$ を define した。右辺の収束性を一般に示すことができないので

[仮定 II]: “(32) の右辺は $G \times G$ 上 絶対かつ広義一般に収束する”

を設けて議論をすすめる。

この仮定の下に定まる $B_\alpha(g, g_1)$ は $\Gamma \backslash G \times \Gamma \backslash G$ 上の $\text{Hom}(F, F)$ -valued C^∞ -function で、vector bundle F_Λ 上の heat equation (26) の elementary solution であることがわかる。

$B_\alpha(g, g_1)$ は continuous hermitian kernel であり、 $\Gamma \backslash G$ は compact であるから

$$(T_\alpha f)(g) = \int_{\Gamma \backslash G} B_\alpha(g, g_1) f(g_1) dg_1 \quad (33)$$

で define される $T_\alpha = T_{E_\alpha}$ は hermitian compact. 定理 1 に基づいて

$$\mathcal{H}(\omega_j) \subset A(\Gamma, \Lambda, r_i)$$

とすれば, 簡単な計算により

$$f \in \mathcal{H}(\omega_j) \subset A(\Gamma, \Lambda, r_i) \Rightarrow T_\alpha f = e^{-\alpha r_i} f \quad (34)$$

なることがわかる. continuous kernel をもつので T_α は finite trace

$$\text{Tr}(T_\alpha) = \int_{\Gamma \setminus G} \text{Tr} B_\alpha(g, g) dg$$

を有することからわかるが, 定理 1 と trace formula により次の定理が得られる:

定理 2 (theta relation). $N(r)$ およびその Laplace 変換 $\mathcal{L}(\alpha)$ は well-defined であり, 更に等式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha r_i} \dim A(\Gamma, \Lambda, r_i) \\ &= d_n^{-1} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\Gamma \setminus G} E_\alpha(g^{-1}\gamma g) dg \\ &= d_n^{-1} \cdot \sum'_{\{\gamma\}} \text{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma \backslash G} E_\alpha(g^{-1}\gamma g) d_\gamma g \end{aligned} \quad (35)$$

が成立つ.

さて, $\alpha \rightarrow 0$ のときの $\mathcal{L}(\alpha)$ の behaviour を調べよう.

定理 2 より

$$d_1 \cdot L(\alpha) = \text{vol}(\Gamma \backslash G) E_\alpha(1) + \sum_{\gamma \neq 1} \int_{\Gamma \backslash G} E_\alpha(g^{-1} \gamma g) dg \quad (36)$$

である。単位元以外の Γ の元 γ は G/K に fixed point をもたないから

$$\{g^{-1} \gamma g : g \in G, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1\}$$

は K と交わらない G の closed subset をなす。このことから

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ のとき } \sum_{\gamma \neq 1} \int_{\Gamma \backslash G} E_\alpha(g^{-1} \gamma g) dg \rightarrow 0$$

を示すことが出来る。よって (36) の右辺第 1 項について考えればよい。

a) $n = 2l + 1$ ($l \geq 1$) のとき。

(29) より

$$E_\alpha(1) = c^{-1} \cdot d_1 \cdot \sum_{\lambda \in \hat{M}(A)} P(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(l^2 + v^2)} \cdot \prod_{j=1}^l ((m_j + l - j)^2 + v^2) dv$$

であるが、右辺は直接計算でき、 $\alpha \rightarrow 0$ のときその主要部は

$$E_\alpha(1) \sim c^{-1} \cdot d_1 \cdot \sqrt{\pi} \frac{(2l-1)!!}{2^l} \left(\sum_{\lambda \in \hat{M}(A)} P(\lambda) \right) \alpha^{-(l+\frac{1}{2})} \quad (37)$$

となる。

b) $n = 2l$ ($l \geq 1$) のとき。

(30) より

$$E_\alpha(1) = c^{-1} \cdot d_1 \cdot \sum_{\lambda, p}^A (e^{-\alpha p_{\lambda, r}^+} + e^{-\alpha p_{\lambda, r}^-}) Q(\lambda, p)$$

$$+ c^{-1} d_n \sum_{\lambda \in \hat{M}(n)} R(\lambda) \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha((l-\frac{1}{2})^2 + v^2)} \prod_{j=1}^{l-1} ((m_j + l - j - \frac{1}{2})^2 + v^2) v \, \text{th} \pi v \, dv$$

