

The transfer maps in the KR_G -theory

阪市大 理学部 橋本 伸

§ 1 KR_G -理論

G を involution τ を持った実性 compact Lie 群, X を実性 G -空間とする.

定義 $\xi = (p: E \rightarrow X)$ が実性 G -ベクトル束であるとは, 次の i) ~ iv) を満たすことである.

- i) ξ は複素ベクトル束
- ii) E, X は実性 G -空間で p は実性 G -写像
- iii) fibrewise に G は複素線型に作用
- iv) fibrewise に τ は反線型に作用

compact 実性 G -空間 X 上の実性 G -ベクトル束全体には Whitney 和 $\oplus$, テンソル積 $\otimes$, 外積 $\wedge$ が定義されて λ -半環になる. その Grothendieck 環を $KR_G(X)$ と書く ([2, 3]). 通常の場合と同様に, compact でない X に対しては実性 G -ベクトル束の複体によつて $KR_G(X)$ を定義する.

命題 1.1 ([2]) KR_G -理論は実性 G -空間 ($= G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -空間) の category から可換群の category への contravariant $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -homotopy functor である。さらに $\widehat{KR}_G$ は half exact functor である。すなわち $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -cofibration $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ に対して $\widehat{KR}_G(Z) \rightarrow \widehat{KR}_G(Y) \rightarrow \widehat{KR}_G(X)$ が完全列である。

V を G の実性表現空間とする。 $\lambda_V = \sum_k (-1)^k \Delta^k V$ をかけることにより Thom 準同型 $\alpha: \widehat{KR}_G(X_+) \rightarrow \widehat{KR}_G(V^+ \wedge X_+)$ が定義される。

定理 1.2 ([3]) α は同型である。

準同型 $c: R_0(G \times_{\mathbb{Z}_2}) \rightarrow R_{\mathbb{R}}(G)$ を次のように定義する。 U を $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ の実表現空間とするとき、複素ベクトル空間としても $c(U) = U \otimes \mathbb{C}$, 作用は $g(u + iu') = gu + i(gu')$, $\tau(u + iu') = \tau u - i(\tau u')$, と定めたものである。また $R_0(G \times_{\mathbb{Z}_2})$ の involution j を次のように定義する。 $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ の実表現空間 U に対して $j(U)$ は実ベクトル空間としては U , 作用を $*$ で書くと $g * u = gu$, $\tau * u = -\tau u$ と定めたものである。 $j(U)$ のことを $\bar{U}$ と書くこともある。複素構造を忘れる写像 $F: R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow R_0(G \times_{\mathbb{Z}_2})$ を考える。

補題 1.3 $F \circ c = 1 + j$

これらの性質を用いることにより次の命題を得る。

命題 1.4 KR_G -理論は $R_0(G \times_{\mathbb{Z}_2})$ -graded な $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -cohomology 理論, [5], に拡張できる。

証明 V, W を $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ の実表現空間, α を $V \rightarrow W$ の表わす $R_0(G \times_{\mathbb{Z}_2})$ の元とする。 $\widehat{KR}_G^{\alpha}(X_+) = \widehat{KR}_G((\bar{V} \oplus W)^c \wedge X_+)$ と定義する。 $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ の実表現空間 U に対して懸垂同型 σ を次の列の合成によって定義する。

$$\begin{aligned} \widehat{KR}_G^{\alpha}(X_+) &= \widehat{KR}_G((\bar{V} \oplus W)^c \wedge X_+) \\ &\xrightarrow{\sigma} \widehat{KR}_G((U^c \wedge (\bar{V} \oplus W)^c) \wedge X_+) \\ &= \widehat{KR}_G((\bar{U} \oplus \bar{V} \oplus W)^c \wedge U^c \wedge X_+) \\ &= \widehat{KR}_G^{\alpha+U}(U^c \wedge X_+) \end{aligned}$$

§ 2 transfer と誘導表現

実性 G -空間は involution を忘れることにより G -空間と考えることができ、実性 G -ベクトル束は involution を忘れることにより複素 G -ベクトル束と考えることができる。これは函手の自然変換 $\psi: KR_G \rightarrow K_G$ を導く。 ψ を忘却写像とよぶ。

