

非対称断片線形系の ultra-subharmonic resonance について

山梨大学工学部 前澤成一郎

§ 1. はじめ

この報告は著者が数年来続け～来に調和加振力を受ける断片線形系の強制振動の完全フーリエ級数解についての研究¹⁾ 2) 3) 4) 5) 6) の一部で ultra-subharmonic resonance に関する解析の中間報告である。

最初に工学上断片線形系を取り上げる必要性和利便性について断りし。非線形強制振動の研究は Duffing 以来、彼の名を冠する方程式すなわち対称な三次多項式を復元力特性とする系について研究が盛んで大部分である。このような系は数学上取扱いが簡単で便利であり、小さい振幅に与える非線形方程式の代表として格好的であるが、⁷⁾ Loud を指摘するように、振幅が大きくなると復元力があり急激に増加し過ぎ、実際の振動系は遠く超えるものがある。また非対称特性の非線形系の復元力は二次、多項

式にまつゝ表現されるのが普通であるが、この場合も振幅が大きくなると、一方の位置に對してばね係数が負となつて支舞つゝ定状態に合はない。いづれにしても、復元力特性の多項式表現は振幅の小さい非線形方程式には便利であるが、振幅の大きい本質的非線形系に對しては断片線形系の方が実際の振動系の数学的モデルとして適當な場合が多いように思われる。たとへば機械工学上種々の振動衝擊機 (vibro-impact machine) が利用されるが (14) 参照、このうち衝突振動 (impact vibration) がある。この振動 (vibration with a stop) のモデルとして断片線形系が最も格好付くことを考へてみる。

次に断片線形方程式の解として、各断片特性としての線形方程式の解を接ぎ合へて行く接合法にまつゝ常に厳密解が求められるわけであるが、特に周期解を求めようとするときには、ちやうど系が複雑になると (たとへば減衰力や特性が断片線形となるような場合) 元の周期性の条件式がたつまつばう大抵きつたり、電子計算機の発達によりとて馬鹿になつた計算力と時間を要する、また振動に含まれる高調波成分の割合は物理的に見通しに欠ける難点がある。

これに對してフーリエ級数解は必ずしもつべゝな断片線形系に對して求められなことを保證するとはいへないけれども、以

上のような物理的見通しがなく、また一周期の間、各断片特性の間を数に往復する。あるいは比較的複雑な形式の振動条件を容易に取入れることが出来便利である。

§2. 運動方程式と完全フーリエ級数解

我々の取り扱う系は質量 m と図2に示すような復元力特性 $f(x)$ を持つばねとから成るばね-質量系で、これに調和的振動力 $q \cos \omega t$ が作用するとする。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = q \cos \omega t \quad (1)$$

すなわち非対称復元力特性 $f(x)$ は k, K, e_0 を定数として

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= kx, & x \leq e_0 &: \text{領域 I} \\ f(x) &= kx + K(x - e_0), & x > e_0 &: \text{領域 II} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

今 μ/ν 次 (μ と ν は互に素数の $\nu=2$ の正整数) の ultra-subharmonic resonance を考える。すなわち、位相角

$$\theta = \omega t / \nu \quad (3)$$

を用いて、独立変数を t から θ に変換すると、方程式 (1) は

$$m \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + f(x) = q \cos \nu \theta \quad (4)$$

となる。

定常周期解に対しては復元力も周期的になる。復元力を線形部分 kx と非線形部分 $f(x) - kx$ に分けると、線形部分は 2π を周期とする θ の周期関数であるから、これを $g(\theta)$ と置く。断片線形特性、条件 (2) に従って

$$\left. \begin{aligned} g(\theta) &= K(x - e_0) \quad , \quad x > e_0 \\ g(\theta) &= 0 \quad , \quad x \leq e_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と仮定する。(14)を参照) 方程式(4)に $a_1 \sim \infty$ の非線形部分を右辺に移し、右辺は外部からの加振力 $q \cos \nu \theta$ に等しく、運動方程式は

$$m\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + kx = q \cos \nu \theta - g(\theta) \quad (6)$$

更に $g(\theta)$ は $7-1$ 級数に展開でき、

$$g(\theta) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (7)$$

を(6)に代入すれば、項の数は無限と仮定し、我々の非線形方程式は形式的に線形化される。

$$m\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + kx = q \cos \nu \theta - a_0/2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (8)$$

