

2 次元非粘性順圧流体における渦粘性の理論

九大・理・物理

岩山隆寛 (Takahiro IWAYAMA)

高知大・理・情報科学

岡本寿夫 (Hisao OKAMOTO)

要旨

Mori(1965)の理論にしたがって, 2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式を拡張されたLangevin方程式に書き直す. Langevin方程式の減衰項は, 注目する渦度の成分とmemory functionとの畳み込みによって表され, memory functionはLangevin方程式のrandom forceの相関関数によって表現される(揺動散逸定理). random forceは, 渦度方程式の非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展していくものとして記述される. それ故, Langevin方程式の減衰項は非線形効果によって起こり, 渦粘性による減衰項と解釈できる. そこで揺動散逸定理から渦粘性係数を計算した. 得られた渦粘性係数は注目する現象の空間的規模に依存する.

済州島のスケールでは渦粘性係数は空気の分子粘性係数に比べて約8桁大きな値を取ることが導かれる. これは済州島の風下にできるKármán渦列にReynoldsの相似則を適用したときに得られる渦粘性係数の大きさとオーダー的に一致する.

大気の渦粘性係数の大きさが空気の分子粘性係数に比べて異常に大きな値を取る理由について考察する.

§1. はじめに

地球規模の大気の流れを考える場合には, 空気の分子粘性が大気の運動に及ぼす効果は無視してよく, 大気を近似的に非粘性流体として扱える. しかし, 済州島の風下にできるKármán渦列は, 大気は空気の分子粘性係数よりも8桁程度大きな粘性係数を持つ, と考えなくては説明できない. このような異常に大きな粘性は大気中の乱流が原因と考えられ, 渦粘性と呼ばれている. 渦粘性はReynolds stressによって定性的説明がなされている(例えば Holton, 1979) が, 流体力学の基礎方程式を出発点として定量的に説明した例は見当たらない.

渦粘性は運動量の輸送に伴って起こる輸送現象であり, 考える流体が粘性流体であるか否かにかかわらず存在する概念である. そこで我々は渦粘性係数を非粘性流体の方程式(可逆な方程式)から導かれる輸送係数であると考え, 統計物理学がミクロな可逆過程の物理法則からマクロな非可逆過程において現われる輸送係数を導く手法を渦粘性係数の計算に適用する.

輸送係数を物質の微視的性質から説明する方法の一つに運動論による方法がある。これは物質の構成粒子が衝突することにより輸送現象が起こると考えるものである。この方法にしたがって渦粘性を議論したものが有名なPrandtlの混合距離理論 (Prandtl, 1925) である。運動論では構成粒子の平均衝突時間又は平均自由行程が計算上必要になる。気体や液体の分子粘性係数の計算では、平均衝突時間や平均自由行程はその気体・液体の構成粒子の密度や大きさから理にかなった仮定を設けることができる。しかし、渦粘性係数の計算では流体粒子の密度や大きさは任意性があり、従って平均自由行程（混合距離）に人為的な仮定を設けることになる。そこでPrandtlの混合距離理論は渦粘性の物理的描像を与えるが、その定量的説明を与えることはできない。

輸送係数を求める別の方法に線形応答理論がある。これは平衡状態にある系に小さな摂動を加えて平衡状態から乱してやり、系が平衡状態に緩和する速度から輸送係数を求める手法である。この場合にはPrandtlの混合理論に於けるような仮定を設ける必要がない。そこで線形応答理論、特に揺動散逸定理にしたがって渦粘性係数の計算を行なうことが適切であると思われる。このことはGambo (1982)の研究によっても示唆される。

Gambo(1982)は中緯度に於ける超長波の準地衡流渦度方程式がBrown運動におけるLangevin方程式と同様に扱えることをデータ解析によって示した。一方、統計物理学において、多粒子系の運動方程式は可逆な連立常微分方程式の形に書け、”多粒子系のうち、特定の粒子に注目するとその運動は一般的にBrown運動になり、その運動はLangevin方程式によって記述できる”ことが知られている。渦度方程式は波数モードについての無限個の常微分方程式系に書き直すことができるので、そこで各々の波数モードが統計物理学で対象とする粒子と考えると、”多数個のモードのうち特定のモード（例えば超長波）に注目すると、そのモードの運動がLangevin方程式によって記述できる。”というアナロジーが成り立つだろう。