補題 2.1 Thom 同型は ψ と可換である。

KR_G -cohomology は可容 $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -束 $\xi = (p: E \rightarrow X)$ に対して西田 transfer $p_*: KR_G(E) \rightarrow KR_G(X)$ を持つ, [6]。また ξ を可容 G -束と考えると K_G -cohomology は transfer $p_*: K_G(E) \rightarrow K_G(X)$ を持つ。 KR_G -cohomology および K_G -cohomology における懸垂同型は Thom 同型で与えられていたので, 補題 1.2 と西田 transfer の定義より次の命題を得る。

命題 2.2 transfer は ψ と可換である。

H を G の実性閉部分群, i をその包含とする。

命題 2.3 ([6]) Segal の誘導写像 $i: R(H) \rightarrow R(G)$, [7], は可容 G -束 $(P: G/H \rightarrow \text{pt.})$ の transfer $P!: K_G(G/H) \rightarrow K_G(\text{pt.})$ と同一視される。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 R_R(H) & \xrightarrow{\cong} & K_R(G/H) & \xrightarrow{P!} & K_R(\text{pt.}) & \xrightarrow{\cong} & R_R(G) \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 R(H) & \xrightarrow{\cong} & K_G(G/H) & \xrightarrow{P!} & K_G(\text{pt.}) & \xrightarrow{\cong} & R(G) \\
 & & & \xrightarrow{i} & & &
 \end{array}$$

この図式の上の $P!$ と同型の合成により実性誘導写像

$$i!: R_R(H) \longrightarrow R_R(G)$$

を定義する。 ψ が単射であることより ψ と可換になる誘導写像は unique であることがわかる。また実性表現の指標は複素表現と考えたときの指標だから、実性誘導写像についても指標公式, [7], を使うことができる。 G への involution の作用が trivial なとき $R_R(G)$ は自然に $RO(G)$ と同型である。このとき実性誘導写像は実誘導写像 $i!: RO(H) \rightarrow RO(G)$ を導く。

E を自由実性 G -空間とする。 G の実性表現 M に対して実性ベクトル束 $(E \times_G M \rightarrow E/G)$ を対応させる写像 α は, λ -環準同

型 $\alpha: R_R(G) \rightarrow KR(E/G)$ を導く。

命題 2.4 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/H) \\ \downarrow \tilde{p}_! & & \downarrow p_! \\ R_R(G) & \xrightarrow{\alpha} & KR(E/G) \end{array}$$

証明の概略 $\tilde{p}_!$ は $p_!: KR_G(G/H) \rightarrow KR_G(pt.)$ と考えてよい。
 $p_!: KR(E/H) \rightarrow KR(E/G)$ は $p_!: KR_G(E \times G/H) \rightarrow KR_G(E)$ と同一視できる。このとき α は自然な射影の導く写像と同一視される。可容 $G \times_{\mathbb{Z}_2}$ -束の pull back 図式に対して transfer は可換になることから命題を得る。([6] 参考)

G と E への involution の作用が trivial なとき, $R_R(G)$ は $RO(G)$ に, $KR(E/G)$ は $KO(E/G)$ に自然に同型である。 G/H は trivial な $\mathbb{Z}_2$ -空間であるので, $\mathbb{Z}_2$ が trivial に作用する Euclid 空間に埋め込めることに注意すれば次の系を得る。

系 2.5 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} RO(H) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/H) \\ \downarrow \tilde{p}_! & & \downarrow p_! \\ RO(G) & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/G) \end{array}$$

§ 3 直交群の実表現

$G = O(2m+1)$, $H = O(2) \times O(2m-1)$, diagonal に H を G の部分

群と考えその包含を ι とする。 G の canonical な $2m+1$ 次元実表現を ι , determinant の表わす 1 次元実表現を ν , H の first projection の表わす 2 次元実表現を μ とする。

