

Symmetric bilinear forms に付随する zeta 函数
の留数の計算について.

高知大 理 室政和

ここでは, symmetric bilinear forms に付随する zeta 函数
の留数の計算について述べる。講演のさい主として問題とな
った可積分性について, このぬいに解説した。他の詳細につ
いては近刊の Preprint [3] を見ていただくたい。

1. 定義と問題 .

$$(1.1) \quad V_k^{(n)} = \{ x \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) ; \text{Sign}(x) = (k, n-k) \}$$
$$G^{(n)} = GL(n, \mathbb{R})^+$$

とおく。ここで, $V^{(n)} = \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ は, $n \times n$ の $\mathbb{R}$ -対称行列を
あらわし, Sign は x の positive eigenvalues の数と negative
eigenvalues の数の組をあらわす。 $x = (x_{ij}) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ と各
成分を座標にと, τ ,

$$(1.2) \quad dx^{(n)} = \left| \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dx_{ij} \right|$$

によつて, $V^{(n)} = \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ 上に Euclidean measure を入れる。

$G^{(n)}$ 上には

$$(1.3) \quad dg^{(n)} = (\det g)^{-n} \left| \prod_{i,j} dg_{ij} \right|$$

によつて不変測度を入れ,

$$(1.4) \quad dg_1^{(n)} \times \frac{d(\det g)}{(\det g)} = dg^{(n)}$$

となるように, $SL(n, \mathbb{R})$ 上に不変測度を入れる。各 $V_k^{(n)}$ は $G^{(n)}$ -orbit であり, $P(x) = \det x$ とおくと,

$$(1.5) \quad |P(x)|^{-(n+1)/2} dx^{(n)}$$

は $V_k^{(n)}$ 上の $G^{(n)}$ -不変測度をあらわしている。(以下, $\pi^{(n)}$ として, 各点 $P \in V_k^{(n)}$ に対して,

$$(1.6) \quad dg^{(n)} = |P(x)|^{-(n+1)/2} dx^{(n)} \otimes dV_P^{(n)}$$

となるように, P における $G^{(n)}$ の isotropy subgroup $G_P^{(n)}$ 上の左不変測度を定めることが出来る。明らかに,

$$(1.7) \quad (\det g)^{2n} dg^{(n)} = |P(x)|^{d - \frac{n+1}{2}} dx^{(n)} \otimes dV_P^{(n)}$$

が成立する。 $\Gamma^{(n)} = SL(n, \mathbb{Z})$ とおく。 $x \in V_k^{(n)} \cap M(n, \mathbb{Q})$ に対して,

$$(1.8) \quad \mu^{(n)}(x) = \begin{cases} \int_{G_x^{(n)}/\Gamma_x^{(n)}} dV_x^{(n)} & (n \neq 2, \text{ or } \sqrt{-P(n)} \notin \mathbb{Q}) \\ 0 & (n = 2 \text{ and } \sqrt{-P(n)} \in \mathbb{Q}) \end{cases}$$

で定義して, 点, x の density という。 $L^{(n)} \in \text{Sym}(n, \mathbb{Q})$ 内の lattice τ diagonal elements は整数, off-diagonal elements は半整数とな, τ いるものとする。 $\langle x, y \rangle = \text{tr}(xy)$ によ, $\tau V^{(n)}$ 上に内積を入れたとき, dual lattice $L^{(n)*}$ は すべての elements が 整数となるものより成り立, τ いる。これらの lattices $L^{(n)}, L^{(n)*}$ は $\Gamma^{(n)}$ -invariant τ ある。

Siegel は $[\mathbb{Z}]$ において次のことを示してゐる。すなわち $\mu^{(n)}(x)$ は finite τ ,

$$(1.9) \quad \sum_{\substack{x \in L_R^{(n)}/\sim \\ |P(x)| \leq t}} \mu^{(n)}(x) = a_1 t^{\frac{n+1}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}})$$

$$\sum_{\substack{x \in L_R^{(n)*}/\sim \\ |P(x)| \leq t}} \mu^{(n)}(x) = a'_1 t^{\frac{n+1}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}})$$