任意の力学量に関する可逆な運動方程式から拡張されたLangevin方程式を導く理論はMori(1965)によって与えられた。導かれたLangevin方程式に現われる減衰係数はrandom force—これは通常の Langevin 方程式における random force と異なり、外的に系に与えられた力でなく系の非線形性によって生じるものである—の相関関数により表現できる。これが揺動散逸定理である。

我々は問題を非常に理想化して，2次元非粘性順圧流体を考察する．Gambo (1982)の研究から示唆されるように，この流体の渦度方程式をMori (1965)の理論にしたがって拡張されたLangevin方程式に書き直す．渦度に関するLangevin方程式に現われる減衰項は系の非線形性によって現われたものであり，渦粘性による渦度の減衰と解釈できる．そこで減衰項の減衰係数を揺動散逸定理から計算し，渦粘性係数を求める．さらに大気の渦粘性係数が空気の分子粘性係数に比べて異常に大きな値を持つ理由について考察する．

§2. 理論

2.1 拡張されたLangevin方程式としての渦度方程式

領域が長さ L の正方形で， x, y の各方向に周期的境界条件を持つ2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式は，

$$\frac{d}{dt}\zeta_i(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} D(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \zeta_i(\mathbf{p}) \zeta_i(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (2.1)$$

である．ここで， $\mathbf{k}, \mathbf{p}$ は波数ベクトル， $\zeta_i(\mathbf{k})$ は時刻 t に於ける波数ベクトル $\mathbf{k}$ を持った渦度のFourier成分であり，かつ， $D(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ は非線形項の相互作用係数，

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{k} \times \mathbf{p})_z \left(\frac{1}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{p}|^2} \right), \quad (2.2)$$

である．すべての渦度のFourier成分で張られる位相空間（渦度空間） $\{\zeta\}$ を考える．この空間内でのLiouvilleの定理を考えることにより，渦度方程式(2.2)はLiouville演算子 Γ を用いて次のように書き表せる（Iwayama, 1994）：

$$\frac{d}{dt}\zeta_i(\mathbf{k}) = \Gamma \zeta_i(\mathbf{k}), \quad (2.3)$$

$$\Gamma = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \sum_{\mathbf{p}} D(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \zeta(\mathbf{p}) \zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta(\mathbf{k})}, \quad (2.4)$$

ここで $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta_{i=0}(\mathbf{k})$ である．さらに渦度空間内である関数 F を $\zeta(\mathbf{k})$ の軸（観測される変数，もしくは注目する変数）に射影する演算子 $\hat{P}$ とそれと直交する空間（隠れた変数で張られる空間）に射影する演算子 $\hat{Q}$ を定義する：

$$\hat{P} F \equiv \frac{(F, \zeta^*(\mathbf{k}))}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))} \zeta(\mathbf{k}), \quad \hat{Q} \equiv 1 - \hat{P}. \quad (2.5)$$

ここで (F, G) は F と G の内積を表し、これを密度 ρ による統計平均と定義する：

$$(F, G^*) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\{\zeta\} \rho F G^*, \quad (2.6)$$

ここで $*$ は複素共役を表す。このように射影演算子、内積を定義すると、Mori(1965)の理論に従って渦度方程式(2.3)から拡張されたLangevin方程式

$$\frac{d}{dt} \zeta_i(\mathbf{k}) = i \Omega_{\mathbf{k}} \zeta_i(\mathbf{k}) - \int_0^t d\tau \gamma_{\mathbf{k}}(t - \tau) \zeta_{\mathbf{k}}(\tau) + R_i(\mathbf{k}), \quad (2.7)$$

が正確に導ける (Iwayama, 1994)。右辺第1項は振動項で $\Omega_{\mathbf{k}}$ は振動数、

$$\Omega_{\mathbf{k}} = -i \frac{(\Gamma \zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))}, \quad (2.8)$$

右辺第2項は非線形効果による渦度の減衰、即ち、渦粘性減衰を表している。右辺第3項はrandom forceで、非線形項の初期値が隠れた変数で張られる空間内で時間発展していくものとして記述される：

$$R_i(\mathbf{k}) = e^{i\hat{Q}\Gamma} \hat{Q} \sum_{\mathbf{p}} D(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \zeta(\mathbf{p}) \zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (2.9)$$

random forceとmemory function $\gamma_{\mathbf{k}}(t)$ の間の関係 (揺動散逸定理) は以下のように与えられる：

$$\gamma_{\mathbf{k}}(t) = \frac{(R_i(\mathbf{k}), R^*(\mathbf{k}))}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))}. \quad (2.10)$$