であるが、右辺第一項は $\alpha \rightarrow 0$ のとき l に無関係な定数に近

づく。第二項については

$$\int_0^\infty e^{-\alpha v^2} v^{l+2p} \, \text{th} \pi v \, dv \sim \frac{p!}{2} \alpha^{-(p+1)}$$

であることに注意すれば

$$E_\alpha(1) \sim c^{-1} d_n (l-1)! \left(\sum_{\lambda \in \hat{M}(n)} R(\lambda) \right) \cdot \alpha^{-l} \quad (38)$$

なることがわかる。したがって、 $\alpha \rightarrow 0$ のとき常に

$$Z(\alpha) \sim C_G \cdot \text{vol}(\Gamma \backslash G) \cdot \alpha^{-n/2}$$

或いは Tauber 型定理により次のように表わせる：

定理 3. $G = G_+(n)$ において、 $r \rightarrow \infty$ のとき $N(r)$ の behaviour は

$$N(r) \sim \frac{C_G \cdot \text{vol}(\Gamma \backslash G)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^{\frac{n}{2}}$$

に従う。ここで C_G は

$$C_G = \begin{cases} c^{-1} \sqrt{\pi} \frac{(2l-1)!!}{2^l} \left(\sum_{\lambda \in \hat{M}(n)} P(\lambda) \right) & (n=2l+1 \text{ のとき}) \\ c^{-1} (l-1)! \left(\sum_{\lambda \in \hat{M}(n)} R(\lambda) \right) & (n=2l \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる constant である。

REFERENCES

- [1] J.G.Arthur, Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one, Ph.D. Thesis Yale Univ., 1970
- [2] H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer, 1955.
- [3] R. Gangolli, Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces, Acta Math.121 (1968) 151-192.
- [4] I.M.Gelfānd & I.I.Pyatetskii-Shapiro, (i) Unitary representations in homogeneous spaces with discrete stationary groups, Doklad. Akad. nauk SSSR. 147-1(1962) 17-20.
(ii) Representation theory and automorphic functions, (Generalized functions, vol.6) Saunders Company, 1969.
- [5] R. Godement, A theory of spherical functions I, Trans. Amer. Math. Soc. 73(1952) 496-556.
- [6] T. Hirai, (i) On irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad. 38(1962) 258-262
(ii) The Plancherel formula for the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad. 42(1965) 323-326.
- [7] R.P.Langlands, Dimension of spaces of automorphic forms, Proc. Sympos. Pure Math.,vol 9, Amer. Math. Soc., 1966, 253-257.
- [8] R. Lipsman, The dual topology for the principal and discrete series on semisimple groups, Trans. Amer. Math. Soc. 152(1970) 399-412.

- [9] Y. Matsushima, A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 1(1967) 99-109.
- [10] Y. Matsushima & S. Murakami, (i) On vector bundle-valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds, Ann. of Math. 78(1963) 365-416.
(ii) On certain cohomology groups attached to hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. 5(1968) 223-241.
- [11] H. P. McKean, Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surfaces, Comm. pur. appl. math. 25(1972) 225-246.
- [12] K. Okamoto, Harmonic analysis on homogeneous vector bundles Conf. Harmonic Anal. Proc. 1971, Springer, 1972.
- [13] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20(1956) 47-87.
- [14] Y. Shimizu, An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo 16(1969) 13-51.
- [15] R. Takahashi, (i) Sur les fonction spheriques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique, Japan J. Math. 31(1961) 55-90.
(ii) Sur les representations unitaires des groupes de Lorentz generalises, Bull. Soc. Math. France 91(1963) 289-433.

- [16] T. Tamagawa, On Selberg's trace formula, J. Fac. of Sci.
Univ. of Tokyo 8(1960) 363-386.
- [17] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, II
Springer, 1972.