

外力項付き曲率流のある自由境界問題

下條 昌彦 (Masahiko Shimojo)
岡山理科大学理学部応用数学科

Department of Applied Mathematics, Okayama University of Science

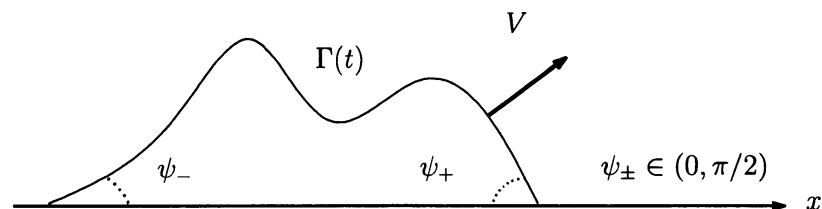
1. 序論

平面内の曲線が曲率に依存して時間発展する曲率流方程式について曲線に境界がありそれが時間と共に変化する自由境界問題を考える. 主に曲線の境界の接触角に関して条件が課された自由境界問題を扱う. 問題となるのは曲線とその端点に関する挙動の分類, 漸近挙動の解析や漸近凸性などである.

デカルト座標上で上半空間に含まれて x 軸上にその両端点がついている単純曲線 γ を与える. この曲線の両端点が x 軸となす角度を左右の各々 $Ang_-(\gamma)$, $Ang_+(\gamma)$ と書き表すことにする. そのような曲線を初期値 $\Gamma(0) = \gamma$ としてひとつ与えて, x 軸との角度を一定のまま以下の発展方程式を解く.

$$(1.1) \quad V = \kappa + c, \quad Ang_{\pm}(\Gamma(t)) = Ang_{\pm}(\Gamma(0)) = \psi_{\pm}.$$

こうして得られる曲線の族を $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ と書くことにする. ここで V は $\Gamma(t)$ の外向き法線速度で κ は $\Gamma(t)$ の符号付きの曲率であり, $c > 0$ は正の定数とする. ただし曲率の符号は, その効果が曲線を縮めるように取っている.



簡単のため $\Gamma(0)$ が $y = u^0(x)$, $x \in [l_-^0, l_+^0]$ とグラフ表示できる場合を主に考える. このとき, 曲線 $\Gamma(t)$ のグラフ $y = u(x, t)$, $x \in [l_-(t), l_+(t)]$ と自由境界 $l_{\pm}(t)$ のペア $(u(x, t), l_{\pm}(t))$ は次の発展方程式を満たす (P):

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2} + c\sqrt{1 + u_x^2}, & x \in (l_-(t), l_+(t)), & t > 0, \\ u(l_{\pm}(t), t) &= 0, \quad u_x(l_{\pm}(t), t) = \mp \tan \psi_{\pm}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad l_{\pm}(0) = l_{\pm}^0, & x \in [l_-^0, l_+^0] \end{aligned}$$

ただし $\psi_{\pm} \in (0, \pi/2)$ であり $-\infty < l_-^0 < l_+^0 < \infty$ とする. 初期曲線には以下の正則性の条件を仮定する.

$$u^0 > 0 \text{ on } (l_-^0, l_+^0), \quad u^0(l_{\pm}^0) = 0, \quad u_x^0(l_{\pm}^0) = \mp \tan \psi_{\pm}, \quad u^0 \in C^2([l_-^0, l_+^0]).$$

外力項の付きの曲率流は Belousov-Zhabotinsky 反応 ([8]) や Allen-Cahn モデル ([22]) などから多くの研究がなされている. 曲率流 (1.1) は超伝導の渦の記述 [14] に用いられることが知られている. また全空間の問題の場合は二宮-谷口らにより V 字型進行波という特殊解が構成されている ([48]).

曲率流 (1.1) で $c = 0$ のときは曲線短縮流と呼ばれこれまで閉曲線の場合について多くの深い結果が得られている。これは平面上の曲線上の各点の法線速度がその点の曲率の大きさと与えられるものである。1980 年代後半 Gage-Hamilton [25] と Grayson [28] らは、どんな単純閉曲線を初期値とする解曲線も時間が経つとそのうち凸曲線になり、有限時間で一点に潰れることを示し、さらに一点に潰れる時の漸近挙動も計算した。曲率流 (1.1) を高次元に一般化したのが平均曲率流やそれに類する曲面の発展方程式である ([7, 11, 21])。これらの発展方程式は金属の粒界の動きを調べるために 1950 年代に Mullins [45] が材料工学の問題で導出した方程式と関連がある ([30, 31])。平均曲率流をさらに一般化したものが非等方的平均曲率流や体積保存型平均曲率流である。前者は結晶成長のモデルである。後者は油滴の落下運動のモデルと関連があるだけでなく、シャボン玉の形状に見られる平均曲率一定曲面の問題や等周問題といった微分幾何学の変分問題とも関連があり、解析学・幾何学の双方向から国内外で活発に研究されている。

さて曲線の場合に話を戻す。ここで気になるのは (1.1) の境界条件に関してであるが、このタイプの自由境界問題は物理モデルで良く現れる。平面上の 3 重結節点をもつ界面運動などがそのような問題の一つである ([1, 37])。この問題に関しては A. Magni, C. Mantegazza and M. Novaga のグループによる曲線短縮流方程式の一連の研究があり、解の漸近挙動や解曲線の凸性や特異性の分類などが行われた ([43, 55])。一方で X. Chen and J.S. Guo らによる連続・離散モデルに関する結果 ([12, 10, 25])、B. Lou ([39]) による非均質媒体の上の問題への一般化、高坂 良史氏による高階方程式の研究などもあり、国内外で活発に研究がなされている。一般の曲率流の自由境界問題に関しては M. Sato, E. Yanagida, S. Ei [18] による定常解の安定性の結果がある。また高次元の問題に関しては A. Freire (2010) が平均曲率流で接触角一定の自由境界問題に関して解の存在と凸性の保存に関する定理を得ている。本研究に關係する体積保存曲率流に関しては小俣正朗氏、S. Karel 氏や E. Ginder 氏らの数値計算があるが、数学的にまだ未解決な点が多い。自由境界問題の難しさは自由境界の動きや正則性が先見的に分からない点にあり、その解析では問題ごとに新しいアイデアが必要になる。

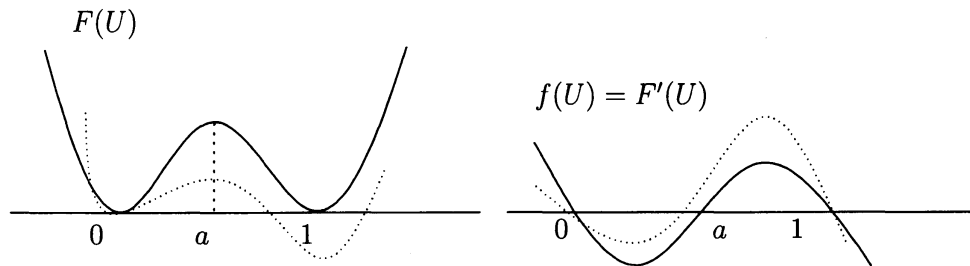
2. 特異摂動によるモデルの導出

本節では Allen-Cahn 方程式の特異摂動との関係を概説する。前半では曲率流 $V = \kappa + c$ を導出する。考察するアプローチには大きく 2 つの方向がある。第一の方法は漸近展開によるものであり、もう一つは自由エネルギーの極限を考える方法である。両方の観点から見るにより物理的な意味がより明らかになる ([46])。後半では境界角度の条件に関してその物理的な意味を交えて説明する。自由境界条件に関しては論文 [57] に接合漸近展開を用いた解析があるが、ここでは自由エネルギーを用いて接触角条件を導出する。この部分でも上の 2 つの視点で考えることは重要になる。

さて関数 f を $f(0) = f(a) = f(1)$ を満たす下図のような関数とする。ただしバランス条件 $\int_0^1 f(U) dU = 0$ が成り立っているとしよう。関数 g は $g(0) = g(1) = 0$ であり $g(U) > 0$ を任意の $U \in (0, 1)$ に対して満たしている。そこで次の Allen-Cahn 方程式を考える。

$$(2.1) \quad U_t(\mathbf{x}, t) = \Delta U(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(U(\mathbf{x}, t)) + \varepsilon g(U(\mathbf{x}, t))), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad g > 0$$

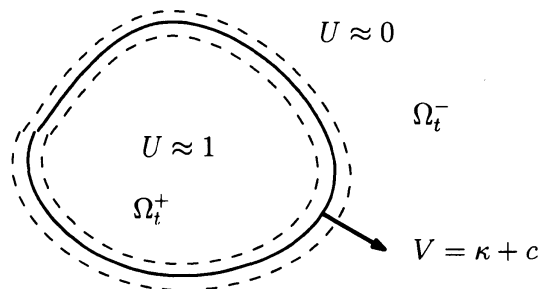
またポテンシャル関数 $W(U) = F(U) - \varepsilon G(U)$ を導入する。ただし F, G は $F' = -f$ および $G' = g$ を満たす関数である。ここでエネルギーの基準に関する条件は $F(0) = F(1) = 0 = G(0)$ で与える。関数 G は $U \in (0, 1]$ で正の関数なので $G(0) < G(1)$ また $W(0) = F(0) - \varepsilon G(0) > F(1) - \varepsilon G(1) = W(1)$ となっていることに注意せよ。これはポテンシャル W で考えると $U = 1$ の領域が広い方がよりエネルギーが下がることを意味する。このことは右下図を見ると $U = 1$ でのグラフの傾きは絶対値が大きくなっていることから分かる。したがって εg が加わることでこちらの状態の方がより安定化している。



左から実線は F と f のグラフ 点線は W と $f + \varepsilon g$ のグラフ

注意 2.1. よくある例では $f(U) = U(1-U)(U-1/2)$, $g(U) = \alpha U(1-U)$ で $0 < \alpha \ll 1$ である. しばらくはこの具体的な場合を念頭に読み進めて良い. ただし, (1.1) の境界条件を考察すると, f のグラフが $U = 1/2$ に対して点対称にならない場合を考察する必要がある.

本節の第1の目標は下図のように, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $U = 0, 1$ を隔てる遷移層の運動が $V = \kappa + c$ で記述できることを理解することである. このような問題を特異摂動問題という. ここで界面内部の相で U の値はほぼ1とする. なぜなら遠方で関数値が0になる方が自然だと思われるからである.



第1の視点からのアプローチとして次の展開を考えよう:

$$U = U_0(\xi) + \varepsilon U_1(\mathbf{x}, t, \xi) + \varepsilon^2 U_2(\mathbf{x}, t, \xi) + \cdots, \quad \xi = \frac{d}{\varepsilon}$$

ここで d は界面からの符号付き距離関数であり領域外部を正にとる. 距離関数に関して $d(\mathbf{x}, t) = d_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon d_1(\mathbf{x}, t) + \cdots$ と展開を考える. 代入して係数を比較すると内部層に関する常微分方程式

$$U_0'' + f(U_0) = 0 \Rightarrow \frac{(U_0')^2}{2} - F(U_0) = 0 \Rightarrow U_0' = -\sqrt{2F(U_0)}$$

を得る. ただし $U_0(\infty) = 0$, $U_0(-\infty) = 1$ および $U_0(0) = 1/2$ を仮定する. ここで外部の遠方を値0にとる方がように最初に選んだためこのように遠方の条件が付与された. これが界面近傍の U の値の形状の第1近似である. また第2項が満たす関係式は

$$U_1'' + f'(U_0)U_1 = (d_{0t} - \Delta d_0)U_0'(\xi) - g(U_0(\xi))$$

この常微分方程式が解ける必要十分条件は(フレドホルムの交代定理により)左辺の微分作用素の核と右辺が直交していることである. U_0' が左辺の微分作用素の核であることは容易に確認できる(実はこの定数倍以外はない). よって可解性条件は

$$\int_{\mathbb{R}} \{(d_{0t} - \Delta d_0)U_0'(\xi) - g(U_0(\xi))\} U_0' d\xi = 0.$$

これをさらに計算すると

$$d_{0t} = \Delta d_0 + \frac{\int_{\mathbb{R}} g(U_0(\xi)) U_0' d\xi}{\int_{\mathbb{R}} (U_0')^2 d\xi}.$$

以上から極限方程式

$$d_t = \Delta d - c \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t) \implies V = (n-1)H + c$$

を得る. ここで H は $\Gamma(t)$ の各点での平均曲率であり

$$c = \frac{-\int_{\mathbb{R}} g(U_0) U_0' dz}{\int_{\mathbb{R}} U_0'^2 dz} = \frac{\int_0^1 g(U) dU}{\int_{\mathbb{R}} U_0'^2 dz} = \frac{G(1) - G(0)}{\int_{\mathbb{R}} U_0'^2 dz}, \quad G' = g.$$

ここまでの漸近展開の計算に関しては [47, 53] も参考になる.