$\zeta_i(\mathbf{k})$ の自己相関関数 $\Xi_{\mathbf{k}}(t)$ についての運動方程式は、(2.7)から得られる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Xi_{\mathbf{k}}(t) &= i \Omega_{\mathbf{k}} \Xi_{\mathbf{k}}(t) - \int_0^t d\tau \gamma_{\mathbf{k}}(t - \tau) \Xi_{\mathbf{k}}(\tau), \\ \Xi_{\mathbf{k}}(t) &\equiv \frac{(\zeta_i(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

即ち、 $\Xi_{\mathbf{k}}(t)$ は渦粘性によって減衰する。

2.2 渦粘性係数の一般的表式

渦粘性の概念は系の瞬間的な状態に働く効果的な粘性で、遅れを伴わない。従って揺動散逸定理(2.10)からmemory functionがデルタ関数的な場合、

$$\gamma_k(t) = 2 \left\{ \int_0^\infty \gamma_k(t') dt' \right\} \delta(t), \quad (2.12)$$

を考察する．これは注目する変数のゆらぎの原因であるrandom forceのスペクトルがwhiteであると仮定することと等価である．注目する変数（注目する現象）の特長的な時間スケールが隠れた変数の特徴的時間スケールよりも非常に長い場合にmemory functionが(2.12)の形に書ける．気象学的系では現象の空間スケールと時間スケールは比例関係にあるため，従って例えば超長波に注目すれば(2.12)は成り立つであろう．実際，Gambo(1982)はデータ解析によって超長波のrandom forceのスペクトルはwhiteであるが，長波のそれはwhiteでないことを示した．超長波よりも小さなスケールの現象に注目したときには，隠れた変数が注目する変数よりも長い時間スケールの現象を含んでいるので(2.12)は一般には成り立たない．しかしながら注目する変数よりも小さな空間スケールを持った変数の寄与のみを隠れた変数として考慮すれば，(2.12)の関係式は成り立つであろう．

memory functionがデルタ関数的に振る舞うとき，拡張されたLangevin方程式の減衰項の記憶効果の時間的遅れはゼロになり，拡張されたLangevin方程式(2.7)はBrown運動におけるLangevin方程式，

$$\frac{d}{dt} \zeta_i(\mathbf{k}) = i \Omega_{\mathbf{k}} \zeta_i(\mathbf{k}) - \overline{v_{eddy}} k^2 \zeta_i(\mathbf{k}) + R_i(\mathbf{k}), \quad (2.13)$$

と同じ形になる．減衰項の減衰係数を拡散型と仮定することにより渦粘性係数を定義する：

$$\overline{v_{eddy}} = \left\{ \int_0^\infty \gamma_k(t') dt' \right\} / k^2. \quad (2.14)$$

ここで分子粘性との対応から(2.14)に於けるmemory functionは隠れた変数すべての寄与を見積るのでなく，注目する変数よりも小さなスケールの現象の寄与のみを考慮すべきである．なぜならば，渦粘性の概念は分子粘性の類似物であり，分子粘性はミクロな現象のゆらぎ（分子の熱的ゆらぎ）がマクロな現象に対して効果的に粘性として働くものである．このことは(2.12)が成り立つことと矛盾しない．このように小スケールの効果のみを考慮した場合の渦粘性係数を $v_{eddy}(k)$ で表すことにする．memory functionが(2.12)で表されるとき相関関数は，

$$\Xi_k(t) = \exp \left[\left(i \Omega_{\mathbf{k}} - \overline{v_{eddy}} k^2 \right) t \right], \quad (2.15)$$

で与えられる.

2.3 memory functionの具体的表現

次に, memory functionを揺動散逸定理(2.10)から具体的に計算する. memory functionを具体的に計算するには, 渦度のゆらぎの分布関数 ρ が必要である. この研究では, 渦度のゆらぎの分布関数はKraichnan (1975)の仮説(渦度空間内の代表点はエネルギーとエントロフィーが一定の超曲面上でエルゴード的である.)より, エネルギーとエントロフィーを二つの不変量とするcanonical ensembleを用いる. 即ち,

$$\rho = C \prod_{\mathbf{k}} \exp \left[- \frac{k^2 + \mu}{B k^2} \times \frac{|\zeta(\mathbf{k})|^2}{2} \right]. \quad (2.16)$$

ここで, k は波数ベクトル $\mathbf{k}$ の大きさ, C は規格化定数, B , μ は単位質量当たりのエネルギー E とエントロフィー Z により決まる定数である. B はBose-Einstein分布における温度パラメーターに, μ は化学ポテンシャルに相当する. 式(2.16)から求めた統計平均の2次のモーメントと数値シミュレーションによって得られた時間平均の2次のモーメントを比較すると, 両者は数パーセントの誤差の範囲内で一致している. このことから(2.16)の正当性が確かめられている (Kells and Orszag, 1978; Iwayama and Okamoto, 1993a; Iwayama, 1994).