(実は Siegel は, これは Minkowski の定理の拡張として, a_1 の値を具体的に求めてゐる。すなわち, $SL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{Z})$ の volume で書け, 後に定義する zeta 函数の $s = \frac{n+1}{2}$ における留数になる。) ここで $L_R^{(n)}/\sim$ と $L_R^{(n)*}/\sim$ は $L^{(n)} \cap V_R^{(n)}$ 及び $L^{(n)*} \cap V_R^{(n)}$ の $\Gamma^{(n)}$ による同値類をあらわす。右の値によらず a_1, a'_1 の値が

一定の整数値をとることが、後の留数の計算で重要である。

定義 1 $n \geq 1$ に対して,

$$(1.10) \quad \zeta_R^{(n)}(\lambda, L^{(n)}) = \sum_{x \in L_R^{(n)} / \sim} \mu^{(n)}(x) |p(x)|^{-\lambda}$$

$$\zeta_R^{(n)}(\lambda, L^{(n)*}) = \sum_{x \in L_R^{(n)*} / \sim} \mu^{(n)}(x) |p(x)|^{-\lambda}$$

このとき, $\zeta_R^{(n)}(\lambda, L^{(n)})$ と $\zeta_R^{(n)}(\lambda, L^{(n)*})$ は $\operatorname{Re} \lambda > \frac{n+1}{2}$ で収束し, $\lambda = 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}$ で pole を持つ有理型函数として $\lambda \in \mathbb{C}$ 全体に解析接続できる。(Siegel の結果 (1.2) を使えば, $\lambda = \frac{n+1}{2}$ で一位の pole を持つ $\operatorname{Re} \lambda > \frac{n}{2}$ まで解析接続できることまでは証明される。)

さて, 我々の目的は, $n \geq 3$ の場合 にこれらの zeta functions の residues を, すべて計算することである。 $n=0, 2$ の場合には, Shintani [1] によりすでに計算されている。

我々は

$$(1.11) \quad Z(f, M, \lambda) = \int_{G^{(n)} / \Gamma^{(n)}} \chi(g)^{\lambda} \sum_{x \in M} f(p(g) \cdot x) dg^{(n)}, \quad \chi(g) = (\det g)^2$$

とおく。ここで M は $\Gamma^{(n)}$ -不変な $V^{(n)}$ の中の集合であり, f は $V^{(n)}$ 上のシュワルツの急減少函数の空間 $\mathcal{S}(V^{(n)})$ の元である。

さらに,

$$\begin{aligned}
 (1.12) \quad L^{(n)'} &= \begin{cases} \{x \in L^{(n)}; \det x \neq 0\} & n \neq 2 \\ \{x \in L^{(n)}; \det x \neq 0, \sqrt{\det x} \notin \mathbb{Q}\} & n=2 \end{cases} \\
 L^{(n)*'} &= \begin{cases} \{y \in L^{(n)*}; \det y \neq 0\} & n \neq 2 \\ \{y \in L^{(n)*}; \det y \neq 0, \sqrt{-\det y} \notin \mathbb{Q}\} & n=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

すると,

$$(1.13) \quad Z(f, L^{(n)'}, \Delta) = \sum_{k=0}^n \zeta_k^{(n)}(\Delta, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} |p(x)|^{\Delta - \frac{n+1}{2}} f(x) dx$$

$$Z(f, L^{(n)*'}, \Delta) = \sum_{k=0}^n \zeta_k^{(n)}(\Delta, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} |p(x)|^{\Delta - \frac{n+1}{2}} f(x) dx$$

が成り立つ。Poisson の公式により。

$$(1.14) \quad \sum_{x \in L^{(n)}} f(p(g) \cdot x) = Z^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{x^* \in L^{(n)*}} \check{f}(p^*(g) \cdot x^*) \quad (f \in \mathcal{S}(V^{(n)}))$$