第2の視点からの考察として Allen-Cahn 方程式に付随する自由エネルギーの極限を考える. すなわち

$$J_\varepsilon[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (F(\Phi) - \varepsilon G(\Phi)) \right) d\mathbf{x}$$

の極限を計算すると界面の発展方程式 $V = (n-1)H + c$ に対する汎関数

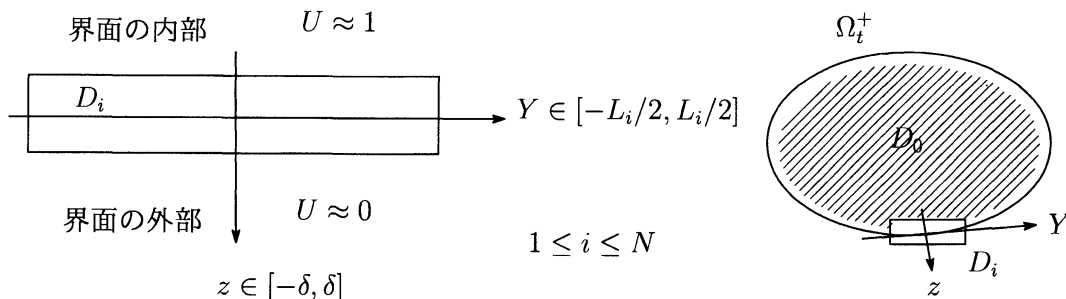
$$\int_0^1 \sqrt{2F(U)} dU \cdot \text{Area}(\Gamma(t)) - (G(1) - G(0)) \cdot \text{Volume}(\Omega_t^+)$$

が得られることの概略を述べる. ここで $\Omega_t^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid U(\mathbf{x}, t) \approx 1\}$ であり, バルクと呼ばれる. 右辺の1項目は曲面あるいは界面の表面張力エネルギーであり, 2項目はバルクのエネルギーと呼ばれている. 界面の表面積が小さくてバルクの体積が大きいほど, この自由エネルギーは小さくなることに注意せよ. 表面張力は界面の表面積を小さくしようとしているが, バルクのエネルギーは界面内部の体積を大きくしようとしている. 自由エネルギーは出来るだけ小さくするるので, 上の2つの効果で競合が起きているのである. 平面内の曲線の問題の場合は $V = \kappa + c$ であり対応するエネルギーは

$$(2.2) \quad \int_0^1 \sqrt{2F(U)} dU \cdot \text{Length}(\Gamma(t)) - (G(1) - G(0)) \cdot \text{Area}(\Omega_t^+).$$

物理的に解釈すると自然長が0で張力が一定値 $\tau = \int_0^1 \sqrt{2F(U)} dU$ の紐のポテンシャルエネルギーは $\tau \times \text{Length}$ なのでそれが第1項である. そのような紐で閉曲線を作って, 2次元の理想気体を閉じ込めて等圧変化させている状態をイメージすると良い.

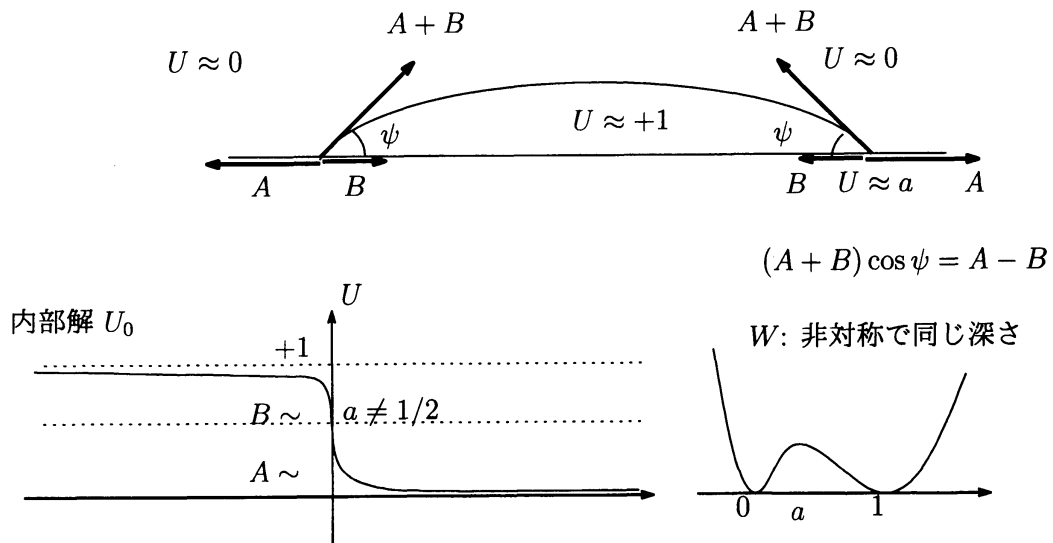
上の Allen-Cahn 汎関数の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限 (2.2) が成り立つ理由を大雑把に説明する. 界面の内部と外部では U はほぼ一定の値なので界面の近くに自由エネルギーが集中していると考えてよいだろう. そこで下図のように幅の小さい開集合 $\{D_i\}_{i=1}^N$ で界面 $\Gamma(t)$ を覆う. また D_0 は $\Omega_+(t)$ の内部に含まれる開集合であり, $\{D_i\}_{i=0}^N$ により Ω_t^+ とその境界を覆うものとする.



ここでエネルギーについて寄与の大きい項だけ抜き出していくと以下のような式を得る:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(U) \right) dx &\approx \sum_{i=1}^N \int_{D_i} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{U_0'^2}{2} + F(U_0) \right\} dx - \int_{\mathbb{R}^n} G(U) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\frac{L_i}{2}}^{\frac{L_i}{2}} \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \frac{U_0'^2}{2} + F(U_0) \right\} d\xi dY - \int_{\mathbb{R}^n} G(U) dx \\
 &\approx \sum_{i=1}^N L_i \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{2F(U_0)U_0'^2} dz - (G(1) - G(0)) \text{Area}(\Omega_t^+) \\
 &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2F(U_0)U_0'^2} d\xi \times \text{Length}(\Gamma(t)) - G(1) \text{Area}(\Omega_t^+) \\
 &\approx - \int_0^1 \sqrt{2F(U)} dU \times \text{Length}(\Gamma(t)) - G(1) \text{Area}(\Omega_t^+)
 \end{aligned}$$

さて次に我々の問題の自由境界条件について張力の釣り合いの観点から考察しよう. 今 x 軸の下では $U = a$ という境界条件のもと上の特異極限問題を考える. Allen-Cahn 方程式の解は $\varepsilon \ll 1$ のとき短時間で $U = 0, a, 1$ の三つの相に分かれる. 張力は紐を短くする力を接線方向に沿って及ぼす. その大きさは $U = 0, U = a$ の相の間では $A = \int_0^a \sqrt{2F(U)} dU$, $U = a, U = 1$ の相の間では $B = \int_a^1 \sqrt{2F(U)} dU$, $U = 0, U = 1$ の相の間では $\int_0^1 \sqrt{2F(U)} dU = A + B$ の大きさである. したがって, 左右の端点に注目すると下図のようにになっている.

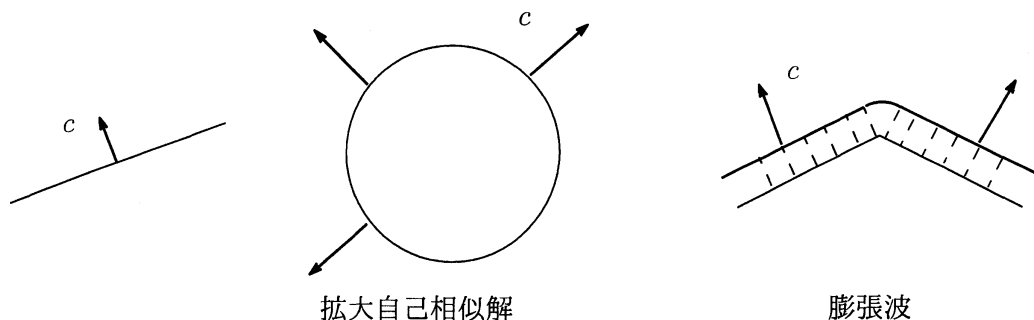


端点が壊れないためにはこれらの力が釣り合っていないといけない (Young の法則) ので $(A + B) \cos \psi = A - B$ が成り立たねばならない. ここで ψ が $\pi/2$ 以外を実現するにはポテンシャルが非対称でないといけないことに注意せよ.

さてここで疑問が残る. 上の導出の結果は左右の角度は自動的に等しくなってしまう. では我々の問題 (1.1) のように両方の角度が違えば特異極限で捉えることは出来るのだろうか? これについて私は答えを知らない. 未解決問題として読者へ提起することにする. なお単に「左右の角度が等しくない」界面現象はたくさんある ([26]).

3. 解の挙動についての考察

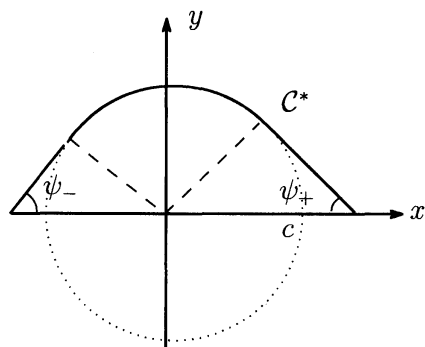
本節では曲率流 (1.1) の解全体の様子がどのようなになっているのかのイメージをつかむため、各項の意味を理解することに努める。まず曲率の影響を忘れることにして $V = c$ の解で簡単なものを挙げると下図の3つがある。最も簡単なのは直線が一定の法線速度で移動するものである。また初期値が円周ならば、外向きに法線速度 c で大きくなっていく。これらの2つの解をつなぎ合わせれば、一階偏微分方程式の解析でよく現れる膨張波解が構成できる。



今まで境界条件を考慮に入れていなかったが、(1.1) の境界条件を満足させるには、上の膨張波の接合の仕方を適当に工夫すればよい。 C^* を半径 c の円弧の一部に2つの直線をつなぎ合わせたものとし、それらの2直線が境界条件を満たすようにする。それを t 倍に自己相似拡大した曲線 $C_S(t) = t \cdot C^*$ は

$$V = c \text{ on } C_S(t), \quad \text{Ang}_{\pm}(C_S(t)) = \psi_{\pm}.$$

を満たす。なおこの自己相似解のプロファイル C^* は下図のようなものである。



プロファイル C^* はただ一つ存在

この特殊解は解の挙動を記述する重要なパターンのひとつである。実際、もし自由境界問題 (1.1) の解曲線 $\Gamma(t)$ が拡大していくことが分かっているとき適当な t_0 を十分大きく取れば $C_S(t+t_0) = (t+t_0) \cdot C^*$ で上から挟むことが出来る。これが優解になっていることは曲率の影響を無視しているのだから、実際の曲線よりも早く広がることから見てとれる。また $\rho(t) = t + O(\log t)$ を満たす関数で $C_S(\rho(t)) = \rho(t) \cdot C^*$ が解曲線を下から挟むことが出来てこれは劣解である。ここで $c\rho(t)$ を両端の2つの線分を無視して、円周だけを時間発展させたときの半径としてとれば良い。なぜなら $C_S(\rho(t))$ の内側の円周上では実際の解であるが、その外側の半直線部分は実際の方程式の解よりもゆっくり動くので決して、最初に解曲線 $\Gamma(t)$ の下にいたらその後も追い越さないからである。したがって $t^{-1}\Gamma(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のときにプロファイル曲線 C^* に収束することが分かる。ここで以下の比較定理を用いた。

曲線 $\Gamma(t)$ は (1.1) の解とし, 曲線 $\gamma(t)$ は以下の曲線流の解とする.

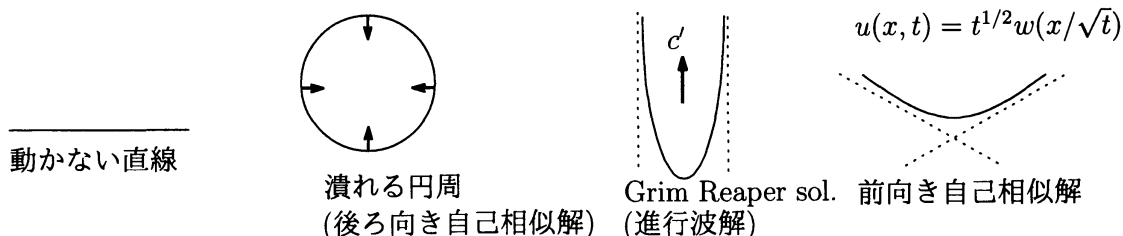
$$V \leq \kappa + c \quad \text{on} \quad \gamma(t), \quad \text{Ang}_{\pm}(\gamma(t)) \geq \psi_{\pm}.$$

さらにもし初期曲線 $\Gamma(0)$ が初期曲線 $\gamma(0)$ の上にあったとする. このとき双方の曲線が (1.1) の曲率流の解として存在する限り $\Gamma(t)$ は曲線 $\gamma(t)$ の上にある. 一方でもし

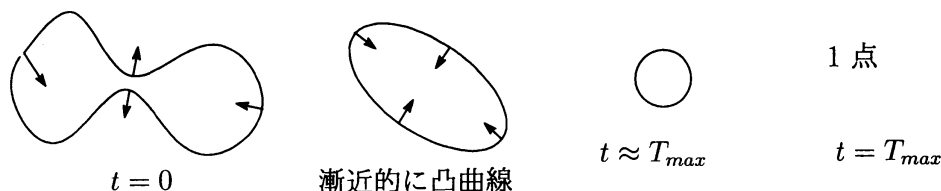
$$V \geq \kappa + c \quad \text{on} \quad \gamma(t), \quad \text{Ang}_{\pm}(\gamma(t)) \leq \psi_{\pm} \quad (\text{端点は片方だけでもよい})$$

であり初期曲線 $\Gamma(0)$ が初期曲線 $\gamma(0)$ の下であればこれら双方の曲線が存在する任意の時刻 $t > 0$ において $\Gamma(t)$ は $\gamma(t)$ の下にある.