極限 $L \rightarrow \infty$ を考えることにより議論を離散的波数から連続的波数に移行したとき, パワースペクトル $e(k)$ は,

$$e(k) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{B k \pi}{k^2 + \mu}, \quad (2.17)$$

で与えられる. 従って $\sqrt{\mu}$ はパワースペクトル $e(k)$ が最大値を取る波数である.

式(2.16)を用いて振動数(2.8)を計算すると,

$$\Omega_{\mathbf{k}} = -i \sum_{\mathbf{p}} D(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{(\zeta(\mathbf{p}) \zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \zeta^*(\mathbf{k}))}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta^*(\mathbf{k}))} = 0. \quad (2.18)$$

random forceに現われるpropagator $e^{\hat{Q}\Gamma}$ をTaylor級数展開すると,

$$e^{\hat{Q}\Gamma} = 1 + \hat{Q}\Gamma + \frac{1}{2}(\hat{Q}\Gamma)^2 + \dots, \quad (2.19)$$

memory functionも同様に時間に関して展開される:

$$\gamma_{\mathbf{k}}(t) = \gamma_{\mathbf{k}}^{(0)} + t\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)} - \frac{1}{2}t^2\gamma_{\mathbf{k}}^{(2)} + \dots. \quad (2.20)$$

このとき例えば第1項は

$$\gamma_k^{(0)} = \sum_{\mathbf{p}} 2 D(\mathbf{k}, \mathbf{p})^2 \frac{\langle |\zeta(\mathbf{p})|^2 \rangle \langle |\zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p})|^2 \rangle}{\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle}, \quad (2.21)$$

で与えられる. 2次のモーメント $\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle$ は(2.6)及び(2.16)に従って計算される. (2.20)の第2項, 第3項も同様に2次のモーメントによって表現される. パラメータ B , μ が数値的に決定されれば, 即ち分布関数(2.16)が具体的に決定されれば, memory function も数値的に求められる.

2.4 渦粘性係数の公式

自己無矛盾な取り扱いによって渦粘性係数の公式を導く. 以下の方法によって求めた渦粘性係数の大きさは, memory function の展開(2.20)を第3項で打ち切って求めた渦粘性係数の大きさとほぼ一致することが確かめられている (Iwayama and Okamoto, 1993a; Iwayama, 1994).

式(2.21)からの類推により, memory function が

$$\gamma_k(t) = \sum_{\mathbf{p}} 2 D(\mathbf{k}, \mathbf{p})^2 \frac{(\zeta_i(\mathbf{p}), \zeta(\mathbf{p})^*) (\zeta_i(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p})^*)}{(\zeta(\mathbf{k}), \zeta(\mathbf{k})^*)} \quad (2.22)$$

で与えられると考える. 式(2.22)に(2.15)と(2.18)を代入すると,

$$\gamma_k(t) = \sum_{\mathbf{p}} 2 D(\mathbf{k}, \mathbf{p})^2 \frac{\langle |\zeta(\mathbf{p})|^2 \rangle \langle |\zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p})|^2 \rangle}{\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle} \exp \left[- \left\{ \overline{v_{\text{eddy}}} p^2 + \overline{v_{\text{eddy}}} |\mathbf{k} - \mathbf{p}|^2 \right\} t \right]. \quad (2.23)$$

式(2.23)を(2.14)に代入し,

$$\overline{v_{\text{eddy}}} = \sum_{\mathbf{p}} 2 D(\mathbf{k}, \mathbf{p})^2 \frac{\langle |\zeta(\mathbf{p})|^2 \rangle \langle |\zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p})|^2 \rangle}{\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle \left\{ \overline{v_{\text{eddy}}} p^2 + \overline{v_{\text{eddy}}} |\mathbf{k} - \mathbf{p}|^2 \right\} k^2},$$

従って,

$$\overline{v_{\text{eddy}}} \cong \sqrt{\sum_{\mathbf{p}} 2 D(\mathbf{k}, \mathbf{p})^2 \frac{\langle |\zeta(\mathbf{p})|^2 \rangle \langle |\zeta(\mathbf{k} - \mathbf{p})|^2 \rangle}{\langle |\zeta(\mathbf{k})|^2 \rangle \left\{ p^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{p}|^2 \right\} k^2}}, \quad (2.24)$$

を得る.