と仮定する。

系が振動の1周期中に領域IIを1回だけ訪れるような振動部を型式I (Type I), 2回訪れるような振動部を型式II (Type II) 等と呼ぶ。(型式II, IVの subharmonic vibration および superharmonic vibration については2章3)4)を参照せよ) 型式Iの振動部を考慮する。系が領域IIに滞留する θ の区間は $\theta_0 \sim \theta_1$, θ の原点を $\theta = 0$ の区間の中央に選ぶ(14)を参照)。このように1周期の断片線形特性の条件は(5)から次のようになる。

$$g(\theta) = K(x - e_0) \quad , \quad -\theta_0/2 < \theta < \theta_0/2 \quad |$$

$$g(\theta) = 0, \quad \theta/2 \leq \theta \leq 2\pi - \theta/2 \quad \} \quad (9)$$

すなわち各断片特性の間の切替条件は

$$\theta = \mp \theta/2 \quad \text{において}, \quad x = e_0, \quad \dot{x} \geq 0 \quad (10)$$

すなわち方程式(8)の解は次のように書くことが出来る。^{1) 2)}

$$x = \Gamma \left[\cos \nu \theta - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta \right] \quad (11)$$

すなわち和符号 $\sum_{n=1}^{\infty}$ は $n=\nu$ を除いて $n=1$ から $n=+\infty$ までの

和を取ることを示す、振動数 M_n ($n=1, 2, 3, \dots$) は

$$\Omega_\nu = \Omega/\nu, \quad \Omega = \omega/\omega_0, \quad \omega_0 = (k/m)^{1/2} \quad (12)$$

すなわち Ω は振動数比、 ω_0 は領域 I の微小振動の固有振動数である。

$$M_n = 1/(1 - n^2 \Omega^2) \quad (13)$$

すなわち、すなわち無次元係数 x_n ($n=0, 1, 2, \dots$) は

$$x_n = a_n/k\Gamma \quad (14)$$

と定義され、最後に Γ は ν 次、高調波 (加振力と同じの振動数を持つ) の振幅、加振力振幅 g との関係は

$$g = k\Gamma (1 - \Omega^2 + x_\nu) \quad (15)$$

と表される。

次に切替条件(10)から

$$\Gamma = e_0 / \left(\cos \nu \theta/2 - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n \cos \frac{n\theta}{2} \right) \quad (16)$$

が得られ、すなわち断片線形特性の条件(9)は

$$\begin{aligned} x_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta &= \frac{K}{R} \left[\cos \sqrt{\theta} - \cos \frac{\sqrt{\theta_0}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n (\cos n\theta - \cos \frac{n\theta_0}{2}) \right] \\ &\quad , -\frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2} \\ x_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta &= 0 \quad , \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

7-1工展(4)の係数を求める操作を(17)式に「...」と「...」を
 x_n ($n=0, 1, 2, \dots$) を未知数とする次の無限連立一
 次方程式が得られる。

$$x_m + \frac{K}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} M_n x_n = \frac{K}{R} C_{m0} \quad (18)$$

($m=0, 1, 2, \dots$)

==12

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{n}{m} \left(\frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2}} - \frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2}} \right) \quad (19)$$

($m=0, 1, 2, \dots$ とし $n=1, 2, 3, \dots$)

7-12 $m=n$ のとき表現が無意味になるが、 $m \rightarrow n$ の極限値をとりうる。

物理的には、一定の加振力が与えられるとき、 q と Ω が等しくなるから一定周期振動が起り、振幅 Γ および波数 ω を規定する。無次元係数 x_n および滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ が定まる。

しかしながら、滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ は後述のように振動の形式および安定性を左右する。重要なパラメータであるとして、超越方程式を回避するために、我々は逆解法 (Inverse Method) を利用する。与えられた振動数比 Ω と滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ を 2 個の与えられたパラメータとして与え、先

が連立方程式(18)を解い、波数を決定する無次元係数 α_n を求め、次に Γ を(16)から求める。このとき対応する振幅の振幅 g は(15)から求められ、最後に生成する振動は(11)に表わされることになる。