最初のケースは $V = \kappa + c$ の定数項の影響が支配的だった場合であったが, もし曲率の方が外力項より強かったらどうなるのかを理解したい. そのために曲線短縮流 $V = \kappa$ の典型的な解について紹介する. まず初期値が直線の場合はそのまま動かないことは簡単にわかる. 次に円周を初期値に与えた場合は, 半径 $R(t)$ が常微分方程式 $R'(t) = -1/R(t)$ を満たすので $R(t) = \sqrt{2(T-t)}$ が解である. ただし $T > 0$ は解が 1 点に潰れる時間である. また進行波の解や前向き自己相似解の存在も知られている.



Gage-Hamilton[25], Grayson[28] らによる結果によると, どんな単純閉曲線もそのうち凸になって丸まっていくことが知られている. このことは後ろ向き自己相似解である円周の挙動が解の挙動を記述するパターンとして普遍的であることを意味している.



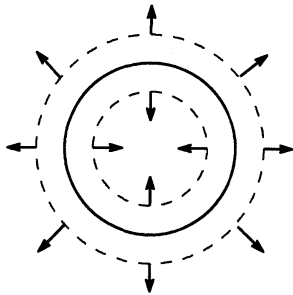
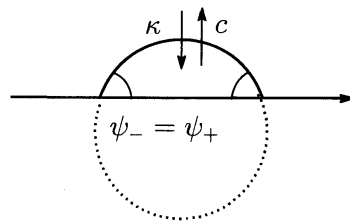
実は我々の自由境界問題 (1.1) に関しても同様のことが成り立つことが証明されている. まず Chen-Guo [12] によると (1.1) で $c = 0$ の場合に関して後ろ向き自己相似解の存在が知られている. ここで後ろ向き自己相似解とは, あるプロファイル曲線 K^* に対して $\sqrt{T-t} \cdot \Gamma(t)$ の形で与えられる

$$V = \kappa \quad \text{on} \quad \Gamma(t) \quad \text{and} \quad \text{Ang}_{\pm}(\Gamma(t)) = \psi_{\pm},$$

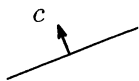
の解曲線である (なお単純閉曲線の場合はプロファイル曲線 K^* は円周以外にないことが知られている. 証明は [41] の pp75–76 を見よ). 我々は Huisken [32] の平均曲率流に関する研究で用いられた後ろ向き自己相似座標での単調性公式を用いて自己相似解への収束を証明した. これは特異性の解析における標準的な議論であり, リッチフローの特異点分類や, 半線形放物型方程式の爆発問題, 流体方程式や非線形シュレディンガー方程式などにおいて用いられている ([27]). 具体的には次の放物型スケーリング $\frac{1}{\sqrt{T-t}} \cdot \Gamma(t) = e^{s/2} \Gamma(T - e^{-s})$, $s := \log\left(\frac{1}{T-t}\right)$ を考える. するとこの曲線の長さがリャプノフ関数のようなものになっている. 力学系の標準的な理論と等周比に関する評価を組み合わせることで $s \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow T$) のときに $e^{s/2} \Gamma(T - e^{-s})$ は上記のスケーリングを施した後の曲率流方程式に対する定常解 K^* (自己相

似解のプロファイル) に収束することが分かる. すなわち $\frac{1}{\sqrt{T-t}} \cdot \Gamma(t) \rightarrow \mathcal{K}^*$ ($t \rightarrow T = T_{\max}$). 実際には曲線 $e^{s/2} \Gamma(T - e^{-s})$ の長さ (閉曲線の曲線短縮流とは異なり) s に関して単調減少な汎関数でない. だが曲線が縮むと自由境界や外力項の積分が s に関して指数的に小さくなり影響がなくなる. なおこの標準的な議論では $C^{1+\alpha}$ 収束までしか分からず漸近凸性までは説明できない.

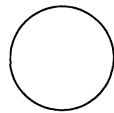
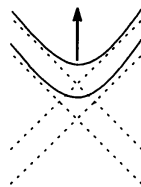
では全空間に関して $V = \kappa + c$ を考察しよう. やはりもっとも簡単な解はそのプロファイルが直線で与えられる直線波解である. つぎに円周を初期値に与えると大きく3つの解の挙動が観測される. 実際 $R'(t) = c - 1/R(t)$ を解くと $R(0)$ と $1/c$ の大小によって解の挙動が変化する. ちょうど $1/c$ のときはその円周が定常解である. また $R(0) > 1/c$ のときは解が時間大域的に存在して $t \rightarrow \infty$ で $R(t) = ct - O(\log t)$ のようにふるまう. $R(0) < 1/c$ の場合は有限時間で解が一点に潰れる.

半径 $1/c$ が閾値 $\psi_+ = \psi_-: \exists$ 定常解 $(\psi_+ \neq \psi_-: \exists$ 進行波解)

この円弧の定常解は発展方程式 (1.1) に対して $\psi_+ = \psi_-$ のときにのみ現れるが, 角度が違う時にどうなるのだろうか? この答えは後に説明するが, 実は横に移動していく進行波解が現れるのである. 以下, 本論説では (1.1) を考察するときは, 「進行波」といえば形状を保って水平方向に移動する解とする. 直線が一定速度で動く場合は, その解を進行波と区別して「直線波」と呼ぶことにする.



直線波

半径 $1/c$
定常解

V-shaped 進行波

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + vt$$

Ninomiya-Taniguchi (00)

さて進行波の存在を示す. 偏角 $\theta = \arctan u_x$ を媒介変数に選ぶと解曲線の曲率 $\kappa(\theta, t) = u_{xx}/(1 + u_x^2)^{3/2}$ は以下の発展方程式を満たす:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \kappa_t = \kappa^2(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + c), & -\psi_+ < \theta < \psi_+, \quad t > 0, \\ \kappa_{\theta} = \cot \theta (\kappa + c), & \theta = \mp \psi_{\pm}, \quad t > 0, \\ \kappa(\theta, 0) = \kappa_0(\theta), & -\psi_+ \leq \theta \leq \psi_+. \end{cases}$$

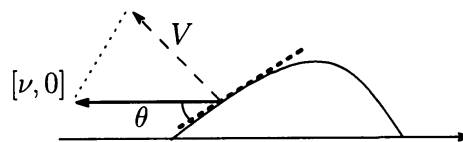
ここで両端点が x 軸に乗っていないといけないので

$$(3.2) \quad \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa_0(\theta)} d\theta = 0.$$

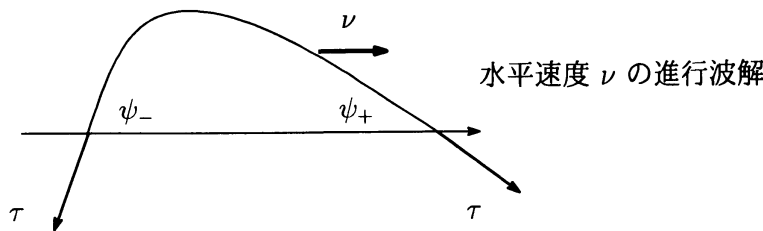
この等式 (3.2) が (3.1) の解に対して $t > 0$ で保存されることは簡単に示せる. また (3.1) の定常解 κ^* は $\{-\nu \sin \theta - c \mid \nu \in \mathbb{R}\}$ の形で与えられる. これを積分条件 (3.2) に代入したら

$$V = \kappa^* + c = -\nu \sin \theta, \quad \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{c + \nu \sin \theta} d\theta = 0.$$

を満たす $\exists \nu$ と $\exists \kappa^*$ がただ一つに定まることが簡単な微分計算と中間値の定理からわかる. さてこの式の意味は下の図を見れば一目瞭然であろう. ν は水平方向への進行波の速度を表しているのである.

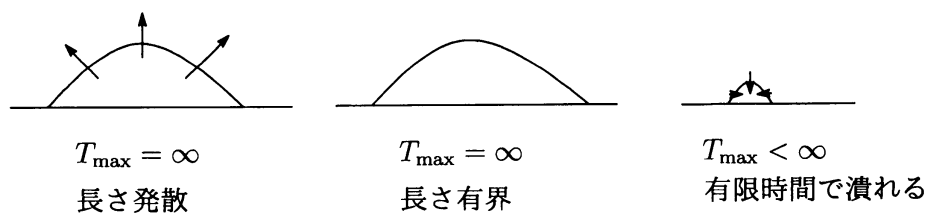


ここで進行波の速度の向きが気になることだと思う. 計算してもすぐにわかるが, ここでは物理的な直観で説明する. 進行波を $W(t) = W(0) + \nu t e_1$ で表すことにしよう. ここで $e_1 = (1, 0)$ は標準的な単位ベクトルである. $\psi_+ < \psi_-$ の場合のみ考える. 特異摂動で議論したように曲率と外力が釣り合った状態においては紐の張力はどこも一定. よって下図のように端点での張力の水平成分を比較すると $\tau \cos \psi_- < \tau \cos \psi_+$. この滑り効果より $\nu > 0$.



実は解が一点に潰れもしないし, 無限に広がることもないという場合は $t \rightarrow \infty$ で進行波解の一つに収束していくことが分かる. 以上の観察から下の図のように3つの解の振る舞いがあると予想できるだろう.

- (A) 拡大していく (B) 時間大域的に有界 (C) 潰れていく



最初の主定理は曲率流の自由境界問題 (1.1) の解の挙動は上の3つで実はすべて尽くされているということである. まず定理の主張を述べるためいくつかの記号を準備する. 以下の文章では $T = T_{\max} \in (0, \infty]$ は自由境界問題の解 (P) の最大存在時刻とし, $A(t)$ を曲線 $\Gamma(t)$

と x 軸が囲む領域の面積, $L(t)$ は曲線 $\Gamma(t)$ の長さとする. すなわち

$$(3.3) \quad A(t) := \int_{l_-(t)}^{l_+(t)} u(x, t) dx, \quad L(t) := \int_{l_-(t)}^{l_+(t)} \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx.$$

さて最初の定理の主張を述べよう ([29]):

定理 1 (分類定理). 初期境界値問題 (P) の解の挙動は以下のいずれかである:

- (A) $T = \infty$ であり $L(t)$ と $A(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき ∞ に発散する.
- (B) $T = \infty$ であり $L(t)$ と $A(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき正の数で上下から一様に抑えられる.
- (C) $T < \infty$ であり, $L(t)$ と $A(t)$ は $t \rightarrow T$ のとき 0 に収束する.

この定理は (A), (B), (C) のいずれかだとしか主張していないが, これらの解を実際に構成することは可能である. (A), (C) に関しては $A(0) > \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\psi_+ + \psi_-}{c} \right)^2$ ならば解は (A) の振る舞いであり, $L(0) < \frac{2(1 - \cos \psi_{\min})}{c}$ ならば (C) の挙動になる. これらは $A(t), L(t)$ の常微分関係式

$$A'(t) = -(\psi_+ + \psi_-) + cL(t), \quad L'(t) = l'_+(t) \cos \psi_+ - l'_-(t) \cos \psi_- + c(\psi_+ + \psi_-) - \int_{l_-(t)}^{l_+(t)} \kappa^2 ds$$

と等周不等式などを用いて証明できる. ここで $\psi_{\min} = \min\{\psi_+, \psi_-\}$ である. なお比較原理があるので 1 つでも発散する曲線を見つければそれより上にある解は必ず発散する. 同様にひとつでも有限時間で潰れる解を見つければそれより下にある解は必ず有限時間で潰れてしまう. したがって, 問題となるのは進行波解以外で (B) の挙動になる初期曲線を構成できるかである. そのためには次の初期値の 1 パラメータ族を考えるのがひとつの方法である. γ は $\text{Ang}_{\pm}(\gamma) = \psi_{\pm}$ を満たす上半平面でのグラフ表示できる曲線とする. この曲線の両端点を $l_{\pm}(\gamma)$ と書き表わす. この曲線を両端点の中心から拡大・縮小した曲線の族を考える. 式で書けば

$$\gamma^{\lambda} := \left\{ \left(\frac{l_+(\gamma) + l_-(\gamma)}{2} + \lambda \left(x - \frac{l_+(\gamma) + l_-(\gamma)}{2} \right), \lambda y \right) \mid (x, y) \in \gamma \right\} \quad \lambda > 0.$$

となる. 論文 [29] において解の連続依存性が証明されているので, 挙動 (A), (C) の解をもつ初期値全体の集合は開集合である. 2 つの開区間の和集合で $(0, \infty)$ を表すのは不可能なので, ある λ に関して (B) の挙動をする初期値が存在する. またそのような λ の集合は空でない閉集合である. 実は交点数の議論をうまく適用することで $\lambda^* \in (0, \infty)$ がただ一つあって $\lambda > \lambda^*$ ならば解の振る舞いは (A) であり, $\lambda < \lambda^*$ ならば (C) の振る舞いである.