す、 $g \in SL(n, \mathbb{R})$ に對して成り立つ。特に $f \in C_0^\infty(V_k^{(n)})$ として、左辺を $G^{(n)}/\Gamma^{(n)}$ 上で $\chi(g)^{\Delta}$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned}
 (1.15) \quad \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \chi(g)^{\Delta} \sum_{x \in L^{(n)}} f(p(g) \cdot x) dg^{(n)} &= Z(f, L^{(n)'}, \Delta) \\
 &= \zeta_k^{(n)}(\Delta, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} f(x) |p(x)|^{\Delta - \frac{n+1}{2}} dx
 \end{aligned}$$

が得られる。そしてこれは $\operatorname{Re}(\Delta) \gg 0$ で収束する。

これを解析接続するために (1.13) の積分を $\det g > 1$ 上での積分と $\det g < 1$ での積分の二つに分ける。すると $\det g > 1$ での積分は f が急減少函数であることにより、 ζ , 任意の Δ に

ついで絶対収束あることがわかり、すなわち Δ についての
entire function になる。一方 $\det g < 1$ 上での積分は
Poisson の和公式によつて、

$$(1.16) \int_{\substack{(\det g) < 1 \\ G^{(n)}/\Gamma^{(n)}}} (\det g)^{2\Delta} \sum_{x \in L^{(n)}} f(p(g) \cdot x) dg^{(n)} \\
= \int_{\substack{G^{(n)}/\Gamma^{(n)} \\ (\det g) < 1}} (\det g)^{2\Delta - (n+1)} \sum_{y \in L^{(n)*}} \check{f}(p^*(g) \cdot y) dg^{(n)},$$

そして、 $\sum_{y \in L^{(n)*}} = \sum_{y \in L^{(n)*'}} + \sum_{y \in L^{(n)*} - L^{(n)*'}}$ と分けたとき、 $\sum_{y \in L^{(n)*'}}$ の部

分の積分は、前と同じ理由によつて Δ について entire と
なる。したがつて、我々は $\sum_{y \in L^{(n)*} - L^{(n)*'}}$ の部分について積分を
計算してみれば、 Δ について、どのような函数になるか
みればよい。

$S = \{x \in V^{(n)}; \det x = 0\}$ とおき、 $S_i^{\vee} = \{x \in S; \text{sign } x = (i, n-i, j)\}$
とおくと、

$$(1.17) \int_{\substack{G^{(n)}/\Gamma^{(n)} \\ (\det g) < 1}} (\det g)^{2\Delta - (n+1)} \sum_{y \in L^{(n)*} - L^{(n)*'}} \check{f}(p^*(g) \cdot y) dg^{(n)} \\
= \int_0^1 c^{2\Delta - n} dc^n \int_{SL(n, \mathbb{R})/\Gamma^{(n)}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{y \in L^{(n)*} \cap S_i^{\vee}} \check{f}(p^*(g) \cdot y) dg'$$

と書き直すことができる。以後 $SL(n, \mathbb{R})/\Gamma^{(n)}$ 上の積分を計算する。

$$2. \int_{SL(n, \mathbb{R})/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in L^{(n)*} - L^{(n)*}_1} f(p^*(y), y) dy \quad \text{の計算.}$$

単因子定理によつて, $L^{(n)*} \cap V_i^j$ を $\Gamma^{(n)}$ の同値関係で割, た
ものは,

$$(2.1) \left\{ x_y = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{y}^{n-i-1} & \overbrace{0}^{i-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \in L^{(n)*}; y \in L^{(n-i)*} \cap V_j^{(n-i)} / \sim \right\}$$

$\sim$ は $\Gamma^{(n-i)}$ -equivalence

が $L^{(n)*} \cap V_i^j / \sim$ の同値類の完全系である。特に $L^{(n)*} \cap V_{n-2}'$ は
次の2つの sets に分解する。

$$(2.2) (L^{(n)*} \cap V_{n-2}')_a = \left\{ x \in L^{(n)*} \cap V_{n-2}'; x \sim \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{y}^2 & \overbrace{0}^{n-2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \sqrt{-\det y} \notin \mathbb{Q} \right\}$$

$$(L^{(n)*} \cap V_{n-2}')_b = \left\{ x \in L^{(n)*} \cap V_{n-2}'; x \sim \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{y}^2 & \overbrace{0}^{n-2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \sqrt{-\det y} \in \mathbb{Q} \right\}$$