極限 $L \rightarrow \infty$ を考えることにより, 議論を離散的波数から連続的波数に移行する. さらに2.2節で述べたように注目する変数の空間規模より小スケールの効果のみを考慮することにする. このとき(2.24)は

$$\begin{aligned}
v_{\text{eddy}}(k) &= \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{B}{2k^2}} \left\{ \int_k^{k_{\max}} p dp \left(\frac{k^2 + \mu}{p^2 + \mu} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2 \theta}{(k^2 + p^2 - 2pk \cos \theta)} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(k^2 - 2pk \cos \theta)^2}{(k^2 + p^2 + \mu - 2pk \cos \theta)(k^2 + 2p^2 - 2pk \cos \theta)} \right\}^{1/2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi B}{2}} \sqrt{\frac{\kappa_1}{4\mu k^4} \{I(k_{\max}) - I(k)\}}, \quad (2.25)
\end{aligned}$$

となる．ここで， $k_{\max}$ は最大波数もしくは切断波数， θ は波数ベクトル $\mathbf{k}$ と $\mathbf{p}$ の間の角度で，

$$\begin{aligned}
I(p) &= \left\{ (\chi(p) - p^2) - (\kappa_2 - 2\mu) \log [\vartheta(p) |\xi(p) + \chi(p)|] \right. \\
&\quad + 2\kappa_3 \log \left[\left| \frac{\vartheta(p)}{\mu} \cdot \frac{k^4 + 4\mu p^2 + \kappa_3 \eta(p)}{k^4 - 4\mu p^2 + \kappa_3 \eta(p)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{1}{\kappa_2 p^2 - \kappa_1^2 - \mu \xi(p) - \kappa_3 \chi(p)} \right| \right] \\
&\quad \left. - 8\mu \log [|2p^2 + \eta(p)|] + \kappa_1 \log [\mu \vartheta(p) | \kappa_2 p^2 - \kappa_1^2 - \kappa_3 \chi(p) |] \right\}, \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
\kappa_1 &\equiv k^2 + \mu, & \kappa_2 &\equiv k^2 - \mu, & \kappa_3 &\equiv \sqrt{k^4 + 4\mu^2}, \\
\xi(p) &\equiv p^2 - k^2 + \mu, & & & \chi(p) &\equiv \sqrt{(k^2 + p^2 + \mu)^2 - (2pk)^2}, \\
\vartheta(p) &\equiv p^2 + \mu, & \eta(p) &\equiv \sqrt{k^4 + 4p^2}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

式(2.25)が我々の渦粘性係数の理論の解析的結果である．

§3. 結果と考察

我々の得た渦粘性係数の公式の数値的結果を示す．計算に用いたパラメターの値は以下の通りである．半径 r の球の表面積と考える領域の面積 L^2 が等しいと置く．従って領域の一辺は $L = 2\sqrt{(\pi)r}$ で与えられる．地球条件では $r = 6.4 \times 10^6$ mなので $L = 2.3 \times 10^7$ mである．系の最大波数もしくは切断波数は最小波数 $k_{\min} = 2\pi L^{-1}$ の 10^5 倍とする： $k_{\max} = 10^5 k_{\min}$ ．これは最小波長が $\lambda_{\min} = 2.3 \times 10^2$ mであることに相当する．パラメター μ の値は分布関数の形から決定する，なぜならば $\sqrt{\mu}$ はパワースペクトル $e(k)$ が最大となる波数だからである．観測されたパワースペクトル (Charney, 1971) と我々の用い

ているパワースペクトル $e(k)$ を比較して，とりあえず $\sqrt{\mu} = 3 k_{min}$ と置く（図1）．一方パラメーター B は単位質量当たりのエネルギー，

$$E = \int_{k_{min}}^{k_{max}} e(k) dk = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{\pi B}{2} \log \left[\frac{k_{max}^2 + \mu}{k_{min}^2 + \mu} \right], \quad (3.1)$$

から決定される．系の代表的風速 U を 10 ms^{-1} を置くと $E = 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ である．この値のもとで(3.1)を B について解くことによりその値を決定する．従って，数値的結果を得るに際して与えたパラメーターの値は L ， k_{max} ， μ ， U もしくは E の4つである．