注意 3.1. 実際, もし (B) の振る舞いの解に対応する λ が連続的に存在したとする. そのとき十分近い 2 つの $\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon$ に対応する解はある進行波に収束する. γ^{λ^*} は $\gamma^{\lambda^* + \varepsilon}$ より下にあるので同じ進行波 $\mathcal{W}$ に収束しないとはいけない. そうでないと後に述べる拡張交点数が増大し矛盾するからである (異なる 2 つの進行波の拡張交点数が 1). 一方, γ^{λ^*} を水平方向に少しだけ $x \mapsto x + \delta$ 平行移動して $\gamma^{\lambda^* + \varepsilon}$ より下にあるとしてよい. これらの初期値の拡張交点数は 0 である. さて水平方向に平行移動した方の解は $\mathcal{W}(t) + \delta \mathbf{e}_1$ に収束して $\gamma^{\lambda^* + \varepsilon}$ を初期値とする解は曲線 $\mathcal{W}$ に収束する. $\mathcal{W}(t) + \delta \mathbf{e}_1$ と $\mathcal{W}(t)$ との拡張交点数は 1 なので矛盾. すなわち「閾値」がひとつあるだけなので, ランダムに初期値を一つ与えそれが進行波に収束するのは極めて稀である. なお (B) の振る舞いをする解の別の構成法が [33] に議論されている. 進行波に対して安定多様体を構成するのである.

漸近挙動に関しては本節の最初に考察したとおりである ([29]).

定理 2 (漸近挙動). 定理 1 の (A),(B),(C) の各々の場合に関して初期境界値問題 (P) の解の漸近挙動は以下で与えられる.

- (A) $t^{-1}\Gamma(t)$ は C^* に一様収束する.
- (B) $\Gamma(t)$ はある進行波解にハウスドルフ距離の意味で一様収束する.
- (C) $\frac{1}{\sqrt{T-t}}\Gamma(t)$ は $t \rightarrow T$ で $V = \kappa$ の自己相似解のプロファイル K^* に一様収束する.

曲線の凸性に関する問題は幾何的曲率流において重要である. まず我々の問題においても凸性が保存されることが証明できる. すなわち関数 $u(x, t_0)$ がある時刻 $t_0 \in [0, T)$ で上に狭義凸になったとする. すると任意の時刻 $t \in [t_0, T)$ に対して解は凸である. 特に初期値が上に凸なら解は存在する限りずっと上に凸である. 証明は曲率に対する発展方程式に対して最大値原理を用いる方法と交点数の議論を用いる方法 ([29]) がある. さて (1.1) の漸近凸性に関しても証明された事実を述べよう. Grayson の論文 [28] の閉曲線に関する漸近凸性の結果は我々の自由境界問題の (B)-(C) の場合へも拡張された ([29]).

定理 3 (漸近凸性). (B)-(C) の場合に漸近凸性になりたつ.

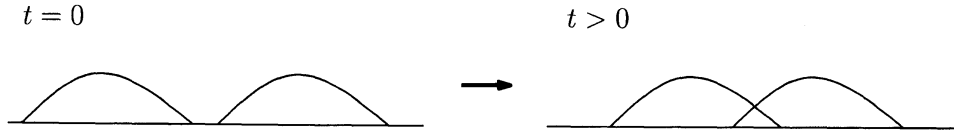
- (B) 解の挙動が定理 1 の (B) であることが分かっているとする. このときある有限の時刻 $t_0 \geq 0$ があって $u(\cdot, t)$ は任意の $t \in (t_0, \infty)$ に対して上に凸な関数である.
- (C) 解の挙動が定理 1 で (C) の場合を考える. このときある時刻 $t_0 < T$ があって $u(\cdot, t)$ は任意の $t \in (t_0, T)$ に対して上に凸な関数である.

閉曲線の曲線短縮流の解の漸近凸性は古典的な結果であるが, 幾人かの研究者は今も自分自身が納得いく証明を見出そうと最近も改めてこの問題に取り組んでいる. 曲線短縮流の研究で有名な [28] の幾何学的な証明法が最初の証明であるが, その場合分けの議論はやや煩雑である. 直線の族との解曲線の交点数を用いる Angenent [3, 4] の議論は見通しが良い. だがこれらの議論は曲線でなくともうまくいかない. そこで漸近凸性を高次元の平均曲率流の解析で有効なテクニックを使って示そうとする取り組みがある. その場合は最初に等周比の評価と Huisken の単調性公式とを用いる ([41]). この時点で $C^{1+\alpha}$ ($\alpha \in (0, 1)$) 収束までが保障される. 標準的な手法で分かるのはここまでなのである. さらに巧みな評価式を使って C^2 収束まで示す必要があり, ここが最も大変な部分である. この方針での証明は Magni-Montegazza [42] により遂行されている. ([41] には [42] で省略されている証明もすべて書いてある. この本は高次元の平均曲率流の話も詳しい. 特に爆発問題に詳しい方にはお勧め).

方程式を長さを正規化曲率流の問題に変換して議論し, 詳細に等周比を評価していくという方針が Andrew-Bryan [5] らにより遂行された. その証明は自己完結的であり, もっとも短いようである. しかも指数的収束することも同時に証明している. 正規化しないままでは, 弧長パラメーターで記述したとき周期的な (区間の長さが変動する) 自由境界問題の解析を行わないといけない. そのため等周比をそのまま評価すると自由境界の動きの影響で正則性は $C^{1+\alpha}$ までしかすぐには分からない. ところが長さを正規化して固定境界の問題に変換した場合, ひとたび等周比評価を得てしまえば, 通常の放物型の正則性が使えて一気に C^∞ 収束が保障される (もちろんその等周比評価にはこれまで誰も成功していなかったのだが). なお我々の論文 [29] での漸近凸性の証明方法は最後の方法と [42] のアイデアの中間にある. まず $C^{1+\alpha}$ 収束までを単調性公式と (スケーリング前の) 等周比評価で示してしまう. そして $(\theta(s, t), L(t))$ の自由境界問題に対しての長さ正規化方程式を考える. 問題は半線形 (準線形でさえもない) の単なる Dirichlet 境界値問題に帰着してしまう. すると古典的な半線形放物型方程式の半群理論の枠組み ([62, 51]) だけで簡単に C^∞ 収束までいえてしまう. なおこの方法は閉曲線にも適用が出来るので [42] の前半の議論と組み合わせたら Grayson の結果の別証明を与えることが出来る. なおクリスタライン曲率流に関しても, 面積保存の場合も含め, 石渡哲哉氏, 矢崎成俊氏らの最近の研究がある.

4. 拡張交点数の理論

1次元の非線形熱方程式の解析において交点数の理論は有効である ([3, 44, 24]). だが自由境界問題で通常の固定境界の場合のように交点数を数えるとうまくいかない. 下の図を見ればわかるように, 自由境界問題では交点数が単調減少であると限らないからである. 解のサポートが端でぶつかった瞬間に交点数が増大してしまうことが簡単に見て取れるだろう.



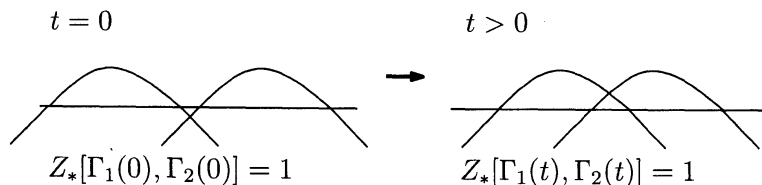
$$Z[\Gamma_1(0), \Gamma_2(0)] = 0$$

$$Z[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)] = 1$$

では自由境界問題の解析で交点数の議論は使えないのだろうか? 今の場合, 簡単なアイデアを持ち込むことでこの困難が回避できる. まず γ_1^*, γ_2^* は下半平面において γ_1, γ_2 を線形拡張した曲線とする. この拡張した曲線に対して交点数を数え上げてみよう. すると先ほどの図では交点数が増大したが, 今度は上半平面で増大した分の交点の数が下半平面では減少している. そのため拡張した曲線の交点数はトータルとしては常に時間に関して単調減少であることが予想される. 以上の観察を動機として「拡張交点数」

$$Z_*[\gamma_1, \gamma_2] := \text{曲線 } \gamma_1^* \text{ と } \gamma_2^* \text{ の交点数.}$$

を導入しよう. すると $Z_*[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)]$ の値は $t < T$ に関して単調減少である. さらに時刻 $t = t_0$ で (自由境界の点も含め) 退化した交点が現れたときに限り $Z_*[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)]$ がその時間 $t = t_0$ を境に交点数が真に減少することが示せる. なお 2 曲線が一致しないならば, $t > 0$ で拡張交点数は有限値になる.

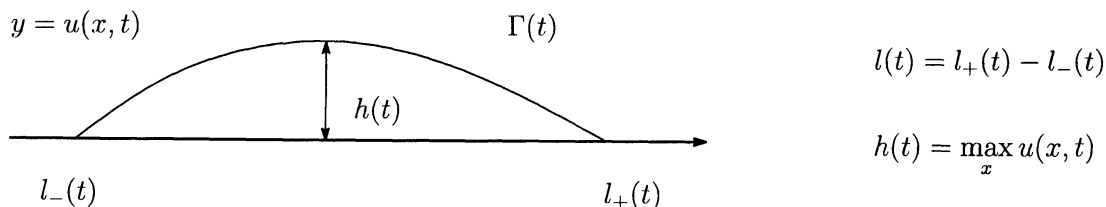


$$Z_*[\Gamma_1(0), \Gamma_2(0)] = 1$$

$$Z_*[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)] = 1$$

ここで交点数といったときは曲線 γ_1 と曲線 γ_2 に対して一方が他方の曲線をまたぐ回数を数えており, 退化している交点はカウントしないことに注意せよ.

我々の自由境界問題でも交点数の議論は分類定理, 進行波への収束, 漸近凸性などの解析に極めて有効である. その最初の適用例としてまず分類定理の証明のアイデアを述べよう. 下の図のように縦幅と横幅についての記号を導入する.



すぐにわかるのは (u_x に関する最大最小値定理から) 曲線 $\Gamma(t)$ は縦幅 $h(t)$ が横 $l(t)$ に比べて相対比率が無限に大きくなることはないことである. そのため問題は逆に曲線が横幅

が縦に比べて無限に大きくなってしまわないかである．実は拡張交点数の議論を使うことで以下の2つの補題が示せる．

補題 4.1. $\lim_{t \rightarrow T} l(t) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow T} h(t) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow T} l(t) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow T} h(t) = 0$. またこのときは $T_{\max} < \infty$ なので解の振る舞いは (C) である．

解の存在定理からもし解が有限時間しか存在しないなら $\lim_{t \rightarrow T} \|\kappa(\cdot, t)\|_{\infty} = \infty$ であることもわかる．上の補題からすぐに次も示せる．

系 4.1. $T_{\max} = \infty$ ならば $\liminf_{t \rightarrow \infty} h(t) > 0$ かつ $\liminf_{t \rightarrow \infty} l(t) > 0$.

補題 4.1 の双対的な主張が次の補題である．これら2つの補題から $T_{\max} = \infty$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} l(t) < \infty$ ならば解の振る舞いが (B) で記述されることがわかる．

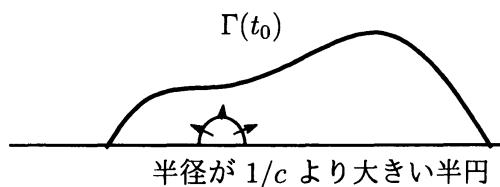
補題 4.2. もし最大存在時間が $T_{\max} = \infty$ とする．このとき

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty \iff \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty \iff \lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty \iff \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$$

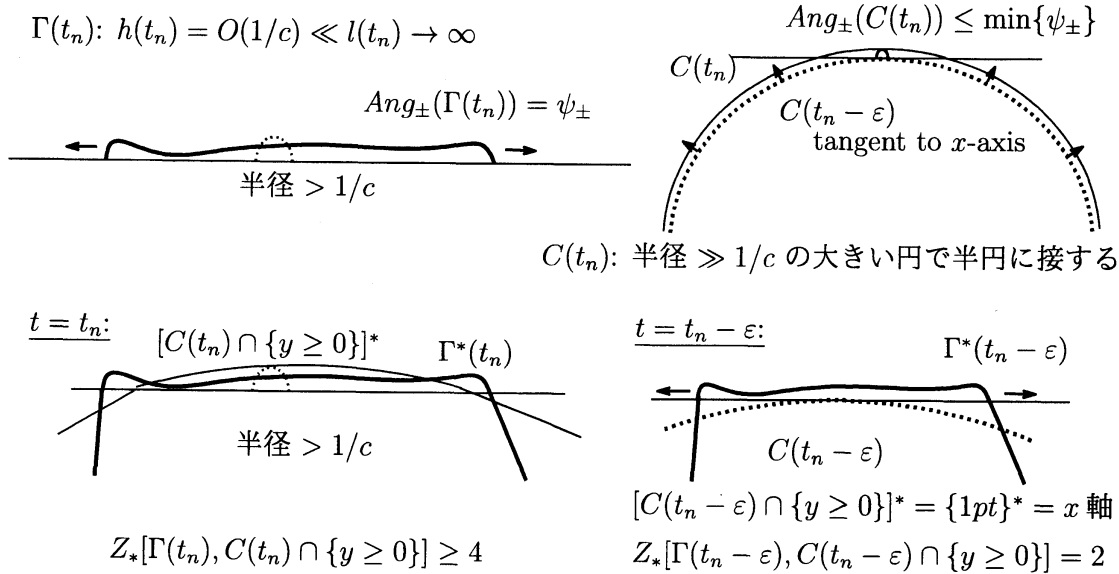
特に $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty$ ならば解の振る舞いは (A) である．