これらは $\Gamma^{(n)}$ -invariant sets である。これらの同値類の完全系も (2.1) と同じ具合にしてとる。このとき次の定理が得られる。

Theorem 1

1) $n \geq 3$ のとき, $f \in C_0^\infty(V^{(n)} - S^r)$ のとき, $i=1$ のとき
 2) $n \geq 4$ のとき, $i=n-2$ のときを除いて,

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{i,i}^r)} |\check{f}(p^*(g) \cdot y)| dg' < +\infty$$

2) $n \geq 4$ のとき,

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{n-2,2}^r)} |\check{f}(p^*(g) \cdot y)| dg' < +\infty$$

3) $n \geq 4$ のとき,

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \left| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{1,1}^r)} \check{f}(p^*(g) \cdot y) \right| dg' < +\infty$$

4) $n \geq 4$ のとき,

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \left| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{n-2,2}^r)} \check{f}(p^*(g) \cdot y) \right| dg' < +\infty$$

5) $n=3$ のとき,

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \left| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{n-2,2}^r)} \check{f}(p^*(g) \cdot y) \right| dg' < +\infty$$

$$\int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \left| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{1,1}^r)} \check{f}(p^*(g) \cdot y) \right| dg' < +\infty$$

ここで $G^{(n)}/\Gamma^{(n)} = SL(n, \mathbb{R})$, dg' は dg'_i (1.4) で定義された測度。

以下、これについて、その証明を省く。まず

1) $\mathcal{C}'$ があるが、

$$\begin{aligned}
 (2.3) & \int_{G^{(m)}/\Gamma^{(m)}} \sum_{x \in L^{(m)*} \cap \mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}} |\check{f}(p^*(g) \cdot x)| dg \\
 &= \int_{G^{(m)}/\Gamma^{(m)}} \sum_{x \in L^{(m)*} \cap \mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}/\sim} \sum_{\gamma \in \Gamma_x^{(m)}/\sim} |\check{f}(p(g \cdot \gamma) \cdot x)| dg \quad (p^* \text{ のかわりに } p \text{ としても可}) \\
 & \quad \text{本質的に変わらない。} \\
 &= \int_{G^{(m)}/\Gamma^{(m)}} \sum_{y \in L^{(n-1)*} \cap \mathcal{V}_j^{(n-1)}/\sim} \sum_{\gamma \in \Gamma_{xy}^{(m)}/\sim} |\check{f}(p(g \cdot \gamma) \cdot x_y)| dg
 \end{aligned}$$

ここに $\mathcal{C}'$, $x_y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($y \in L^{(n-1)*}$) $\mathcal{C}'$ がある。

$$\begin{aligned}
 &= \int_{G^{(m)}/\Gamma_{x_y}^{(m)}} |\check{f}(p(g) \cdot x_y)| dg \int_{G_{x_y}^{(m)}/\Gamma_{x_y}^{(m)}} d\mathcal{V}_{x_y} \\
 &= \int |\check{f}(x)| d\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'} \cdot \int_{G_{x_y}^{(m)}/\Gamma_{x_y}^{(m)}} d\mathcal{V}_{x_y}
 \end{aligned}$$

ここで、 $d\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}$ は $\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}$ 上の $G^{(m)}$ -不変測度をあらわしている。

このような $d\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}$ は constant 倍を随って一意に存在している。

$d\mathcal{V}_{x_y}$ は $G_{x_y}^{(m)}$ 上の左不変測度で $d\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}$ のとり方に応じて normalize される。