§3. 解の一意存在と近似解の収束性

無限連立一次方程式(18)は、 $\vec{x}$, $\vec{c}$ を無限次元のベクトルとしてみる。

$$(E - A)\vec{x} = \vec{c} \quad (20)$$

の形に表すことができる。ここで E, A は無限大次数の行列で、 E は単位行列、 A は定数行列である。 $\vec{c}$ はヒルベルト空間に属する。⁸⁾ したがって無限連立方程式に付いては

$$A = (a_{ik}) \quad (21)$$

とすると、 $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ は重級数

$$\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \quad (22)$$

が収束する場合、有限個の連立一次方程式と全く平行に取扱うことが出来、左辺の係数の作る無限行列式がゼロでなく限りにおく解 $\vec{x}$ は一意に存在し、ヒルベルト空間に属することが知られる。⁹⁾ または、⁹⁾ したがって無限連立一次方程式(18)は一定数 N 以上の未知数の方程式を打ち切った方程式 (truncated equations) を解いて得られる近似解 $\vec{x}^{(N)}$ $\rightarrow \infty$ と共に真の解に収束する。この性質は知られる。⁹⁾

§ 4. 級数変換による収束改善法

復元力の非線形部分 $g(\theta)$ は図 3 に示すような周期的パルス列を表わす関数であり、停留時間比 $\theta_0/2\pi$ が小さいとき、これを表わすフーリエ級数の収束性は良好といえる（大抵 n 番目の係数が $1/n$ の order に落ちる）。 $\xi = \sim$ であることを用いて $(-\theta_0/2, \theta_0/2)$ の範囲で $\sim$ 展開 $\sim$

$$g(\theta)/\xi\pi = \xi_0/2 + \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi}{\theta_0} \theta, \quad -\frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2} \quad (23)$$

と置く。このとき ξ の無次元係数 x_n との関係は $\sim$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\theta_0}{\pi} \left\{ \frac{\xi_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2}{(2m+1)\pi} \xi_{2m+1} \right\} \\ x_n &= \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{\xi_0}{2} \sin \frac{n\theta_0}{2} + \cos \frac{n\theta_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\frac{(2m+1)\pi}{\theta_0} n}{\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\theta_0^2} - n^2} \xi_{2m+1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

が成り立ち、 $-\frac{1}{n}$ を用いて $(-\frac{\theta_0}{2}, \frac{\theta_0}{2})$ で

$$\cos n\theta - \cos \frac{n\theta_0}{2} = \frac{4n^2}{\theta_0} \cos \frac{n\theta_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \theta}{\frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\theta_0^2} - n^2 \right\}} \quad (25)$$

の展開が成り立ち、これを (17) の第一式の右辺に代入すれば各項が $\cos \frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \theta$ であるフーリエ級数であり、これを左辺の (23) に等しいと仮定する。これより両辺の係数を比較する。

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= 0 \\ \xi_{2k+1} &= \frac{K}{k} \left(\alpha_{2k+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{2k+1, 2m+1} \xi_{2m+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

9 8 3 12 ξ_{2k+1} に対する無限級数連立一次方程式を解く。

$\Rightarrow$

$$\alpha_{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos \frac{\sqrt{\theta_0}}{2}}{\frac{\pi}{4} (2k+1) \left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\}} \quad (27)$$

$$\gamma_{2k+1, 2m+1} = \frac{\delta_{km}}{\Omega^2 (2k+1)^2 \pi^2 - 1}$$

$$-(-1)^{k+m} \frac{2m+1}{2k+1} \frac{1}{\theta_0} \left[\frac{2}{\sqrt{\left\{ \frac{\Omega^2 (2k+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{\Omega^2 (2m+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\}}} \frac{\Omega M}{\sqrt{\left\{ \frac{\Omega^2 (2k+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{\Omega^2 (2m+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\}}} + \frac{1}{\pi \left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\sqrt^2 \theta_0^2} - 1 \right\} (\Omega^2 - 1)} \right] \quad (28)$$

($k, m = 0, 1, 2, \dots$) (δ_{km} は Kronecker のデルタ)

$$M = \frac{\cos \frac{\sqrt{(\pi - \theta_0)}}{\Omega} + \cos \frac{\sqrt{\pi}}{\Omega}}{\sin \frac{\sqrt{\pi}}{\Omega}} \quad (29)$$

$\gamma_{2k+1, 2m+1}$ の表現は無限級数で無限級数の総和を表現して求めることができる。(10)

§5. 数値計算例から見た解との比較

最初 $\Rightarrow$ ultra-subharmonic vibration の研究、結論として $\gamma = 3$ の harmonic resonance と ultra-harmonic re-