補題 4.2 の証明を説明する．交点数の議論がキーである．さきほど述べたように $h(t) \leq \max\{\|u_x(0)\|_{\infty}, \tan \psi_{\pm}\}$ から $h(t) \leq Ml(t)$ がしたがう．ここで中心が x 軸で半径が $1/c$ より大きな半円を劣解として用いてやれば $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ のときに $\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ であることがわかる．よって $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty$ かつ $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} h(t) < \infty$ が起きないことを示せば十分である．そのためには、比較原理から、以下の補題を示せば十分である．

補題 4.3. $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} l(t) = \infty$ とする．このときある時間 $\exists t_0$ があって $\Gamma(t_0)$ は、半径が $1/c$ より大きくて中心が x 軸上にある半円よりも上にある．



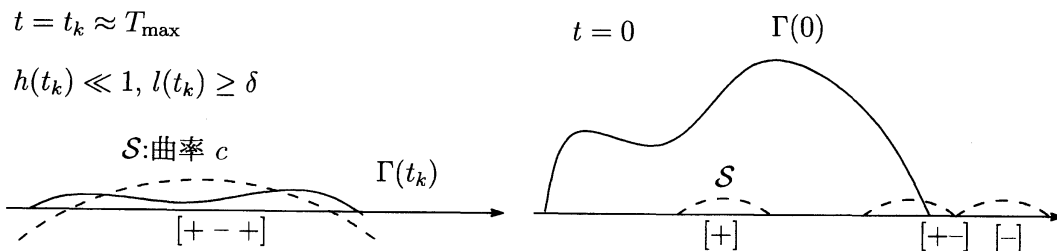
大まかに証明のアイデアを説明する．どんな発散する時間列 $t_n \uparrow \infty$ に対しても $\Gamma(t_n)$ が半径 $1/c$ 以上のある半円の上にはならないとする．すなわち常に下の左上図のようになっている．このとき $\Gamma(t)$ は横にどんどん長くなっていく．さてこの図の半円に接して、半径がとてつもない大きな円 $C(t_n)$ を1つあたえる．ただし $\text{Ang}(C(t_n)) < \psi_{\pm}$ とする．曲線族 $\{C(t)\}$ は $t = t_n$ で $C(t_n)$ に一致する $V = \kappa + c$ の解とする．この解曲線 $\{C(t)\}$ はとても早いスピードで広がっていることに気をつけよ．少し時間を戻した円 $C(t_n - \varepsilon)$ は x -軸に接しているとする． $\Gamma(t_n)$ は非常に細長いのでその端点が $C(t_n)$ の端点より外側にあるとしてよい．すると背理法の仮定からこの2つの拡張交点数は4以上でなくてはならない．だが時刻 $t_n - \varepsilon$ では x -軸と $\Gamma^*(t_n - \varepsilon)$ は2点でしか交われないので $Z_*[\Gamma(t_n - \varepsilon), C(t_n - \varepsilon) \cap \{y \geq 0\}] = 2$ ．これは交点数の非増大性に矛盾する．



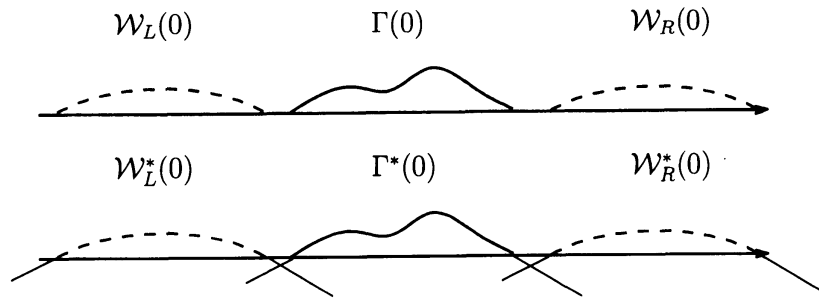
補題 4.1 も同様であり証明は補題 4.2 と双対的である。広がる円の替わりに、縮んでいく円を考えれば良く、その証明は [29] に書いてある。この講義録では放物型ワードという交点数よりも深い情報を使う別証明のアイデアを紹介しよう。その一般論は Ducrot-Giletti-Matano [17] を参照せよ。まずワード A, B が $+$ と $-$ で構成されるワードとしたとき、 $A \triangleright B$ とは B が A のサブワードであることを意味する。たとえば $B = [+], [-], []$ ならば $[+-] \triangleright B$ だが $[+-] \triangleright [-+]$ ではない。放物型方程式の交点に関して以下のことが成り立つ。

関数 $w(x)$ に対して $Z_*[w(\cdot)] < \infty$ のとき $SGN[w(\cdot)]$ は $+$ と $-$ の語の集まりとする。点列 $x_1 < \dots < x_{k+1}$ に対応する $w(x_1), \dots, w(x_{k+1})$ は隣り合う値が符号変化しており $Z[w] = k$ が達成されているとする。例外的なルールとして $w \equiv 0$ のときは語は空集合のように記述する ($SGN[0] = []$)。このとき $t' > t$ ならば $SGN[w(t)] \triangleright SGN[w(t')]$ が成り立つ。

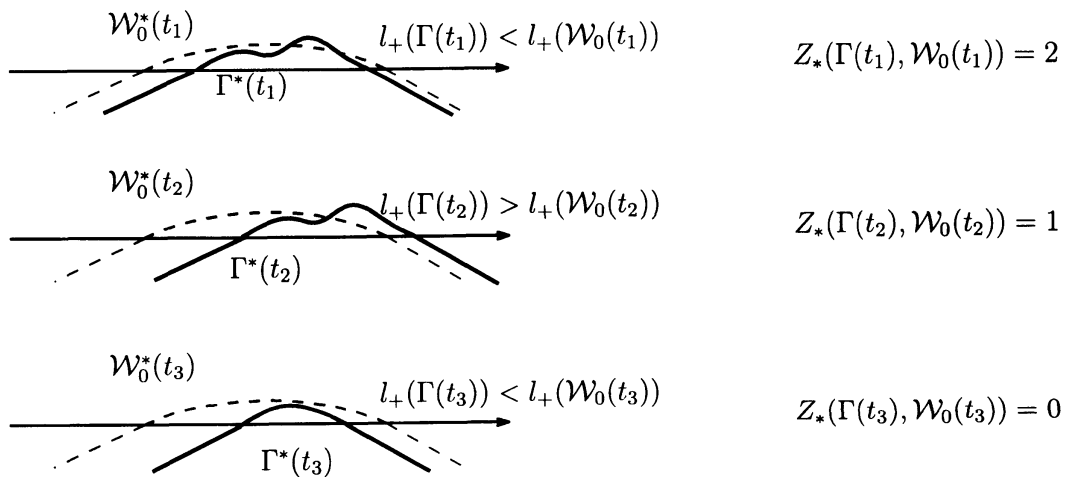
以下曲線 γ_1 のグラフと曲線 γ_2 のグラフの差が関数 w のグラフとしてかけているとき $SGN[\gamma_1, \gamma_2] := SGN[w(\cdot)]$ と書くことにする。補題 4.1 に関してここではもっとも非自明な主張、すなわち $h(t_k) \rightarrow 0$ なる時間列 $t_k \nearrow T_{\max}$ があれば $l(t_k) \rightarrow 0$ を示そう。この結論を否定するとある $\delta > 0$ があって適当な部分列があって (ふたたび $\{t_k\}$ と表記) に対して $l(t_k) \geq \delta$ が $k = 1, 2, \dots$ に対して成り立つことになる。このとき十分大きなすべての k に対してある半径 $1/c$ の円弧 S で高さも幅も極めて小さく、 $Ang_{\pm}(S) \leq \psi_{\min}$ を満たすものがあって $Z_*[\Gamma(t_k), S] \geq 2$ である。またワードの情報は $SGN[\Gamma(t_k), S] = [+,-,+]$ 。一方、上の S の取り方と下右図から分かるように $SGN[\Gamma(0), S]$ は $[+], [+ -], [- +], [-]$ 以外にはあり得ない。すると $SGN[\Gamma(0), S] \triangleright SGN[\Gamma(t_k), S]$ でないので矛盾である。



交点数定理の応用として (B) の振る舞いの解が進行波へ収束することの証明もある。まず進行波を止める動座標でみたら $\Gamma(t)$ の端点の有界で漸近的に単調な関数であることを示す。これが示せば有界単調数列は収束するから端点に関する収束を得る。 $\Gamma(0)$ をある 2 つの進行波解で左右から挟みこむ。 $\Gamma(t)$ はその進行波に左右からサンドイッチされたままで、未来永劫に決して追い越さないことを示す。すなわち $W_L(t), W_R(t)$ を $\Gamma(t)$ の左右の進行波解とすれば $l_-(W_L(0)) < l_-(\Gamma(0)) < l_+(\Gamma(0)) < l_+(W_R(0))$ ならば $l_-(W_L(t)) < l_-(\Gamma(t)) < l_+(\Gamma(t)) < l_+(W_R(t))$ でなければならない。ただし $l_{\pm}(\gamma)$ は曲線 γ の左右の交点である。拡張交点数の性質から端点が接触するとかならず、交点数は減ってしまう。また、進行波の下にある解はかならず 1 点に収束し、進行波の上側にある解はかならず無限に広がってしまうことも示せる。これらを組み合わせればこの結論を得る。



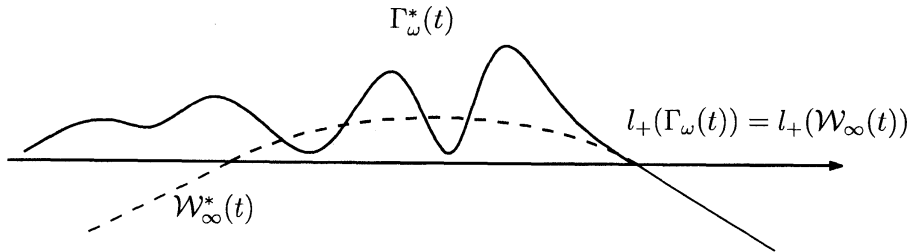
次にも $l_+(\Gamma(t)) - \nu t$ が $t \gg 1$ で単調でないとする。このときある進行波解 $\exists W_0(t)$ と時間列 $\{t_n\}$ があって $l_+(\Gamma(t_{2m})) > l_+(W_0(t_{2m})), l_+(\Gamma(t_{2m+1})) < l_+(W_0(t_{2m+1}))$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ が成り立つ。だがこれは不可能である。なぜなら $\Gamma(t)$ と $W(t)$ の端点の位置が交互に入れ替わるごとに退化した交点が出てくるので拡張交点数は真に減る。ゆえに交点数は無限に減り続けるといけな。だが零点は有限個しかないから矛盾 (下に具体的な図をよく眺めれば事情は一目瞭然)。よって $l_+(\Gamma(t)) - \nu t$ は $t \rightarrow \infty$ で収束する。



交点数はこれ以上減ることができない!

最後に $\Gamma(t)$ の形状も進行波に収束することを証明する。アイデアは単純である。 $\Gamma(0)$ の ω -極限関数 $\Gamma_\omega(t)$ を考えよう。もし曲線 $\Gamma_\omega(t)$ の形と進行波の形が一致しないとする。上の議論からある $a_\infty \in \mathbb{R}$ と進行波 $W_\infty(t)$ があって $l_+(\Gamma_\omega(t)) = a_\infty + \nu t$ 。すなわち下の図のよ

うになっている. このとき交点数の有限性より $\Gamma_\omega(t)$ は進行波 $\mathcal{W}_\infty(t)$ と有限個の拡張交点しか持てない. 一方でこれらの曲線 $\Gamma_\omega(t)$ と $\mathcal{W}_\infty(t)$ は端点で任意の時刻で退化した交点を持っているので, 任意の時刻で $Z_*(\Gamma_\omega(t), \mathcal{W}_\infty(t))$ が真に減り続けている. 再び矛盾である. よって $\Gamma_\omega(t) = \mathcal{W}_\infty(t)$.



注意 4.1. 上の進行波への収束の議論と類似の方法は Stefan 問題でも応用されている. 松澤寛氏のグループによる一連の研究 [35, 16] で見出せる. これらの Stefan 問題全体については Y. Du 氏のサーベアー [15] が参考になる. 形状の収束の前に端点の収束を先に示してしまうというのが目新しい点である. 実際, 端点の収束は曲率流に付随するリャプノフ関数だけでは出てこない. たとえば

$$J[k] = \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \left(\frac{1}{2} k_\theta^2 - \frac{1}{2} k^2 - ck \right) d\theta - \cot \psi_- \left(ck + \frac{1}{2} k^2 \right) \Big|_{\theta=\psi_-} - \cot \psi_+ \left(ck + \frac{1}{2} k^2 \right) \Big|_{\theta=-\psi_+}$$

は

$$\frac{d}{dt} J[\kappa(\cdot, t)] = - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa_t^2}{\kappa^2} d\theta \leq 0.$$

を満たすのでリャプノフ関数である. 存在定理から (B) の場合に曲率はゼロには近づかないこともわかる. よって標準的な力学系の一般論から解 $\kappa(t)$ が κ^* に収束することがいえる. だがこの議論だけでは端点が進行波の族を振動する可能性を排除できない. これは他のどのリャプノフ関数を用いてもつきまとう問題のようである (もちろん端点の情報を無理に入れることもできるが, リャプノフ関数が有界でなくなるなどの問題が生じてしまう).