$\mathcal{V}_i^{\mathcal{C}'}$ の point $x_0 = x_{I_{n-i}^{\mathcal{C}'}} = \begin{bmatrix} I_{n-i}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ における接平面は、

$$T_{x_{I_{n-1}^{(j)}}} \mathcal{S}_i^j = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t B & 0 \end{bmatrix} ; A=A^t \right\} \quad \text{ここで } A, B \text{ は } \mathcal{S}_i^j \text{ 上の } G^{(n-1)} \text{ の}$$

$$\text{不変測度 } dV_i^j|_{x=x_0} = \left| \prod_{k \leq l} dA_{kl} \wedge \prod_{k < l} dB_{kl} \right| \Big|_{x=x_0} = 1, \quad \text{と}$$

normalize する。このとき,

$$(2.4) \quad \int_{G_{x_y}^{(n-1)} / \Gamma_{x_y}^{(n)}} dV_{x_y} = (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \cdot \mu^{(n-1)}(y) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/SL(i, \mathbb{Z})) \cdot |\det y|^{-\frac{n}{2}}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} (2.5) \quad & \int_{G^{(n-1)} / \Gamma^{(n)}} \sum_{x \in L^{(n-1)*} \cap \mathcal{S}_i^j} |\check{f}(p^*(y) \cdot x)| dg' \\ &= \int |\check{f}(x)| dV_i^j \cdot \sum_{y \in L^{(n-1)*} \cap V_i^{(n-1)} / \sim} (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \cdot \mu^{(n-1)}(y) \cdot |\det y|^{-\frac{n}{2}} \\ & \quad \times \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/SL(i, \mathbb{Z})) \\ &= \xi_j^{(n-1)}\left(\frac{n}{2}, L^{(n-1)*}\right) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/SL(i, \mathbb{Z})) (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \int_{\mathcal{S}_i^j} |\check{f}(x)| dV_i^j \end{aligned}$$

$\xi_j^{(n-1)}(A, L^{(n-1)*})$ は $\text{Re}(A) > \frac{n-1}{2}$ で収束するので、これにより、この収束性を示すことができる。

以上の計算を繰り返すことにより、

$$(2.6) \quad \int_{G^{(n-1)} / \Gamma^{(n)}} \sum_{x \in L^{(n-1)*} \cap \mathcal{S}_i^j} \check{f}(p^*(y) \cdot x) dg'$$

$$= \underbrace{\sum_j^{(n-1)} \left(\frac{n}{2}, L^{(n-1)*} \right) \cdot \text{Vol}(SL(i, \mathbb{R})/SL(i, \mathbb{Z})) (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}}}_{\otimes_j} \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x) T_i^{\check{f}}(x) dx$$

と書くことができる。ここで、 $T_i^{\check{f}}(x)$ は $\check{\mathbb{R}}_i^{\check{f}}$ 上に support を持つ超関数で $\check{\mathbb{R}}_i^{\check{f}}$ 上での不変測度 $dV_i^{\check{f}}$ をあらわすものである。

$\int f(x) dV_i^{\check{f}}(x) = \int T_i^{\check{f}}(x) f(x) dx$ ($f \in \mathcal{S}(V^m)$) が成立するように定めれば $T_i^{\check{f}}(x)$ は $\mathbb{R} = -\infty$ に決まる。 $\int \check{f}(x) T_i^{\check{f}}(x) dx = \int \check{f}(y) \check{T}_i^{\check{f}}(y) dy$ であるから、 $T_i^{\check{f}}(x)$ の Fourier 変換 $\check{T}_i^{\check{f}}(y)$ を計算すればよい。特にテスト関数は $f \in C_0^\infty(V^m - \mathcal{N})$ であるから $V^m - \mathcal{N}$ 上の値を計算すればよい。

$$(2.7) \quad \check{T}_i^{\check{f}}(x) \big|_{V^m - \mathcal{N}} = \sum_{k=0}^n C_i^{\check{f}, k} |P(x)|_k^{-\lambda_i - \frac{n+1}{2}}$$