命題 3.1 $\iota = \iota_1 \mu + \nu$

証明 両辺の指標を計算する。 Cartan 部分群の生成元は G の中で dense なので、その上での値だけを調べればよい。
 G の Cartan 部分群の共役類は 2 個あり、 $SO(2m+1)$ の maximal torus T^m と $T^m \times \mathbb{Z}_2$ で代表される。ここに $\mathbb{Z}_2$ は $-I_{2m+1}$ で生成される部分群である。

$$g(\theta_1, \dots, \theta_m; \varepsilon) = \begin{pmatrix} D(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & D(\theta_m) \\ & & & \varepsilon \end{pmatrix} \quad D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする。 T^m と $T^m \times \mathbb{Z}_2$ の生成元は、 $\theta_1, \dots, \theta_m$ と円周率 π が有理数体上一次独立であるような $g(\theta_1, \dots, \theta_m; \pm 1)$ と書くことができる。指標は class function だから、これらの元における値が一致すればよい。以下の等式は明らかである。

$$\chi_2(g(\theta_1, \dots, \theta_m; \pm 1)) = \sum_{k=1}^m 2 \cos \theta_k \pm 1$$

$$\chi_\nu(g(\theta_1, \dots, \theta_m; \pm 1)) = \pm 1$$

$$\chi_\mu(g(\theta_1, \dots, \theta_m; \pm 1)) = 2 \cos \theta_1$$

指標公式を使って $\chi_{\iota_1 \mu}(g(\theta_1, \dots, \theta_m; -1))$ を計算する。簡単にするため $g(\theta_1, \dots, \theta_m; -1)$ を g と書く。 $\chi_{\iota_1 \mu}(g) = \sum_{x \in F} \chi_\mu(x^{-1} g x)$ で

ある。ここに F は g の G/H への作用の fixed pt. の代表の集合である。まず F を定める。 $x \in F$ ならば $gxH = xH$ だから $x^{-1}gx \in H$ である。 $x^{-1}gx$ は $T^m \times \mathbb{Z}_2$ に同型な H の Cartan 部分群 T' を生成する。 $T^m \times \mathbb{Z}_2$ と T' は H の中で共役であることがあかるので、 H の元 h が存在して $T^m \times \mathbb{Z}_2 = h^{-1}x^{-1}(T^m \times \mathbb{Z}_2)xh$ となる。従って $xh \in N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$ であるが、 xh と x は G/H の元として等しいので F は最初から $N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$ の部分集合であると仮定してよい。射影 $G \rightarrow G/H$ による $N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)$ の像は $N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)/N_H(T^m \times \mathbb{Z}_2)$ であるので F はその代表と考えてよい。

$$N_G(T^m \times \mathbb{Z}_2)/(T^m \times \mathbb{Z}_2) \cong \Sigma_m \int \mathbb{Z}_2$$

$$N_H(T^m \times \mathbb{Z}_2)/(T^m \times \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_{m-1} \int \mathbb{Z}_2$$

$y = (\sigma; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \Sigma_m \int \mathbb{Z}_2$, $z = (\delta; \rho; \delta_1, \dots, \delta_m) \in \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_{m-1} \int \mathbb{Z}_2$ とする。

ここに $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ と考える。このとき

$$y^{-1}g(\theta_1, \dots, \theta_m; -1)y = g(\varepsilon_1 \theta_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \varepsilon_m \theta_{\sigma^{-1}(m)}; -1)$$

$$z^{-1}g(\theta_1, \dots, \theta_m; -1)z = g(\delta \theta_1, \delta_1 \theta_{1+p^{-1}(1)}, \dots, \delta_{m-1} \theta_{1+p^{-1}(m-1)}; -1)$$

であるから、 $\chi_{i,m}(g(\theta_1, \dots, \theta_m; -1)) = \sum_{k=1}^m 2 \cos \theta_k$ がある。同様にして、 $\chi_{i,m}(g(\theta_1, \dots, \theta_m; 1)) = \sum_{k=1}^m 2 \cos \theta_k$ を得る。これで命題は証明された。

