

有界調和関数族上の汎関数の退化について

広島大 理 酒井 良

compact な Riemann 面 上の調和関数は定数である。したがって定数でない調和関数の存在する Riemann 面は non-compact であるが、このとき定数でない調和関数は次の意味でたくさんある。面上に集積しない点列 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ と各 z_j に局所変数 $z_j (=x_j + iy_j)$, 自然数 m_j , 実数 c_j を任意に与えて

$$\left. \frac{\partial^{m_j} u}{\partial x_j^{m_j}} \right|_{z_j = z_j} = c_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

をみたす調和関数 u が存在する。つまり、定数でない調和関数が存在すれば、汎関数 $u \mapsto \left. \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right|_{z=z}$ に退化しないものは調和関数がたくさんある。このようなことが調和関数の部分根に関して成立するであろうか。部分根としては無論意味のあるもの例えば Dirichlet 積分有限の根、有界な根などをとる。厂史的には、正則関数の根に関してよく調べられた。

non-compact な Riemann 面は Stein 多様体である,
 上のことは調和関数と正則関数とをかきえて成り立つ. として
 有界正則関数に関してはそのようなことはおきない. つま
 り, 定数でない有界正則関数が存在し任意の有界正則関数 f
 に対して,

$$\frac{df}{dz} \Big|_{z=\zeta} = 0$$

となる点 ζ があるような Riemann 面は Myrberg [1] に
 より構成された. 我々はこれを ζ を調和関数に関して調
 べるのであるが, Dirichlet 積分有限の根に関して [3] で
 調べたのであることは有界な根に関して調べる. 結果は [3] で
 得たものと同様であるが証明など異なるところ部分について主
 に述べる.

§1. Riemann 面の根 S_X^1 .

$HB(W)$ は Riemann 面 W 上の有界調和関数の全体とし,
 $KB(W)$ は $HB(W)$ の元 u に対して u の共役微分 u^c の周期が任意
 の dividing cycle に関して 0 となるものの全体とし, $AB(W)$
 は W 上の有界正則関数の全体とする. Riemann 面 W 上の ζ
 ξ と ξ の局所変数 $z (= x + iy)$ に対して X -span $S_X^1(\xi, z)$
 と

$$S_X^1(\xi, z) = \sup \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=\xi} ; u \in X, \sup_{p \in W} |u(p)| \leq 1 \right\}$$

と定義する. $z = z$, X は HB , KB または $Re AB = \{Re F | F \in AB\}$ である. ある点 $\xi \in W$ と ξ の局所変数 z が与えられ,
 $S_X^1(\xi, z) = 0$ となるような Riemann 面 W の全体を S_X^1 と表わす. O_X は $X(W)$ が定数のみからなる Riemann 面の族とする. $W \in O_X$ の必要条件は, すべての ξ と ξ のすべての局所変数 z に対して $S_X^1(\xi, z) = 0$ となることであり, したがって $O_X \subset S_X^1$ である. z が平面領域で S_{HB}^1 に属するものを特徴づけるために平面上の compact 集合 E に対して,
 $k(E)$ を

$k(E) = \{ \xi | \forall r > 0, \text{Cap} [\{ z | |z - \xi| \leq r \} \cap E] > 0 \}$
 と定義する. $z = z$ Cap は 正数容量を表わす. $k(E)$ は compactかつ perfect な E の部分集合であった,

$$(a) \quad k(E) = \emptyset \iff \text{Cap } E = 0$$

$$(b) \quad \text{Cap } k(E) = \text{Cap } E$$

$$(c) \quad k(k(E)) = k(E)$$

を示す. この $k(E)$ を用いて次の特徴づけを得る.

定理 1.1. W は平面領域で, $W \ni \infty$ とする. $W \in S_{HB}^1 - O_{HB}$ である必要条件は次の (i) と (ii) が成立することである.

(i) $E = W^c$ が $N_B - N_G$ に属する. したがって, $W \in O_{AB}$ かつ, $\text{Cap } E > 0$.

(II) $\Gamma(10) \subset \mathbb{C}$ あり, $k(E) \subset \mathbb{C}$. 但し直線は $\mathbb{C}$ 直に $\Gamma(10)$ と考え. 次は Riemann 面 $\Gamma(10)$ の $O_X \subset S_X^1$ の包含関係の "strict" である事を示す.

定理 1.2. 有限種数の Riemann 面 $\Gamma(10)$ には "strict" である,

$$(1) \quad O_{HB} \subset S_{HB}^1 \subset O_{AB},$$

$$(2) \quad O_{KB} = S_{KB}^1 = O_{AB} = S_{ReAB}^1.$$

一般に Riemann 面 $\Gamma(10)$ には,

$$O_{HB} \subset O_{KB} \subset O_{AB}$$

$$\begin{array}{ccc} \wedge & \wedge & \wedge \\ S_{HB}^1 & \subset & S_{KB}^1 \subset S_{ReAB}^1 \end{array}$$

であり, $O_{KB} \subset S_{HB}^1$, $S_{HB}^1 \subset O_{AB}$, $O_{AB} \subset S_{KB}^1$ には包含関係がない.