と書ける。ここで、 $\lambda_i = -\frac{i+1}{2}$ 、 $|P(x)|_k$ は V_k^m 上で $|P(x)|$ 、他で 0 となる函数である。 $C_i^{\check{f}, k}$ は定数でありこれは超局所解析によ、て explicit に計算することができる。結局

$$\begin{aligned} (2.8) \quad & \int_0^1 c^{2n\lambda - n} dc^n \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \sum_{j \in L^{(n)+}, \check{\mathbb{R}}_i^{\check{f}}} \check{f}(c^2 p(g) \cdot y) dg' \\ &= \otimes_j \times \int_0^1 c^{2n\lambda - n} dc^n \int_{\mathbb{R}} \check{f}(c^2 \cdot x) T_i^{\check{f}}(x) dx \\ &= \int_0^1 c^{2n\lambda - n + 2n\lambda_i} dc^n \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x) \sum_{k=0}^n C_i^{\check{f}, k} |P(x)|_k^{-\lambda_i - \frac{n+1}{2}} dx \times \otimes_j \\ &= \frac{1}{2(\lambda + \lambda_i)} \times \otimes_j \times \sum_{k=0}^n C_i^{\check{f}, k} \int_{\mathbb{R}} \check{f}(x) |P(x)|_k^{-\lambda_i - \frac{n+1}{2}} dx \end{aligned}$$

として $Z(f, L, \lambda)$ の $\lambda = \lambda_i$ における pole が求まり, 時に,
 $f(x) \in C_0^\infty(V_k^{(m)})$ とおけば, $\xi_k^{(m)}(\lambda, L^{(m)})$ の pole が求まるこ
 とになる。2) についても全く同様である。3) 及び 4) につ
 いては, 以下に説明するようにして積分を evaluate すること
 ができるが, これを正当化するためには別に証明を必要とす
 る。^(註) 3) の場合を説明しよう。

Lemma 2

1) $f_i(x)$ ($i=1, \dots, m$) を $(0, \infty)$ 上で定義された複素数値
 連続函数で, 次の条件を満たすものとする。

(2.9) 1) C^∞ on $(0, \infty)$ 。

2) $f(x), f'(x)$ は ∞ で急減少函数。

3) $\sup_{x < y < 1} |f'_i(y)| < C x^{-2+\varepsilon_1}$ が $x=0$ の近傍で成立す
 る。ここで, $C > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 1$ の定数。

このとき, $f_i(x)$ ($i=1, \dots, m$) は Riemann の意味で積分可能。

2) さらに,

$$(2.9) \quad 4) \quad \int_0^\infty \sum_{i=1}^m f_i(x) dx = 0$$

を仮定する。 $(a_k^i)_{k=1,2,\dots}$ ($i=1, \dots, m$) を複素数列で,

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^n a_k^i = C_i n + O(n^{1-\varepsilon_2})$$

($C_1 > 0, 0 < \varepsilon_2 < 1$) をみたすものとする。このとき,

$$(2.11) \quad g(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i f_i(k \cdot x)$$

は $[0, \infty)$ 上で可積分函数である。

実際 1) は ほとんど明らかで、2) については、 $\tilde{g}(x) = x \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} f_i(k \cdot x)$ は $x \rightarrow \infty$ のとき $\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m f_i(x) dx = 0$ に収束し (Riemann 積分の定義), しにがて、可積分であることは (2.9) の条件より示される。また (2.10) の条件を使って、 g と $\tilde{g}$ の差を評価すれば、 $g(x)$ の可積分性は 明らかになる。

さてこの lemma に 3) の積分を帰着させよう。

$$(2.12) \quad \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \left| \sum_{y \in L^{(n)*} \cap \mathcal{S}_1} \check{f}(p^*(g) \cdot y) \right| dg' \\ \leq \int_{G^{(n)}/\Gamma'} \left| \sum_{x \in L^{(n)*} \cap \mathcal{S}_1 / \sim} \sum_{y \in \Gamma'/\Gamma_x} \check{f}(p^*(g \cdot x) \cdot x) \right| dg',$$