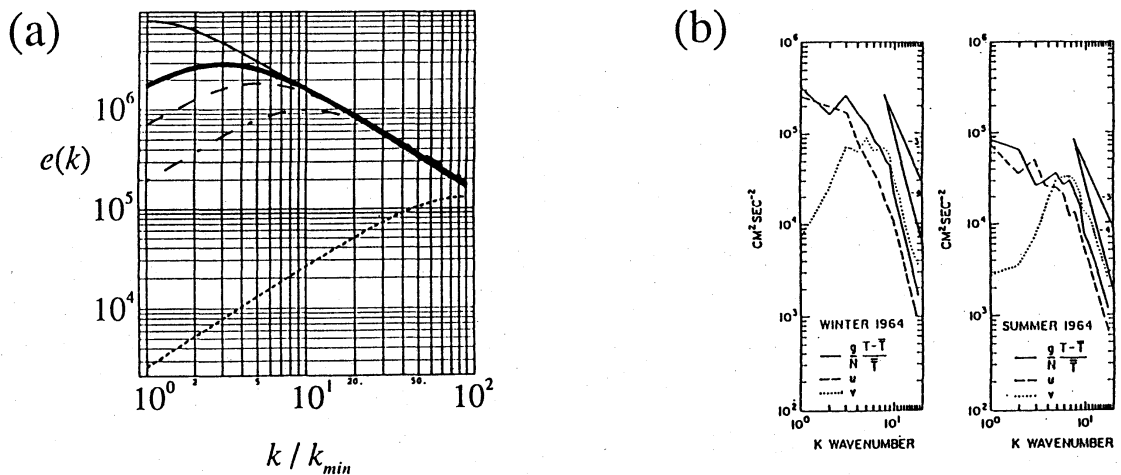


図1. (a) パワースペクトル $e(k)$ (式(2.17)参照)．細線 ($\sqrt{\mu} = k_{min}$)，太線 ($\sqrt{\mu} = 3k_{min}$)，破線 ($\sqrt{\mu} = 5k_{min}$)，一点鎖線 ($\sqrt{\mu} = 10k_{min}$)，鎖線 ($\sqrt{\mu} = 100k_{min}$)．(b) 観測されたパワースペクトル (Charney, 1971)．

ここで我々の用いているパワースペクトル $e(k)$ に関して一つコメントを加えておく．我々が考察している系は2次元非粘性流体であるためその平衡パワースペクトルは，現実大気のそれと異なる（図1参照）．しかしながら，我々は流体力学の基礎方程式から渦粘性係数の値の異常性を説明することを目的としており，渦粘性係数の値の異常性は仮定したスペクトルに依存しないことが後で示される．

図2に理論の数値的結果を示す．横軸は注目する現象の特徴的空間規模，縦軸は渦粘性係数と空気の分子粘性係数との比を表す．求めた渦粘性係数は現象の空間的規模に依存することがわかる．済州島のスケール（平均直径約30 km）では，渦粘性係数の大きさのオーダーは空気の分子粘性係数の大きさのオーダーよりも8桁大きい．これは済州島の風下にできるKármán渦列にReynoldsの相似則を適用したときに得られる渦粘性係数の大きさ（Tsuchiya, 1969）とオーダー的に一致する．