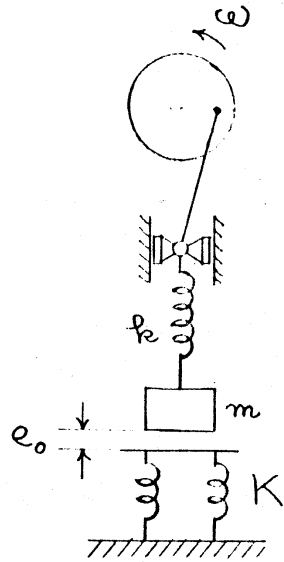
sonance に對する発振曲線を図4に示す。これは前節までの式で $V=1$ と取った式に對する計算結果である。この際収束改善法の適用しない場合、第3高調波までの x_n を直接求める近似になる。四角波の集が $P+Q$ の解がデジタル解と一致しない。不調和の集であることがわかれ、これは等が $3/2$ 次の ultra-subharmonic resonance に相当する集であることが判明し、疑問の集を求めた。すなわちこれは等集に $V=2$ と取った ultra-subharmonic resonance と計算した結果と $P+Q$ の解との比較を図5 a), b), c) に示す。この計算は当数理解析研究所の TOSB AC 機による $n=20$ までの x_n を取った計算の結果であるが、 $P+Q$ の解と振幅の対数グラフに示すように完全一致を示している。

次に収束改善法の効力を示す資料を図6および表Iと表IIに掲げる。

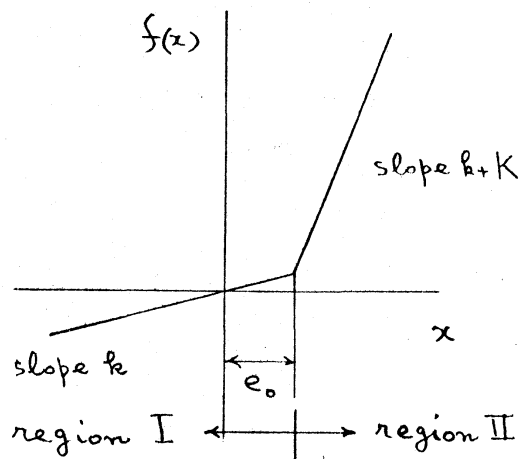
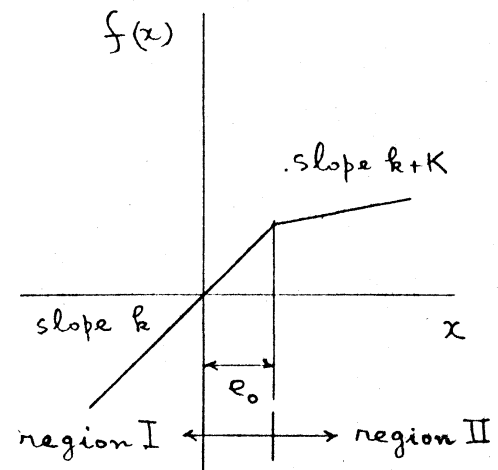
最近 M. E. Levenson の 'Duffing 方程式' の ultra-subharmonic resonance の発振曲線を解析法による計算によるが¹¹⁾、これは電算機による数値積分の結果と一致が判明していることがわかった。

参考文献

- 1) Maezawa, S., Proc. IUTAM Symposium on Nonlinear Oscillations, Kiev, 1961 (1963), p.327.
- 2) " " " , Nonlinear Vibration Problems, No.5, (1963) p. 156.
- 3) " " " , Acta Technica ČSAV, 12 -1(1967), p.1.
- 4) " " " , Proc. 16th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1966(1968), p.294.
- 5) " " " , Proc. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague, 1967(1968), p.361.
- 6) " " " , Report of the Faculty of Engg. Yamanashi Univ., No.20(1969), p.26.
- 7) Loud, W.S., Internat. J. Nonlinear Mech. 3-3(1968), p.273
- 8) Maezawa, S., Bulletin of JSME, 7-25(1964), p.52.
- 9) Riesz, F., Les Systèmes d'Équations Linéaires a une Infinité d'Inconnues, Gauthier-Villars(1952)
- 10) Maezawa, S., Bulletin of JSME, 4-14(1961), p.201.
- 11) Levenson, M.E., Quart. Appl. Math., 26-3(1968), p.456.