と評価される。ここで、 $\Gamma' = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\}$; $\begin{matrix} * \in M(n-1, \mathbb{R}) \\ * \in M(n-1, 1, \mathbb{R}) \\ * \in M(1, \mathbb{R}) \end{matrix} \left\{ \cap SL(n, \mathbb{Z}) \right.$

我々は,

$$(2.13) \quad \sum_{x \in L^{(n)*} \cap \mathcal{S}_1 / \sim} \sum_{y \in \Gamma'/\Gamma_x} \check{f}(p^*(g \cdot x) \cdot x)$$

$\mathcal{O}'$, $G^{(n)}/P'$ 上の可積分函数 $\tilde{f}$ があることを示せばよい。

$$O = SO(n, \mathbb{R}) / (O(n-1, \mathbb{R}) \times O(1, \mathbb{R})) \cap SO(n, \mathbb{R})$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \overset{n-1}{A} & \overset{1}{C} \\ 0 & B \end{pmatrix} ; \det A \cdot \det B = 1 \right\}$$

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in P ; \det A = \det B = 1 \right\},$$

とある。

すると, かんたんな計算によ, τ ,

$$\begin{aligned} (2.14) \quad & \int_{G^{(n)}/P'} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap \mathcal{N}' / \sim} \sum_{Y \in P'/P_x} \check{f}(p(q, x) \cdot x) dq' \\ &= \int_0^\infty r^{n(n-1)-1} dr \int_{\substack{j_1 \in O \\ j_2 \in SL(n-1, \mathbb{R})/SL(n-1, \mathbb{Z})}} dq_1 \int \sum_{x \in L^{(n)*} \cap \mathcal{N}' / \sim} \sum_{Y \in P'/P_x} \check{f}(r^2 p(j_1, j_2) x) dq_1 dq_2 \end{aligned}$$

ここに dq_1, dq_2 は O 上, 及び $SL(n-1, \mathbb{R})$ 上の不変測度で

$j_2 = \begin{bmatrix} * & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ ($* \in SL(n-1, \mathbb{R})$) とし $SL(n, \mathbb{R})$ に埋め込まれ

てあるものとし, $L^{(n)*} \cap \mathcal{N}' / \sim$ の代表元は, $x = \begin{bmatrix} * & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ とし

τ , とられ τ なるものとする。

$$(2.15) \quad (2.14) = \int_0^\infty r^{n(n-1)-1} dr \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap \mathcal{N}' / \sim} \check{f}(r^{2/(n-1)} \cdot |\det x|) \cdot r^{(n-1)} p^{(n-1)}(x)$$

ここに τ'' ,

$$\check{f}(y) = \int_{O \times j_1} dq_1 \int_{j_2 \in SL(n-1, \mathbb{R})/SL(n-1, \mathbb{Z})} \check{f}(p(j_1, j_2) x) dq_1 dq_2$$

$(x \in S_j^i, y = |\det x|)$ で定義する。これは絶対収束し、 $\tilde{f}_j(y)$ は、 y の値のみで定まり x にはよらない。そして、

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad (2.15) &= \int_0^\infty (r^{2(n-1)} |\det x|)^{\frac{n}{2}} \frac{dr}{r} \\
 &\quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in L^{(n)} \cap S_j^i / \sim} \tilde{f}(r^{2(n-1)} |\det x|) \mu^{(n-1)}(x) |\det x|^{-\frac{n}{2}} \\
 &= \frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty (r^{2(n-1)} |\det x|)^{\frac{n}{2}-1} dr^{2(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in L^{(n)} \cap S_j^i / \sim} \tilde{f}(r^{2(n-1)} |\det x|) \\
 &\quad \times \mu^{(n-1)}(x) \cdot |\det x|^{-\frac{n-2}{2}}
 \end{aligned}$$

そこでこのとき、

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty (r^{2(n-1)})^{\frac{n}{2}-1} \tilde{f}_j(r^{2(n-1)}) dr^{2(n-1)} \\
 &= \frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty r'^{\frac{n}{2}-1} \tilde{f}_j(r') dr' = \int_{S_j^i} \check{f}(x) dV_j^i(x)
 \end{aligned}$$