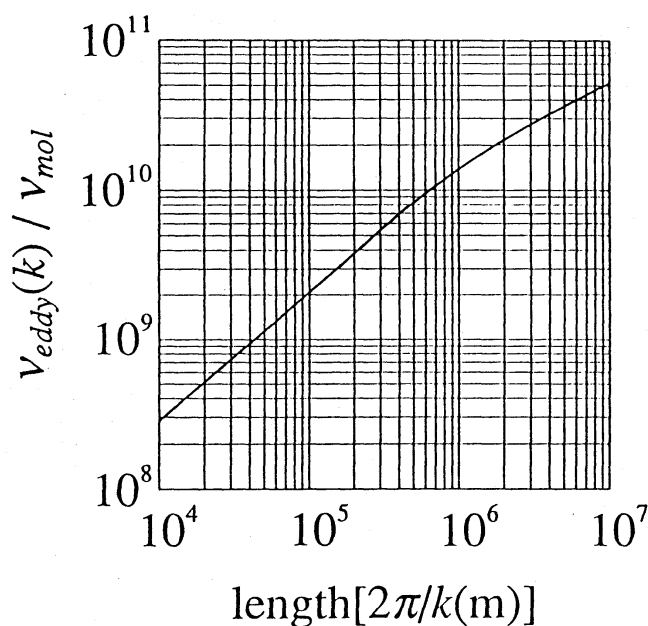


図2. 理論の数値的結果

仮定したパラメター μ の値に対する渦粘性係数の依存性について調べてみた（図3参照）．図3の横軸は最小波数 k_{min} で規格化したパワースペクトルが最大値を取る波数で，縦軸は渦粘性係数と空気の分子粘性係数との比である．30km（済州島のスケール）のスケールに注目する．パラメター $\sqrt{\mu}$ の値が5桁変化しても渦粘性係数と分子粘性係数との比はせいぜい2桁しか変化しない．そこで渦粘性係数の値の異常性はパラメター μ に依存しないと言える．

さらに切断波数 k_{max} に対する渦粘性係数の依存性について調べた．図4は横軸が注目する現象の空間的規模で規格化した切断波数を，縦軸は渦粘性係数の公式(2.25)に現われた積分値 $I(k_{max}) - I(k)$ を表す．ここでも30 km（済州島のスケール）に注目する： $k = k_{C-D} = 2\pi / (30 \text{ km})$ ．図2を計算したときの切断波数 $k_{max} = 10^5 k_{min}$ は $k_{max} / k_{C-D} \sim 10^2$ に相当する． $k_{max} / k_{C-D} > 5$ では積分値 $I(k_{max}) - I(k)$ の値は有効数字3桁の範囲内で変化しなかった．従って注目するスケールとほぼ等しい波数からの寄与によって渦粘性係数の値が決定されていることがわかる．渦粘性係数の値の異常性がパラメター μ や切断波数に依存しないことから，渦粘性係数の値の異常性は仮定されたパワースペクトル $e(k)$ の形には独立であると結論できる．

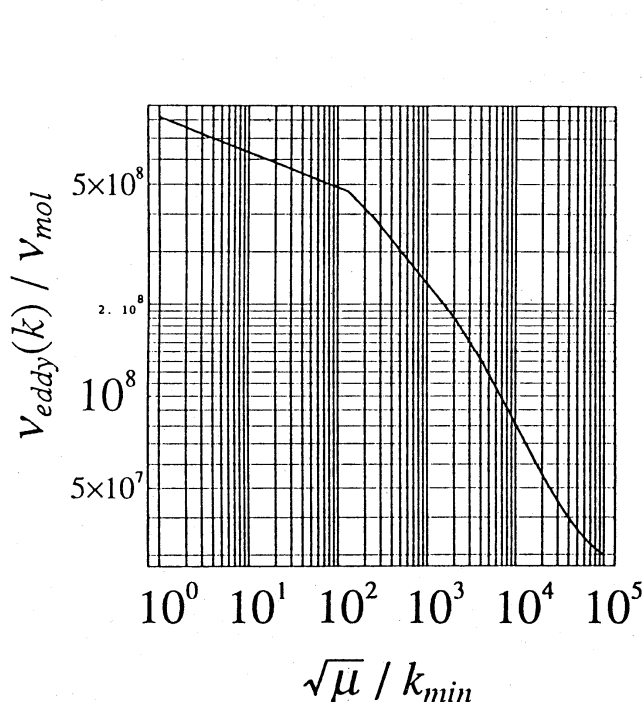


図3. パラメター μ に対する渦粘性係数 $v_{\text{eddy}}(k)$ の依存性.

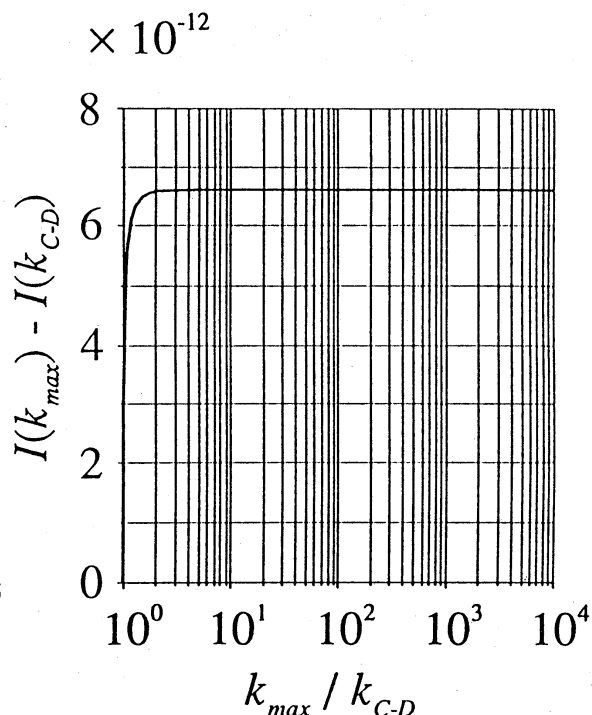


図4. 切断波数 k_{max} に対する積分値 $I(k_{\text{max}}) - I(k)$ の依存性.