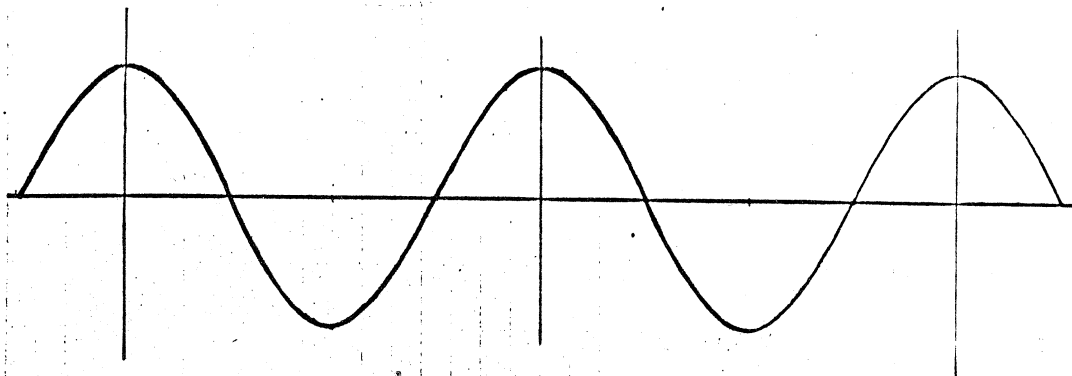


1.2) 1

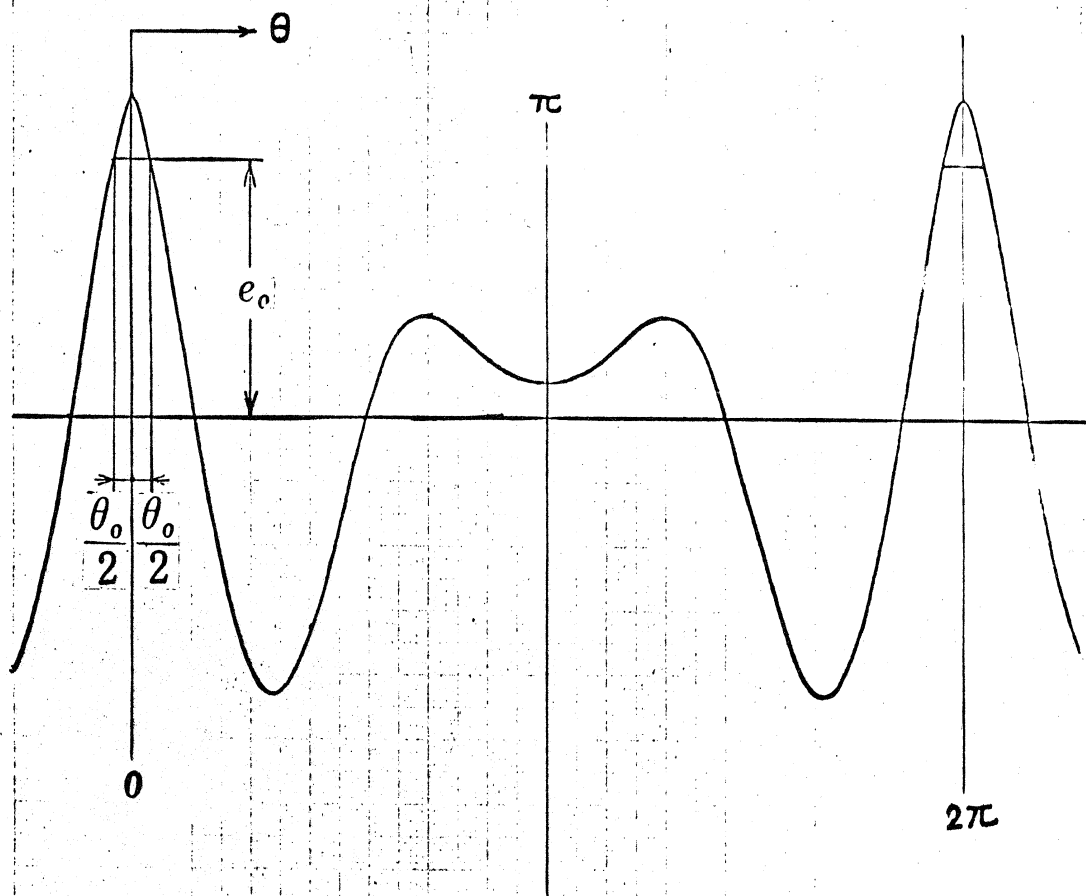
(a) hard spring
($K > 0$)(b) soft spring
($K < 0$)

1.2) 2.