§ 4 Adams conjecture

F_n を S^n の based homotopy 同値全体の成す monoid, BF_n をそ

の分類空間, $BF = \operatorname{colim} BF_n$ とする。有限 CW-複体 X に対して $[X, BF]$ は X 上の spherical fibre bundle の fibre homotopy 同値類の成す加群と同型である, [9]。有限 CW-複体 X に対し $Sph(X) = [X, BF \times \mathbb{Z}]$ と定義し, $J: KO(X) \rightarrow Sph(X)$ を $J(\xi) = ([\xi], \dim \xi)$ と定義する。Segal [8] によると $\{F_n\}$ は Γ -category であり, それから得られる infinite loop space は $BF \times \mathbb{Z}$ である。従って Sph -理論は cohomology であり, transfer を持つ。また Γ -category の写像 $\{O(n) \rightarrow F_n\}$ は infinite loop map $j: BO \times \mathbb{Z} \rightarrow BF \times \mathbb{Z}$ を導き $j_* = J$ となる。従って J は安定自然変換であり, transfer と可換になる。

ϕ を素数とする。可換群 A に対して $A \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{\phi}]$ を $A[\frac{1}{\phi}]$ と書く。 KO -理論上の Adams 作用素 ψ^{ϕ} は, $KO^*(\)[\frac{1}{\phi}]$ -cohomology 上の安定な作用素に拡張できる, [4]。従って ψ^{ϕ} は $KO(\)[\frac{1}{\phi}]$ -理論における transfer と可換である。

定理 4.1 (Adams conjecture)

$$J(\psi^{\phi} - 1) = 0 : KO(X)[\frac{1}{\phi}] \rightarrow Sph(X)[\frac{1}{\phi}]$$

証明 この定理は一次元と二次元の場合が Adams [1] によって示された。 ξ を X 上の $2m+1$ 次元実ベクトル束とする。このようになるは $KO(X)$ を加群として生成するから $J(\psi^{\phi} - 1)(\xi) = 0$ を示せばよい。 ξ の同伴主 $O(2m+1)$ -束 $(E \rightarrow X)$ を考える。 $\S 2$ で定義した写像 $\alpha: RO(O(2m+1)) \rightarrow KO(X)$ は canonical 表

現るを ξ に写す。次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 RO(H)[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/H)[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{J} & Sph(E/H)[\frac{1}{p}] \\
 \downarrow i_! & & \downarrow p_! & & \downarrow p_! \\
 RO(G)[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{\alpha} & KO(E/G)[\frac{1}{p}] & \xrightarrow{J} & Sph(E/G)[\frac{1}{p}]
 \end{array}$$

ここに G と H は§3と同じものとする。すると

$$\begin{aligned}
 J(\psi^q - 1)(\xi) &= J(\psi^q - 1)\alpha(\nu) \\
 &= J(\psi^q - 1)\alpha(i_! \mu + \nu) \\
 &= J(\psi^q - 1)\alpha i_! (\mu) + J(\psi^q - 1)\alpha(\nu) \\
 &= J(\psi^q - 1)p_! \alpha(\mu) + J(\psi^q - 1)\alpha(\nu) \\
 &= p_! J(\psi^q - 1)\alpha(\mu) + J(\psi^q - 1)\alpha(\nu) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

References

- [1] J. F. Adams : On the group $J(X)$ -I, *Topology* 2 (1963), 181-195.
- [2] M. F. Atiyah : *K-theory*, Benjamin 1967.
- [3] M. F. Atiyah : Bott periodicity and the index of elliptic operators, *Quant. J. Math. Oxford*(2), 19 (1968), 113-140.

- [4] M.F. Atiyah and G.B. Segal : Equivariant K-theory and completions, J. Differential Geometry 3 (1969), 1-18.
- [5] C. Kosniowski : Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83-104.
- [6] G. Nishida : The transfer homomorphism in equivariant generalised cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 435-451.
- [7] G.B. Segal : The representation ring of a compact Lie group, Publ. Math. I. H. E. S. 34 (1968), 113-128.
- [8] G.B. Segal : Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974), 293-312.
- [9] D. Stasheff : A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239-246.