証明は省略するが, $W \in S_{HB}^1 - O_{AB}$ の例の構成についてのみ述べる. D は z -平面上の単位円板とし, slit $l_{n,m}$ は

$$l_{n,m} = \left\{ z = re^{i\theta} \mid 1 - \frac{1}{2^n} \leq r \leq 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+2}}, \right.$$

$$\left. \theta = \frac{2\pi}{[8\pi(2^n-1)]} \cdot m \right\}$$

$$(n=1, 2, \dots; m=1, 2, \dots, [8\pi(2^n-1)])$$

とする. $z = z^* [z]$ は $z \in \mathbb{C}$ なる最大整数 z^* を示す. D_i

($i=1, 2$) は $D - \bigcup_{n,m} l_{n,m}$ の二つの copy とし, 互

通に slit に沿って上下交叉してつなぎ合わせる. これに f

リ D 上の二葉の分岐被覆面 (W, π) が与えられる。2の W が分岐する例となっている。 $W \notin \mathcal{O}_{AB}$ は、 $\pi \in AB(W)$ 及び HA のため $W \in \mathcal{S}_{HB}^1$ である。任意の $u \in HB(W)$ に対して、 $\pi(p) = \pi(q)$ ならば $u(p) = u(q)$ である。 $|u| \leq M$ である。 l_n, m の端点 a に対して、 $D_{a,\rho} = \{z \mid |z-a| < \frac{\rho}{2n+2}\}$ ($0 < \rho \leq 1$) とおく。 $U_{a,\rho} = \pi^{-1}(D_{a,\rho})$ とおき、 $q = \pi^{-1}(\pi(p))$ の p と異なる分枝とすると、 $u(p) - u(q)$ は $U_{a,1}$ 上調和で、 δ -lemma ([2] 参照) より $p \in U_{a,\rho}$ ならば

$$|u(p) - u(q)| \leq \delta \sup_{p \in U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leq \delta \cdot 2M$$

である。 δ は $\sqrt{\rho}$ のみに依存して、 $0 < \delta < 1$ である。 ρ を十分1に近くすると、 $D \subset \bigcup_a D_{a,\rho}$ であるから、

$$\sup_{U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leq \delta \cdot 2M.$$

$$\therefore \sup_{U_{a,1}} |u(p) - u(q)| \leq \delta^n \cdot 2M. \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore u(p) = u(q).$$

u は任意であるから、 W の分岐点 ξ にとると ξ の任意の局所変数 t に対して $S_{HB}^1(\xi, t) = 0$. $\therefore W \in \mathcal{S}_{HB}^1$.

§ 2. 分離可能性.

Riemann 面 W の2点 ξ, ξ' に対して、 X -span $S_X(\xi, \xi')$ は

$S_X(\xi, \xi') = \sup \{ u(\xi) - u(\xi') ; u \in X, \sup_{p \in W} |u(p)| \leq 1 \}$
 と定義する. 異った二点 $\xi, \xi' \in W$ があるとき, $S_X(\xi, \xi') = 0$
 となる ξ は Riemann 面全体の S_X で表わす. $W \in S_X$
 であるとは, W 上は $X(W)$ に S_X で分離されたと
 あるというのとである. $S_X^1 \in S_X$ であることは定理 1.1,
 定理 1.2 から成り立つ. このことから次のことが分る.

定理 2.1. 平面領域に包まれるとき, $S_{HB} = S_{HB}^1$.

§3. 高位数の span.

Riemann 面 W 上の点 ξ と ξ の局所変数 $z (= x + iy)$ に対
 して, 位数 m の X -span は

$S_X^m(\xi, z) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^m u}{\partial z^m} \right|_{z=\xi} ; u \in X, \sup_{p \in W} |u(p)| \leq 1 \right\}$
 と定義する. S_X^m は S_X^1 と同様に定義する. $S_X^1 \in S_X^m$ である
 ことは, 定理 1.2 から成り立つ. 定理 1.1 は次の形に一般化される.

定理 3.1. W は平面領域である, $W \neq \emptyset$ とする. $W \in S_{HB}^m$
 O_{HB} であるための必要十分条件は次の (i) と (ii) から成り立つこと
 である.

(i) $E = W^c$ が $N_B - N_G$ に属する.

(ii) $\xi \in W$ と m 次の多項式 $P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ ($a_m \neq 0$)
 があるとき,

$\xi \neq \infty$ のときは, $k(E) \subset \{z \mid \operatorname{Im} P(\frac{1}{z-\xi}) = 0\}$

$\xi = \infty$ のときは, $k(E) \subset \{z \mid \operatorname{Im} P(z) = 0\}$

が成り立つ.