Exciting
Force



Resulting
Vibration



Nonlinear Part of
Restoring Force

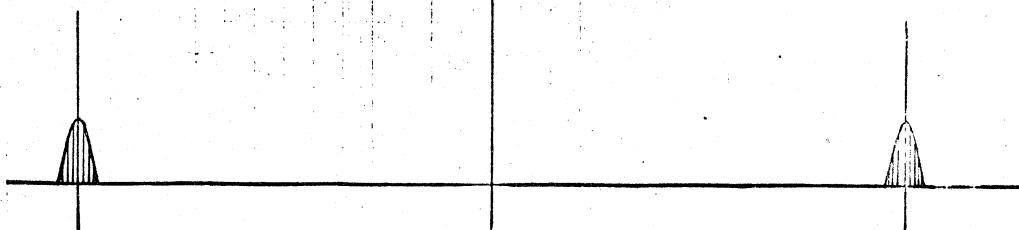


Fig 3 Wave Forms of Exciting Force, Resulting Vibration and Nonlinear Part of Restoring Force

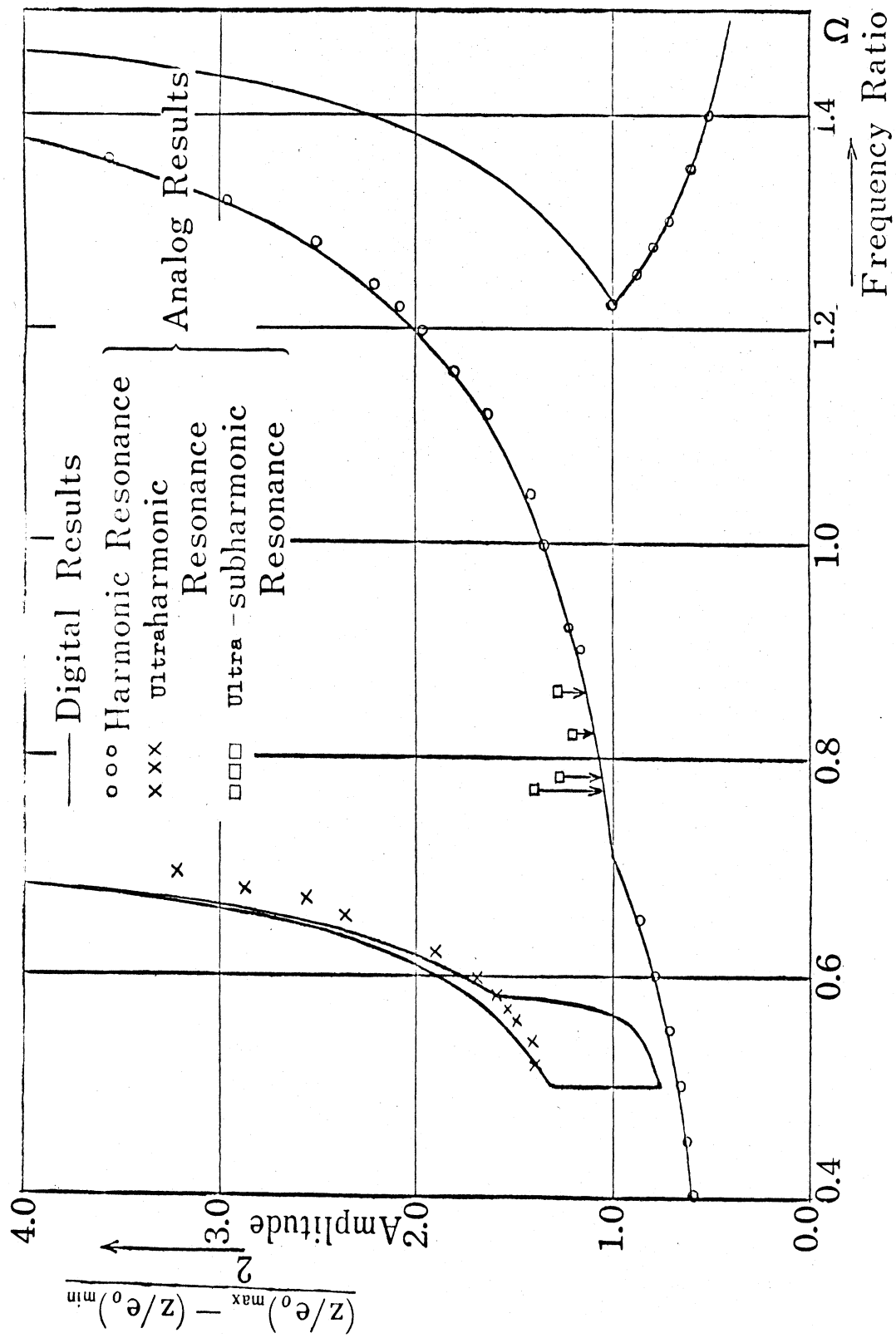
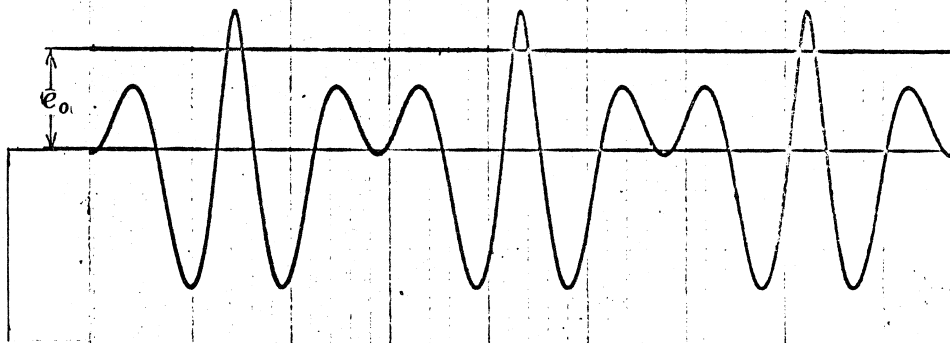
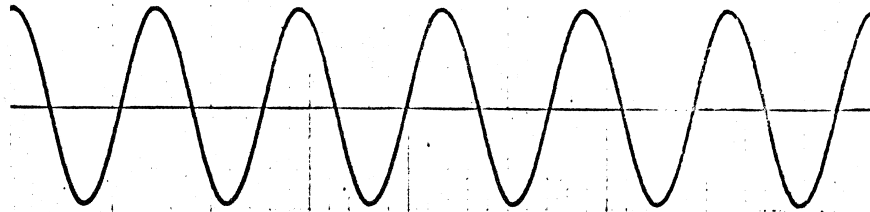