交点数の議論の欠点は一様収束性までは言えるのだが収束スピードまでは教えてくれない点にある. 進行波への収束オーダーは [33] においてスペクトル解析によって調べられている. この進行波が不安定なのは, 我々の進行波が単調関数でなくパルス状であることから直観的にはあきらかである. 進行波のプロファイルの空間微分は線形化作用素の 0-固有関数に対応しており一度符号変化している. このことは距離関数の線形化で得られる微分作用素を解析すると正の固有値がひとつあることを示唆する. ここから (B) のケースでの指数収束の予想は出来る. だが今考えているのは自由境界問題でしかも進行波解の解析なので座標系の選び方などに注意を要する. 一般の曲率流で拘束曲線も一般の場合の自由境界問題に関して定常解の安定性の場合には栄-柳田-佐藤らの論文 [18] で議論が展開されている (我々の場合 $\psi_+ = \psi_-$ が対応). 我々の今の問題の場合は漸近凸性が既に分かっているので, 偏角による座標が自然に入る. すると進行波の安定性を曲率の発展方程式の固定境界問題 (3.1) に対する定常解の安定性に帰着させることができる. 定常解 κ^* で線形化した方程式は

$$\mathcal{L}(v) := (\kappa^*)^2 (v_{\theta\theta} + v).$$

になる。ただし定義域は

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \left\{ v \in H_*^2([- \psi_+, \psi_-]) \mid v_\theta = \cot \theta v \text{ at } \theta = \mp \psi_\pm \right\},$$

であり $H_*^2([- \psi_+, \psi_-])$ は内積

$$(f, g)_* = \int_{-\psi_+}^{\psi_-} fg \frac{d\theta}{(\kappa^*)^2}.$$

をもつ L^2 空間に付随するソボレフ空間である。この線形化作用素 $\mathcal{L}$ は自己共役で $\sin \theta$ を 0-固有関数に持つ。この関数は区間 $[-\psi_+, \psi_-]$ で一度だけ符号変化するので、0 は大きい方から 2 番目の固有値である。Strum の定理より固有値はすべて単純であり、正の固有値がひとつだけないといけない。一方、(3.2) の条件から $(v, \sin \theta)_* = 0$ の範囲しか摂動は動けないことがわかる。この摂動の制限を課すと $\sin \theta$ だけが固有関数から除かれる。これから曲率の不変多様体に関する情報がわかる。すなわち不安定多様体が 1 次元であり、それ以外は安定多様体である。進行波に収束する (B) のケースではこの安定多様体の上に解が乗っているので曲率は κ^* へ指数的に収束する。これをもとの曲線で見ると、解が (端点も込めて) どれか一つの進行波に指数的に近づくことがわかる。なお幾何的な曲率流の線形化解析 (距離関数での線形化) は本講究録の高坂良史氏のサーベーターが参考になる。

注意 4.2. 補題 4.1 は縦幅と横幅の比率 $l(t)/h(t)$ に関してまでは何も述べていない。実は詳細な等周比評価を行うことで $\psi_\pm \in (0, \pi/2)$ のときには比率 $l(t)/h(t)$ が発散しないことが示されている ([29])。もし比率 $l(t)/h(t)$ が相対的に無限に大きくなる仮定して議論を進めると曲率の Type II 爆発が起きることが示せる。さらに放物型スケーリングを行うと解の形状が Grim-Reaper 解に漸近する ([41] の p109-p110 や [28] も参照)。では曲線の自己交差が起きる場合、たとえば $\psi_\pm \in (0, \pi/2)$ が満たされないときはどうなるだろうか？曲率方程式の後ろ向き自己相似解がないことが示せるので曲率の Type II 爆発が起きることまでは予想される ([4, 6])。

5. 存在定理

本節では解の存在定理について論文 [29, 10] とは別のアプローチでの解の存在定理の証明方針を紹介しよう。堤正義氏の記事 [59] の閉曲線の問題を参考に我々の自由境界問題での証明を与えた (なお [59] ではより一般の曲率流 $V = g(\kappa)$ を扱っている)。実は [29] の証明の方が斉次 Dirichlet 境界条件の半線形放物型方程式に帰着しておりより初頭的である。だがここでは曲率方程式で押し切ることにする。さて曲率の満たす発展方程式は以下で与えられる。

$$(5.1) \quad \begin{cases} \kappa_t = \kappa_{ss} + \kappa^2(\kappa + c), & 0 < s < L(t), \quad t \in [0, T), \\ \kappa_s = \kappa(\kappa + c) \cot \psi_-, & s = 0, \quad t > 0, \\ \kappa_s = \kappa(\kappa + c) \cot \psi_+, & s = L(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

境界条件は曲率の定義と (3.1) から確認が出来る。ここで s は弧長パラメーターであり、標準的な次の関係で結びつけられる。

$$s(x, t) = \int_{l_-(t)}^x \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx$$

なお長さに関しては次の常微分方程式が得られる。

$$(5.2) \quad L'(t) = \cot \psi_+(\kappa(L(t), t) + c) + \cot \psi_-(\kappa(0, t) + c) + c(\psi_+ + \psi_-) - \int_0^{L(t)} \kappa^2 ds, \quad t > 0.$$

境界条件 $u(l_{\pm}(t), t) = 0$ に注意し, (5.1)-(5.2) の解の端点と同じ y 座標をもつことを数式化すると

$$(5.3) \quad \int_0^t \sin \left\{ \int_0^s \kappa(\tilde{s}, t) d\tilde{s} \right\} ds = 0.$$

が満たされている必要がある。したがって (5.1)-(5.2) の解で (5.3) を満たすものを探す必要があるが, 実は初期時刻で条件 (5.3) が満たされているときその後の時刻でもこの条件が満たされることが計算ですぐに確認できる。よって (5.1)-(5.2) を考察すれば十分である。ひとたび上の自由境界問題の解 (κ, L) が得られれば, もとの未知関数 $l_{\pm}(t)$ は次の微分方程式から復元できる:

$$l'_-(t) = -\frac{\kappa(0, t) + c}{\sin \psi_-}, \quad l'_+(t) = \frac{\kappa(L(t), t) + c}{\sin \psi_+}, \quad l_{\pm}(0) = l_{\pm}^0.$$

この式と関係式 $u_x(x, t)dx = \sin \Theta(s, t)ds$ によって (P) の解 $(u, l_{\pm})$ が次の関係式で, 解の存在や連続依存性などの情報が再現されることがわかる。

$$\begin{cases} u(x, t) = \int_0^{s(x, t)} \sin \left\{ \int_0^s \kappa(\tilde{s}, t) d\tilde{s} \right\} ds, \\ l_-(t) = l_-^0 - \int_0^t \frac{\kappa(0, \tilde{t}) + c}{\sin \psi_-} d\tilde{t}, \\ l_+(t) = l_+^0 + \int_0^t \frac{\kappa(L(\tilde{t}), \tilde{t}) + c}{\sin \psi_+} d\tilde{t}. \end{cases}$$

したがって曲率と長さの連立発展方程式 (5.1)-(5.2) の解の存在を議論すれば十分なのである。

自由境界問題の解の存在を議論するときは, 固定境界の問題に帰着させるのが定石である。ここでも区間を正規化して, 長さ変数の範囲を $[0, 1]$ に変換する。すなわち

$$(5.4) \quad \tau = \int_0^t \frac{dt}{L^2(t)}, \quad z = \frac{s}{L(t)}.$$

すると上の自由境界問題 (5.1)-(5.2) は $w(z, \tau) = L(t)\kappa(s, t)$, $\eta(\tau) = \log L(t)$ に関する以下の非局所的な非線形項を有する半線形放物型方程式の固定境界問題に帰着できる:

$$(5.5) \quad \begin{cases} w_{\tau} = w_{zz} + w^2(w + ce^{\eta(\tau)}) + q(\tau)(w + zw_z) = f(w, w_z), & z \in (0, 1), \tau > 0, \\ \eta' = q(\tau), & \tau \geq 0, \\ w_z(0, \tau) = \cot \psi_- w(0, \tau) \{w(0, \tau) + ce^{\eta(\tau)}\} = g_0(\tau), & \tau \geq 0 \\ w_z(1, \tau) = -\cot \psi_+ w(1, \tau) \{w(1, \tau) + ce^{\eta(\tau)}\} = g_1(\tau), & \tau \geq 0, \end{cases}$$

ただし $p(z, \tau) = L(t)L'(t)$ である。したがって

$$q(\tau) = \cot \psi_+ (w(1, \tau) + ce^{\eta(\tau)}) + \cot \psi_- (w(0, \tau) + ce^{\eta(\tau)}) + c(\psi_+ + \psi_-)e^{\eta(\tau)} - \int_0^1 w^2 dz.$$

偏微分方程式 (5.5) の初期条件は

$$w(z, 0) = L(0) \kappa(L(0)z, 0), \quad \eta(0) = \log L(0)$$

で与える。さて準備が整ったので, バナッハ空間 $X_0 = L^q(0, 1)$ ($1 < q < \infty$) で解の存在を考える。問題になるのは微分作用素 $-d^2/dz^2 : X_0 \rightarrow X_0$ の定義域を考えようとすると境界条件が非線形なので w に依存してしまうということである。そのため標準的な半群の定理では間に合わない。この難点を克服するために H. Amann らが導入したのが補外空間の理

論である. その一般論をどのように使うか概略を述べる. 上の放物型方程式 (5.5) の両辺に $v_z(0) = v_z(1) = 0$ を満たす滑らかな関数 v をかけて Green の公式を用いると

$$(5.6) \quad \int_0^1 (w_\tau v - w v_{zz} - f(w, w_z) v) dz - g_1(\tau) v(1, \tau) + g_0(\tau) v(0, \tau) = 0.$$

を得る. また $X_1 = X_1(q) := \{w \in W^{2,q}(0,1) \mid w_z(0) = w_z(1) = 0\}$ として $X_\theta = X_\theta(q)$ を対応する補間空間とする. ここで $\theta \in (0,1)$ である. さて補外空間とは $\theta < 0$ として関数空間を $X_\theta(q) = [X_{-\theta}(q')]'$ で定義するのである. ここで q' は q の双対指数 $1/q + 1/q' = 1$. とくに $0 < 2\theta < 1 + 1/q$ のときは $X_\theta(q) = W^{2\theta,q}(0,1)$. 微分作用素 $A(q) : X_1(q) \rightarrow X_0(q) : w \mapsto -w_{zz}$ は関数空間 X_0 での非有界作用素とし, $A_{-1/2}(q)$ は作用素 $A(q)$ の関数空間 $X_{-1/2}(q)$ での閉包とする. このとき $A_{-1/2}$ の定義域は $X_{1/2}$ に一致して

$$\langle A_{-1/2}(q)w, v \rangle_{-1/2} = \langle w, A_{-1/2}(q')v \rangle_{1/2}, \quad w \in X_{1/2}(q), \quad v \in X_{1/2}(q').$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2}$ は関数空間 $X_{-1/2}(q)$ と $X_{1/2}(q')$ の双対ペアである. 一方 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2}$ は関数空間 $X_{1/2}(q)$ と $X_{-1/2}(q')$ の双対ペアである.

もし $w(\tau) \in X_{1/2}(q) = W^{1,q}(0,1)$ ならば

$$\int_0^1 -w v_{zz} dz = \langle w, A_{-1/2}(q')v \rangle_{1/2} = \langle A_{-1/2}(q)w, v \rangle_{-1/2}.$$

さらに $w_\tau(\tau) \in X_{-1/2}(q)$ を仮定すると (5.6) は次のように定式化される

$$\langle w_\tau + A_{-1/2}(q)w - f(w, w_z), v \rangle_{-1/2} - g_1(\tau) v(1, \tau) + g_0(\tau) v(0, \tau) = 0.$$

この恒等式は任意の $v \in X_{1/2}(q') = W^{1,q'}(0,1)$ に対して成立するので

$$\langle w_\tau + A_{-1/2}(q)w - F(w), v \rangle_{-1/2} = 0 \quad \text{for } v \in X_{1/2}(q'),$$

と書き表そう. ここで $F(w) = f(w, w_z) + \gamma' \{g_0, g_1\}$ であり γ' はトレース作用素の双対シンボルである. このように境界条件を非線形項の中に組み込めて, 以下の抽象的な発展方程式を得る:

$$w_\tau + A_{-1/2}(q)w = F(w) \quad \text{for } w \in X_{-1/2}(q),$$

ここで $2\beta = 1$ として $2\alpha \in (1, 1 + 1/q)$ を満たすように α を選ぶ. すると容易にわかるように $F : X_\beta(q) \rightarrow X_{\alpha-1}(q)$ は局所リプシッツ連続であり, 有界な集合上で一様である. この設定で [51] の Theorem 51.25(i) を適用すると $w \in C([0, T], W^{1,q}(0,1))$ は任意の初期値 $w_0 \in W^{1,q}(0,1)$ に対して解が一意的に存在することがわかるさらにそれは任意の $\tau > 0$ で古典解になり $W^{1,q}(0,1)$ における適切性も保障される. ここで関数空間の取り方にはある程度自由性があり [51] の Theorem 51.25(ii) を用いればより弱い正則性の初期値のもとで解の存在が議論できる (この場合は f' や g' に制限がつく). なお非線形境界条件の反応拡散方程式に関しては [54] とその参考文献で勉強できる.