この定理の系として,

系 3.2. 平面領域に於て"ある", $S_{HB}^m \subset S_{HB}^n$ であるための必要十分条件は m が n の約数となることである.

§ 4. 点集合 $N_{X,\lambda}^m(W)$, $N_{X,\lambda}^m(W)$ について.

Riemann 面 W に対して, $N_{X,\lambda}^m(W) \subset N_{X,\lambda}^m(W) \subset \Sigma$

$N_{X,\lambda}^m(W) = \{\xi \in W \mid \xi \text{ が ある局所変数 } z \text{ に対して, } S_X^m(\xi, z) = 0\},$

$N_{X,\lambda}^m(W) = \{\xi \in W \mid \xi \text{ が 有限個の局所変数 } z \text{ に対して, } S_X^m(\xi, z) = 0\}$

と定義する. $N_{X,\lambda}^m(W) \subset N_{X,\lambda}^m(W)$, $N_{\operatorname{Re} AD, \lambda}^1(W) =$

$N_{\operatorname{Re} AD, \lambda}^1(W)$, $N_{X,\lambda}^m(W) \neq \emptyset \Leftrightarrow W \in S_X^m$ である. § 1

2" の意味は二つの平面領域に於ては,

(1) $N_{HB, \lambda}^1(W) \neq \emptyset$ ならば,

$$N_{HB, \lambda}^1(W) = W \quad (\text{つまり, } W \in O_G)$$

または, ある $C \subset W$ に対して $N_{HB, \lambda}^1(W) = W \cap C$.

であるが, 定理 1.1 の証明より, 次の二つが成り立つ.

(2) $N_{HB, \lambda}^1(W) \neq \emptyset$ ならば, $N_{HB, \lambda}^1(W) = W$.

任意の Riemann 面について, $\pi_1(W) = 0$ である。

定理 4.1. $N_{X,a}^m(W)$ の W 上に集積点を持つための必要条件は, $W \in \mathcal{O}_X$ となることである。

定理 4.2. $N_{X,a}^m(W)$ の内点を持つための必要条件は, $W \in \mathcal{O}_X^{2m}$ となること, つまり $X(W)$ の高が $2m$ 次元となることである。特に $\mathcal{O}_{\text{RAB}}^{2m} = \mathcal{O}_{AB}$ であるとき, $N_{\text{RAB},a}^m(W)$ の内点を持つための必要条件は, $W \in \mathcal{O}_{AB}$ である。

§5. 変換微分の周期。

$u \in H^1(W)$ の微分 du の変換微分 $*du$ の cycle γ に関する周期

$$\int_{\gamma} *du$$

の退化について考察する。次のことが知られている。

定理 5.1. V は Riemann 面 W の regular な部分領域とし, $W - \bar{V} = \bigcup_{i=1}^n U_i$ の各成分 U_i の relative boundary は ∂_i とし, U_i の ideal boundary は harmonic measure positive である。任意の実数 $c_1, \dots, c_n$ に対して $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ となるものが与えられたとき,

$$\int_{\partial_i} *du = c_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

となる $u \in HB(W)$ が存在する.

したがって,

定理 5.2. W が有限種数の Riemann 面 Σ , $\gamma \in W$ 上の dividing cycle となる. 任意の $u \in HB(W)$ に対して,

$$\int_{\gamma} * du = 0$$

となるための必要条件是, γ が W の HB-maximal region W^* 上で "homologous to 0" となることである.

non-dividing cycle には関しては退化する二点から起る. 例を示す. E は z -平面上の実軸上の $N_B - N_G$ に属する集合とする. $\{z \mid |z| \leq \infty\} - E = \{x+iy \mid -1 \leq x \leq 1\} - \{x-iy \mid -1 \leq x \leq 1\}$ の copy $E = \gamma$ とし, 各面 γ の slit $\{x \pm iy \mid -1 \leq x \leq 1\}$ を上下交叉して二面を合わせ, 種数 1 の Riemann 面 W を構成する. $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$ とし, γ_+ は上面の $\{Im z > 0\}$ に射影される部分にある slit $\{x+iy \mid -1 \leq x \leq 1\}$ にあるものを E の向きに一回回る cycle とし, γ_- は上面の $\{Im z < 0\}$ に射影される部分にある slit $\{x-iy \mid -1 \leq x \leq 1\}$ にあるものを E の向きに一回回る cycle となる. すると γ は non-dividing cycle となり, 任意の $u \in HB(W)$ に対して,

$$\int_{\gamma} *du = 0$$

と 163.

文 献

[1] Myrberg, P. J., Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. No. 58 (1949), 1-7.

[2] Sario, L. and K. Oikawa, Capacity functions. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1969).

[3] Sakai, M., On the vanishing of the span of a Riemann surface. Duke Math. J. 41 (1974), 497-510