と書けることに注意せよ。さらに $f \in C_0^\infty(V^{(n)} - S')$ であるならば、

$$(2.17) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \int_{S_j^i} \check{f}(x) dV_j^i(x) = 0.$$

であることに注意する。 (dV_j^i) は P. 9 で定義したものである。(このことは、 $\sqrt{r_j^i}$ 上に support を持ち S_j^i 上の

不変測度 dV_j^i をあらわす V^m 上の超函数 $T_j^i(x) dx$ を使
て,

$$(2.18) \quad \int \sum_{j=0}^{n-1} \check{f}(x) dV_j^i(x) = \int_V \sum_{j=0}^{n-1} f(y) \check{T}_j^i(y) dy$$

と書けることを示し, さらに $\sum_{j=0}^{n-1} \check{T}_j^i(y)$ の support が, 特異
集合 S に含まれていることを示すことによ, て得られる。

したがって,

$$(2.19) \quad \frac{1}{2(n-1)} r^{\frac{n}{2}-1} \check{f}_j(r) = h_j(r) \quad (j=0, \dots, n-1)$$

として, $h_j(r)$ ($j=0, \dots, n-1$) たち が, Lemma 2 の条件をみ
たすことをみればよい。すなわち, $h_j(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で急減
少函数であり, $r > 0$ で C^∞ で, $r=0$ の近傍で (2.9) 3)
の条件をみたし (2.18) から (2.9) 4) の条件もわかる。さらに
Siegel の結果より。

$$(2.20) \quad \sum_{\substack{x \in L^{m,n} \cap S_j^i / \sim \\ |\det x| \leq t}} \mu^{(n-1)}(x) = C^{(n-1)} t^{\frac{n}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}-\varepsilon})$$

($\varepsilon = \frac{1}{2}$) と書けることが示される。したがって (2.10) の
条件もたしかめられる。

すなわち Lemma 2 が適用できて, (2.16) は $r^{2(n-1)}$ の
函数として可積分になり, したがって (2.13) は可積分であ

る。つまり 3) は、可積分である。

4) についても同様の補題を使うことにより、可積分性が示される。5) は、3) 4) と同じ方法で示される。

3) の計算を *explicite* に実行するためには、(2.13) の被積分函数に、ある *damping factor* をかけてやると、(2.13) は、

$$(2.21) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \zeta_j^{(n-1)} \left(\frac{n}{2} + \delta, L^{(n-1)*} \right) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int \check{f}(x) T_{\delta}(x) |\det x_{11}|^{\delta} dx$$

という積分に帰着されることが示される。ここで x_{11} は x から n 行目と n 列目を抜いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列である。

(2.21) の $\lim$ の中は $k(\delta) > 0$ のとき、有限の値を取り、 $\delta=0$ まで *holomorphic* に接続できる。かくして、 $T_{\delta}(x) |\det x_{11}|^{\delta}$ の Fourier 変換を *explicite* に計算することにより、これを計算できる。あとは、1) の場合と同様にして、これが $\delta=1$ における *pole* の主要部になっていることがわかる。

参考文献

- [1] Shintani T; J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo 22, No.1 (1975) 25-65.
- [2] Siegel C.L; Gesammelte Abhandlungen II, No. 47
- [3] Muro M; Microlocal analysis and calculations of functional equations and residues of zeta functions associated with the vector space of quadratic forms (Preprint, Second draft.)

(注) 以下の議論において、は、積分 (2.16) の可積分性は、示されるが、これから直ちに (2.13) の可積分性は、結論できないことが、原稿を提出したあとで気がついた。3), 4) の可積分性は、これとは全く別の方法で示すことができて、それは、[3] の原稿で与えられている。したがって P. 16 の最終行と P. 17 の最初の行は除いて読み、P. 14 の最初の行を、" $G^{(n)}/\Gamma$ 上の可積分性が示されたとすれば" 以下のように、その積分を evaluate することが出来る" と読んでいい。たいい。