注意 5.1. (C) の場合の解析結果によると発展方程式 (5.1) の非線形自由境界問題の解が有限時間しか存在しないなら区間全体で爆発して, 爆発が Type I であることがわかる. その証明では $\Gamma(t)$ の幾何的な情報をフルに使っている. だが理屈上では曲率の発展方程式 (5.1) あるいは (3.1) だけを解析して直接に同じ結果を示せるはずである. 実際, 閉曲線の場合はそういった試みが行われている ([59, 50, 60]). 敢えて使える手法を制限して解析をすることで, 爆発問題の方面に新たな手法が見つかることはないだろうか. 逆に与えられた特別な反応拡散方程式の爆発問題のある曲線の曲率の爆発問題と解釈して, それに付随する曲線の幾何的な情報を利用することはどれくらい可能なのだろうか?

6. 面積保存型曲率流

さてこれまでで議論した問題では進行波は不安定であり「ほとんど観測できない」解であったが、面積保存型の方程式

$$(6.1) \quad V = \kappa - \frac{\int_{\Gamma(t)} \kappa ds}{\int_{\Gamma(t)} ds} = \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)}, \quad \text{Ang}_{\pm}(\Gamma(t)) = \text{Ang}_{\pm}(\Gamma(0)),$$

を考えたら進行波解は時間が経つと自然に形成される。方程式 (6.1) の解は (初期値が上に凸なら) 時間無限大まで存在する。進行波の存在は $V = \kappa + c$ の場合とほぼ同じであるが、進行波はスケーリングと平行移動を除いて一意的に存在する。そのため「いつも進行波に収束する」のである。だが今度は方程式が非局所的なので交点数の議論は適用が難しい。そのためスペクトル解析やリャプノフ関数の構成で考えるのが自然だろう。前節までの問題と同様で曲率の方程式

$$(6.2) \quad \begin{cases} \kappa_t = \kappa^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)} \right), & -\psi_+ < \theta < \psi_+, \quad t > 0, \\ \kappa_{\theta} = \cot \theta \left(\kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)} \right), & \theta = \mp \psi_{\pm}, \quad t > 0, \\ \kappa(\theta, 0) = \kappa_0(\theta), & -\psi_+ \leq \theta \leq \psi_- \end{cases}$$

の定常解 $\kappa^* = -\frac{\psi_+ + \psi_-}{L^*} - \frac{\nu}{L^*} \sin \theta$ は進行波に対応している。ただし L^* は進行波の長さであり、定数 ν は ψ_+, ψ_- だけで決まる実数である。この式は進行波の伝播速度が L^* に反比例することも意味するので、サイズが大きな進行波ほどゆっくり伝播する。さて定常解 κ^* における線形化方程式は以下で与えられる:

$$\mathcal{L}(\kappa) := (\kappa^*)^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa - \frac{\psi_+ + \psi_-}{(L^*)^2} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa}{(\kappa^*)^2} d\theta \right),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \left\{ \kappa \in H_*^2([-\psi_+, \psi_-]) \mid \kappa_{\theta} = \mp \cot \psi_{\pm} \left(\kappa - \frac{\psi_+ + \psi_-}{(L^*)^2} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa}{(\kappa^*)^2} d\theta \right) \text{ at } \theta = \mp \psi_{\pm} \right\}.$$

実は作用素 $\mathcal{L}$ は 0 を代数的重複度 2 の固有値としてもち、その他の固有値はすべて実部が負である。その解析では距離関数に関する線形化作用素と曲率方程式に関する線形化作用素の 2 つを同時に調べていく。保存量のある拡散方程式に関する森田善久氏の概説のスペクトル comparison の議論がこの問題に関連しているかも知れない。この事情を説明するため、まず進行波解からの距離関数の線形化を考えよう。ある進行波解 $\mathcal{W}(t) = \{\vec{W}(s, t) \mid s \in [0, L^*]\}$ からの摂動を形式的に

$$\Gamma_{\epsilon}(t) = \{\vec{Y}(s, t) = \vec{W}(s, t) + \epsilon \Phi(s, t) \vec{n}(\vec{W}(s, t)) \mid \vec{W}(s, t) \in \mathcal{W}(t)\}$$

と書くことにしよう ([18] の 6 節: s は進行波解 $\mathcal{W}(t)$ の左からの孤の長さであって $\Gamma_{\epsilon}(t)$ の孤長パラメーターでない)。進行波の形状は時間変化しないので $\vec{n}_t(s, t) = 0$ 。これから

$$V(\vec{Y}(s, t)) = V(\vec{W}(s, t)) + \epsilon \Phi_t(\vec{W}(s, t)) + O(\epsilon^2),$$

$$\kappa(\vec{Y}(s, t)) = \kappa(\vec{W}(s, t)) + \epsilon \left\{ \Phi_{ss}(\vec{W}(s, t)) + \kappa^2 \Phi(\vec{W}(s, t)) \right\} + O(\epsilon^2),$$

$$\vec{n}(\vec{Y}(s, t)) = \vec{n}(\vec{W}(s, t)) - \epsilon \nabla_w \Phi + O(\epsilon^2), \quad L(\Gamma_{\epsilon}(t)) = L(\mathcal{W}(t)) + \epsilon \delta L(\Phi(\cdot, t)) + O(\epsilon^2),$$

を得る (∇_w は $\mathcal{W}(t)$ に沿った勾配)。これらを (6.1) に代入して ϵ の係数を計算すると

$$\Phi_t = \Phi_{ss} + (\kappa^*)^2 \Phi - \frac{\psi_+ + \psi_-}{L^2(\mathcal{W}(t))} \left(\int_0^{L^*} -\kappa^*(s) \Phi(s, t) ds + \cot \psi_- \Phi(0, t) + \cot \psi_+ \Phi(L^*, t) \right).$$

これに対応する作用素は

$$\mathcal{A}\phi(\theta) := (\kappa^*(\theta))^2(\phi_{\theta\theta} + \phi) - \frac{\psi_+ + \psi_-}{(L^*)^2} \delta L(\phi),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ \phi \in H_*^2([- \psi_+, \psi_-]) \mid \phi_\theta(\psi_-) = \cot \psi_- \phi(\psi_-), \phi_\theta(-\psi_+) = -\cot \psi_+ \phi(-\psi_+) \right\}.$$

ここで

$$\delta L(\phi) = \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \phi d\theta + \cot \psi_- \phi(\psi_-) + \cot \psi_+ \phi(-\psi_+).$$

この線形化作用素は作用素 $\mathcal{L}$ よりも扱いやすそうに見える。なぜなら境界条件に非局所項がないからである。ただ本来変化する長さを強引に L^* に置き換えているなど、怪しいところがある。だが不思議なことに $\mathcal{A}$ は $\mathcal{L}$ の随伴作用素になっていることが分かるのである。このことを用いて計算していくと $\mathcal{L}$ の 0 以外の固有値は (端点が x 軸上に拘束された摂動に対して) 実部がすべて負であることがわかる。しかしながら固有値 0 が半単純でないため、群作用のある力学系の一般論 ([49, 36]) の適用範囲外なのである。この難点はどのように乗り越えれば良いのだろうか？

「問題が難しければ一般化せよ」という有名な言葉があるが、今の場合は次の一般化された問題 (6.3)-(6.4) を考えるのが有効である。

$$(6.3) \quad V = \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)} - \frac{l'_+(t)}{L(t)} H, \quad \text{Ang}_\pm(\Gamma(t)) = \text{Ang}_\pm(\Gamma(0)).$$

ただし H は以下で定義される定数である。

$$(6.4) \quad H = - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{\kappa_0(\theta)}.$$

問題 (6.3)-(6.4) は $H = 0$ のとき (6.1) -(3.2) と一致し、 H の絶対値が小さいときは解が時間大域的に存在する。このことはパラメータ付き準線形放物型方程式の一般論 ([2]) からしたがう。我々は両端点が x 軸上にある場合の問題 (6.3)-(6.4) だけでなく、両端点の高さが H だけずれた問題も一気で解析するという戦略をとった。曲率方程式 (6.2) は次の方程式におきかわる：

$$\begin{cases} \kappa_t = \kappa^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)} - \frac{l'_+(t)}{L(t)} H \right), & -\psi_+ < \theta < \psi_+, \quad t > 0, \\ \kappa_\theta = \cot \theta \left(\kappa + \frac{\psi_+ + \psi_-}{L(t)} - \frac{l'_+(t)}{L(t)} H \right), & \theta = \mp \psi_\pm, \quad t > 0, \\ \kappa(\theta, 0) = \kappa_0(\theta), & -\psi_+ \leq \theta \leq \psi_-. \end{cases}$$

実は補正項を付加した問題 (6.3)-(6.4) を考えると、どんな (A, H) の組合せでも必ずただ一つの進行波解が存在することがわかる。進行波に対応するのは曲率方程式の定常解だが、それは以下の集合で与えられる：

$$\mathcal{E} = \left\{ \kappa^*(\theta, H, L^*) = -\frac{\psi_+ + \psi_- + \nu \sin \theta}{L^*} + \frac{\nu H}{(L^*)^2} \mid H \in \mathbb{R}, L^* > 0, \nu = \nu(H/L^*) \right\}.$$

ところでネーターの定理によれば保存量があればそれに付随する群が存在する。今の場合、それは拡大・縮小の群 $\mathbb{R}_+$ と端点の高低差を変えるアーベル群 $\mathbb{R}$ である。これらの群作用を使ってやれば $\kappa^* = \kappa^*(\theta, H, L^*)|_{H=0}$ での中心多様体が自然に生成される。なお問題 (6.3)-(6.4)

の場合は解析する線形作用素は次のものにおきかわる:

$$\hat{\mathcal{L}}(\kappa) := (\kappa^*)^2 \left(\kappa_{\theta\theta} + \kappa + \frac{1}{L^*} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa}{\kappa^*} d\theta \right),$$

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) := \left\{ \kappa \in H_*^2([-\psi_+, \psi_-]) \mid \kappa_\theta = \mp \cot \psi_\pm \left(\kappa + \frac{1}{L^*} \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa}{\kappa^*} d\theta \right) \text{ at } \theta = \mp \psi_\pm \right\}.$$

実はこの作用素のスペクトルの解析は上に述べた最初の作用素 $\mathcal{L}(\kappa)$ の解析よりずっと簡単である. まず随伴作用素 $\hat{\mathcal{L}}^*$

$$\hat{\mathcal{L}}^* \phi(\theta) := (\kappa^*(\theta))^2 (\phi_{\theta\theta} + \phi) - \frac{\kappa^*(\theta)}{L^*} \delta L(\phi),$$

$$\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}^*) := \left\{ \phi \in H_*^2([-\psi_+, \psi_-]) \mid \phi_\theta(\psi_-) = \cot \psi_- \phi(\psi_-), \phi_\theta(-\psi_+) = -\cot \psi_+ \phi(-\psi_+) \right\}.$$

の 0 固有空間は正弦関数 $\sin \theta$ と進行波のサポート関数

$$S^*(\theta) := -\sin \theta \left(\int_{\psi_-}^{\theta} \frac{\cos \tilde{\theta}}{\kappa^*(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta} \right) + \cos \theta \left(\int_{\psi_-}^{\theta} \frac{\sin \tilde{\theta}}{\kappa^*(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta} \right).$$

が張るベクトル空間である. なおここでサポート関数の性質 $(\kappa^*)^2 (S_{\theta\theta}^* + S^*) = \kappa^*$ と $\delta L(S^*) = -L^*$ を用いる. 前者の $\sin \theta$ が平行移動によって進行波の族が作れることに対応していて, 後者の $S^*(\theta)$ は拡大縮小で進行波の族が作れることに対応する. 各々の群作用で方程式を微分すると必然的にこれらの 0 固有関数が現れるのである. さらに [61] と類似の議論を我々の問題の枠組みで行うと固有値はすべて実数であり, $(S^*, \kappa^*)_* > 0$ を示せば, $\mathcal{A}$ の 0 以外の固有値の実部が負になることがわかる. サポート関数の基本性質から $2^{-1}(S^*, \kappa^*)_*$ は進行波と x 軸で囲まれた部分の面積と一致する. よってこの条件は簡単にチェックが可能である. この随伴作用素の固有値の情報を考慮すると以下のことが示せる.

- 集合 $\mathcal{E}$ はソボレフ空間 $H^2([-\psi_+, \psi_-])$ で滑らかな 2 次元多様体をなす.
- $\mathcal{E}$ の点 κ^* での接空間は $\text{Ker}(\hat{\mathcal{L}}) = \text{span}\{\sin \theta, 1\}$ と一致して 0 は半単純固有値.
- $\sigma(\hat{\mathcal{L}}) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\} \cap \mathbb{R}$.