渦粘性係数の公式(2.25)は2つの物理量, $V = \sqrt{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{\pi B}{2}}$ と $l(k) = \sqrt{\frac{\kappa_1}{4\mu k^4} \{I(k_{\text{max}}) - I(k)\}}$ の積によって表されている. 前者は速度の次元を持ち, 全体系の値のみに依存し注目する空間的規模に依存しない. 一方, 後者は長さの次元を持ち注目する空間的規模に依存する. 分子粘性係数は分子の平均速度 u と平均自由行程 l との積によって表されるので, $l(k)$ は平均自由行程もしくはPrandtl(1925)の混合距離に相当する量である. 室温(300 K)で標準気圧(1000 hPa)のもとで窒素は, $u \sim 10^2 \text{ ms}^{-1}$, $l \sim 10^{-7} \text{ m}$ という値を持つ(Reif, 1965). 一方, 図2の結果を見積るときに用いたパラメター値では $V \sim 1.5 \text{ ms}^{-1}$, $l(k) \sim 0.1 \text{ k}^{-1}$ となる. 従って空気の分子粘性係数に比べて大気の渦粘性係数の値が異常に大きいことは, 平均自由行程もしくは混合距離に相当する長さ $l(k)$ が分子のそれに比べて異常に大きいことが理由である. ところが $l(k)$ は注目する空間スケールに依存し, 注目するスケールが小さければ $l(k)$ は小さな値を取ることから, 大気の渦粘性係数の異常性は注目する空間スケールが大きいことによるものと結論できる.

§4. まとめ

2次元非粘性順圧流体のスペクトル形式の渦度方程式にMori (1965) の理

論を適用し、拡張されたLangevin方程式に書き直した。Langevin方程式の減衰項の減衰係数は非線形項によって構成されるrandom forceの相関関数によって表現できる、という揺動散逸定理が成り立つ。そこでその減衰項は非線形効果によって発生するもので、渦粘性による減衰項と解釈し、揺動散逸定理から渦粘性係数を計算した。得られた渦粘性係数は注目する現象の空間的規模に依存した。済州島のスケールでは渦粘性係数は空気の分子粘性係数に比べて約8桁大きな値を取ることが導かれた。これは済州島の風下に行えるKármán渦列にReynoldsの相似則を適用したときに得られる渦粘性係数の大きさとオーダー的に一致した。大気の渦粘性係数が空気の分子粘性係数に比べて異常に大きな値を取るの、注目する現象の空間的規模が大きいことが原因であることを理論的に導いた。

謝辞

本研究を進めるにあたり、九州大学理学部宮原三郎教授、廣岡俊彦助教授、守田治助教授、に御指導と励ましのお言葉を賜りました。また、東京大学岸保勘三郎名誉教授、東京大学気候システム研究センター高橋正明助教授からは、貴重な御助言と励ましのお言葉を賜りました。ここに記して、感謝いたします。

参考文献

- J. G. Charney, J. Atmos. Sci. 28 (1971) 1087.
- K. Gambo, J. Meteor. Soc. Japan 60 (1982) 206.
- J. R. Holton, An Introduction to Dynamic Meteorology, 2nd ed. (Academic Press, New York, 1979).
- T. Iwayama and H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. 90 (1993a) 343.
- T. Iwayama and H. Okamoto, Prog. Theor. Phys. 90, No. 6 (December) (1993b) in press.
- T. Iwayama, Thesis (Kyushu University) (1994) 77pp.
- L. C. Kells and S. A. Orszag, Phys. Fluids 21 (1978) 162.
- R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 67 (1975) 155.
- H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965) 423.
- L. Prandtl, Zs. angew. Math. Mech. 5 (1925) 136.
- F. Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965).
- K. Tsuchiya, J. Meteor. Soc. Japan 47 (1969) 457.