この条件から群作用のある力学系の一般論 ([49, 36]) が適用できるようになり, 解 $\kappa(\theta, t, H, L^*)_{H=0}$ は $\mathcal{E}$ の元 $\kappa^*(\theta, \tilde{H}, \tilde{L}^*)$ に収束する. だが面積保存と高低差保存の関係から $\tilde{L}^*$ は端点が x 軸上で面積 $A(0)$ を持った進行波の長さ L^* であり, $\tilde{H}$ は 0 でないといけない. ゆえに収束先は $\kappa^*(\theta, 0, L^*)$ しかない. 一気に問題が解けてしまった! ハミルトン系の方程式の族に, 最初の方程式を適切な形で埋め込むことで突然見通しがよくなるというのが議論の本質である¹.

注意 6.1. 疑問に思われるのは (6.1) のまま (6.4) を課してはいけいないのかということであろう. だがこの場合 (6.1) は端点の高さを保存するが面積 $A(t)$ を保存しない. したがって保存量がひとつ損失される. しかも (6.1) と (6.4) では $H \neq 0$ のときは進行波が存在しないことも証明できる. これらが原因で, 先ほどの半単純性の破れは生じてしまうのである.

注意 6.2. 閉曲線に関する体積保存型の曲率流は初期値が凸ならば, 解の形状が円周に収束する. この結果に関しては [23] が古典的であるが, 最近では [13] に紹介されている証明も分かりやすい. だがその証明を読むと曲率が定数に収束することしか述べてない. 収束先の円の中心は本当に動かないのだろうか? これは [23] の最後に議論されているが, どうも不十分に思えてしまう. この問題は後になって [63, 20] らがより本格的に扱っている. 双曲空間内では曲面が曲率一定曲面に収束して, さらに重心点もどこかの点に収束する ([63] の 12 章). 線形化作用素のスペクトルがすべて負になることを用いている. 一方でユークリッド

¹この面積保存曲率流の解析は東京工業大学の可香谷隆氏と共同研究に基づく ([34]).

空間 $\mathbb{R}^n$ の場合はゼロスペクトルが出てしまうので微妙である。ユークリッド空間では高次元の閉曲面も含めて球面の安定性が [20] により証明されているようだ。球面調和関数を用いて $n+1$ 次元中心多様体を構成して指数収束を示している。これを閉曲線の場合で説明しよう。簡単のため初期曲線を凸とする。半径 R の円周において距離関数による線形化作用素は自己共役であり以下で与えられる:

$$\mathcal{A}\phi(\theta) = \frac{1}{R^2} \left(\phi_{\theta\theta} + \phi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi d\theta \right), \quad \phi \in H_{per}^2([0, 2\pi]).$$

自由境界問題の曲率の場合と同じ解析を行うと距離関数の方で以下のことが示せる:

- 定常解の集合 $\mathcal{E}_{per}$ は $H_{per}^2([0, 2\pi])$ 内で滑らかな 3 次元多様体をなす。
- $\mathcal{E}_{per}$ の接空間は $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{span}\{\cos \theta, \sin \theta, 1\}$ と一致して 0 は半単純固有値。
- $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\} \cap \mathbb{R}$ 。

定常解は円周なので中心点と半径でパラメータ付け出来るから最初の主張が従う。なお $\text{Ker}(\mathcal{A})$ の $\{1\}$ は拡大・縮小変換に対応して、 $\{\cos \theta, \sin \theta\}$ は平行移動の群に対応する。したがって群作用が付随する中心多様体の一般論から極限曲線は $\mathcal{E}_{per}$ の元のどれかに収束する。

注意 6.3. 我々の面積保存型曲率流の自由境界問題の研究に関連する結果として、支持曲線が x -軸の 1 本だけでなく、 y 軸に平行な 2 直線の場合に対する解析があり ([19]), 任意の解の定常解への収束が証明されている。固定境界問題なので我々の場合よりずっと簡単である。

7. 未解決問題と関連トピック

これまでサポートがひとつの解を考えてきたが、複数のサポートが衝突したら何が起こるのだろうか ([9])。もし体積を保存しないで減少させていくと、サポートがちぎれて分離するようである ([38])。非等方的曲率流や非均質な媒質上の問題といった枠組みに拡張する研究は興味深い。また流体運動を考えた関連研究もある ([52])。なお曲率流の角度一定自由境界問題はネットワーク曲率流の特殊な場合であるから、自由境界問題の解析自体は最初のステップに過ぎないのである ([43, 58])。

謝辞: 二宮広和氏 (明治大学) と可香谷隆氏 (東京工業大学) には誤植や図の校正でお世話になりました。なおこの研究は科学研究費補助金 (若手 (B) No.23740128) の援助の下で行われた。

REFERENCES

- [1] B.L. Adams, S. Ta'asan, D. Kinderlehrer, I. Livshits, D. E. Mason, C.-T. Wu, W. W. Mullins, G. S. Rother, A. D. Rollett, D. M. Saylor, *Extracting grain boundary and surface energy measurement of triple junction geometry*, Interface Sci. **7** (1999), 321–338.
- [2] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. Reaction diffusion systems*, Differential and Integral Equations **3** (1990), 13–75.
- [3] S. Angenent, *The zero set of a solution of a parabolic equation*, J. Reine Angew. Math. **380** (1988), 79–96.
- [4] S. Angenent, *On the formation of singularities in the curve shortening flow*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 601–633.
- [5] B. Andrews, P. Bryan, *Curvature bound for curve shortening flow via distance comparison and a direct proof of Grayson's theorem*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **653** (2011), 179–187.
- [6] G. Bellettini and M. Novaga, *Curvature evolution of nonconvex lens-shaped domains*, J. Reine. Angew's. Math. **656** (2011), 17–46.
- [7] K. A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Princeton University Press, Princeton (1978).
- [8] P. K. Brazhnik, *Exact solutions for the kinematic model of autowaves in two-dimensional excitable media*, Physica D **94** (1996), 205–220.

- [9] L. A. Caffarelli, J. L. Vazquez, *A free boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 411–441.
- [10] Y.-L. Chang, J.-S. Guo, Y. Kohsaka, *On a two-point free boundary problem for a quasilinear parabolic equation*, Asymptotic Analysis **34** (2003), 333–358.
- [11] Y. G. Chen, Y. Giga, S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solution of generalized mean curvature flow equations*, J. Differ. Geom. **33** (1991), 749–786.
- [12] X. Chen, J.-S. Guo, *Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line*, Math. Ann. **350** (2011), 277–311.
- [13] X.-L. Chao, X.-R. Ling, and X.-L. Wang, *On a planar area-preserving curvature flow*, Proceedings of the American mathematical society **141** (2013), 1783–1789.
- [14] K. Deckelnick, C. M. Elliott, G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Nonlinearity **10** (1997), 655–678.
- [15] Yihong Du, *Spreading-vanishing dichotomy in nonlinear Stefan problems*, 数理解析研究所講究録 **1881** (2014), 121–133.
- [16] Yihong Du, M. Zhou and H. Matsuzawa, *Sharp estimate of the spreading speed determined by nonlinear free boundary problems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **46** (2014), 375–396.
- [17] A. Ducrot, T. Giletti, H. Matano, *Existence and convergence to a propagating terrace in one-dimensional reaction-diffusion equations*, <http://arxiv.org/abs/1203.6206>.
- [18] S.-I. Ei, M. Sato and E. Yanagida, *Stability of stationary interfaces with contact angle in a generalized mean curvature flow*, American J. Math. **118** (1996), 653–687.
- [19] J. Escher and Z. Feng, *Exponential stability of equilibria of the curve shortening flow with contact angle*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A, Mathematical Analysis **14** (2007), 287–299.
- [20] J. Escher and G. Simonett, *The volume preserving mean curvature flow near spheres*, Proceedings of the American mathematical society, **126** (1998), 2789–2796.
- [21] L. C. Evans, J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differ. Geom. **33** (1991), 635–681.
- [22] P. C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*, (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. **53**, 1988), SIAM, Philadelphia.
- [23] M. Gage, *On an area-preserving evolution equation for plane curves*, Nonlinear problems in geometry, Contemp. Math. **51** (1986), 51–62.
- [24] V.A. Galaktionov, *Geometric Sturmian Theory of Nonlinear Parabolic Equations and Applications*, Chapman and Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science.
- [25] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom. **23** (1986), 69–96.
- [26] ドウジェンヌ・プロシャール-ヴィアール・ケレ, 奥村剛訳, 表面張力の物理学, 吉岡書店.
- [27] 儀我美一・儀我美保, 非線形偏微分方程式, 共立講座 21 世紀の数学 **25** (1999).
- [28] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 285–314.
- [29] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, to appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis.
- [30] M. Gurtin, *Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane*, Oxford Science Publication, London (1993).
- [31] C. Herring, *Surface tension as a motivation for sintering*, The Physics of Powder Metallurgy, (Kingston, W., ed.), McGraw-Hill, New York (1951).
- [32] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **31**(1990), 285–299.
- [33] T. Kagaya and M. Shimojo, *Stable and unstable manifold on a free boundary problem of the curvature flow with driving force*, <http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/2364/1/pre1066.pdf>
- [34] T. Kagaya and M. Shimojo, *Exponential stability of a traveling wave for an area preserving curvature motion with two endpoints moving freely on a line*, submitted to Asymptotic Analysis.
- [35] Y. Kaneko and H. Matsuzawa, *Spreading speed and sharp asymptotic profiles of solutions in free boundary problems for nonlinear advection-diffusion equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **428** (2015), 43–76.

- [36] T. Kapitula and K. S. Promislow, *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*, Applied Mathematical Sciences (Springer) 2013.
- [37] D. Kinderlehrer, C. Liu, *Evolution of grain boundaries*, Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (2001), 713–729.
- [38] 小磯深幸, 非等方的平均曲率一定曲面の安定性解析と物理現象への応用, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2011」報告集原稿.
- [39] B. Lou, *Self-similar solutions in a sector for a quasilinear parabolic equation*, Networks and Heterogeneous Media, AIMS **7** (2012), 857–879.
- [40] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995.
- [41] C. Mantegazza, *Lecture notes on mean curvature flow*, Progress in Mathematics, vol. 290, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [42] A. Magni, C. Mantegazza, *A note on Grayson's theorem*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Calculus of variations and geometric measure theory (2013).
- [43] A. Magni, C. Mantegazza and M. Novaga, *Motion by curvature of planar networks II*, arXiv:1301.3352 (2013).
- [44] H. Matano, *Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semi-linear parabolic equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **29** (1982) 401–441.
- [45] W. Mullins, *Solid surface morphologies governed by capillarity*, Metal Surface: Structure, Energetics and Kinetics. Am. Soc. Metals., (1963) 17–66.
- [46] K.-I. Nakamura, H. Matano, D. Hilhorst and R. Schätzle, *Singular limit of a reaction-diffusion equation with a spatial inhomogeneous Reaction term*. Journal of statistical physics **95** (1999), 1165–1185.
- [47] 二宮 広和 (著), 三村 昌泰 (編集), 竹内 康博 (編集), 森田 善久 (編集), 侵入・伝播と拡散方程式, 共立出版.
- [48] H. Ninomiya, M. Taniguchi, *Traveling curved fronts of a mean curvature flow with constant driving force*. Free Boundary Problems: Theory and Applications I, Mathematical Sciences and Applications **13**, Gakuto International Series (2000), 206–221, Gakkotosho, Tokyo.
- [49] J. Prüss, G. Simonett and R. Zacher, *On convergence of solutions to equilibria for quasilinear parabolic problems*, Journal of Differential Equations **246** (2009), 3902–3931.
- [50] M. Winkler, *Blow-up in a degenerate parabolic equation*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1415–1442.
- [51] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States*. Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher, 2007.
- [52] W. Ren, D. Hu and E. Weinan, *Continuum models for the contact line problem*, Physics of Fluids **22** 102103, (2010).
- [53] キーナー (著), 坂元 国望 (訳), 応用数学—変換論と近似論〈下〉発展編, 日本評論社.
- [54] K. Sakamoto, *Destabilization/Stabilization of Diffusion Systems by Diffusion and Boundary Flux*, 数理解析研究所講究録 **1924** (2013), 30–54.
- [55] O. C. Schnurer, A. Azouani, M. Georgi, J. Hell, N. Jange, A. Koeller, T. Marxen, S. Ritthaler, M. Saez, F. Schulze, and B. Smith *Evolution of convex lens-shaped network under the curve shortening flow*, Transactions of the American Mathematical Society **363** (2011), 2265–2294.
- [56] G. Simonett, *Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems*, Differential Integral Equations **8** (1995), 753–796.
- [57] N. C. Owen and P. Sternberg, *Gradient flow and front propagation with boundary contact energy*, Proceedings: Mathematical and Physical Sciences **437** (1992), 715–728.
- [58] C. E. Torres, M. Emelianenko, D. Golovaty, D. Kinderlehrer and S. Taasan, *Numerical analysis of the vertex models for simulating grain boundary network*, <http://arxiv.org/abs/1410.5809>.
- [59] M. Tsutsumi, *The curve shortening equation and its generalizations*, 数理解析研究所講究録 **913** (1995), 90–107.
- [60] M. Tsutsumi, T. Ishiwata, *Regional blow-up of solutions to the initial-boundary value problems for $u_t = u^\delta(\Delta u + u)$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 871–887.
- [61] T. I. Vogel, *Sufficient conditions for capillary surfaces to be energy minima*, Pacific journal of mathematics **194** (2000), 469–489.
- [62] F. B. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p* , Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 79–102.
- [63] Xi-Ping Zhu, *Lectures on Mean Curvature Flows*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 2002.