图4 Resonance Curves of Various Kinds
 ($K/\omega = 10.0$, $q/\omega_0 = 0.5$)

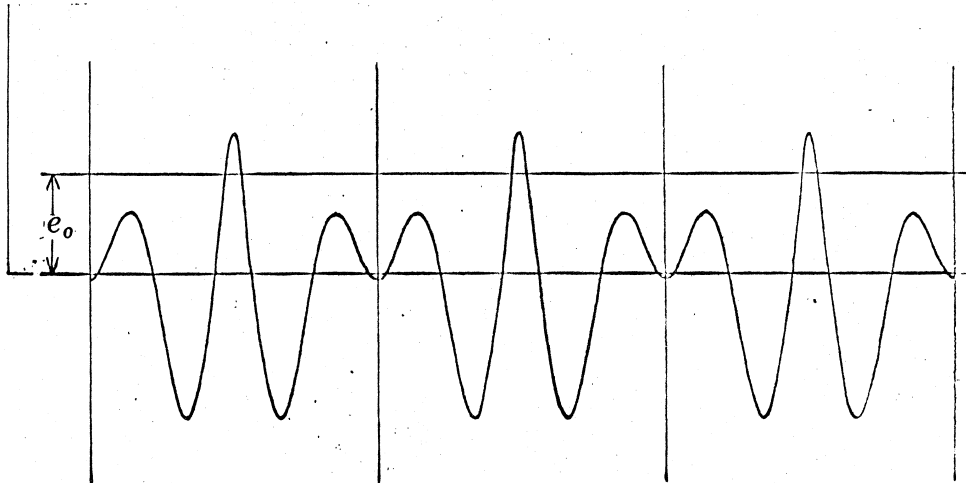
$$\Omega = 0.765, q/ke_o = 0.484$$

Exciting
Force



ultra-subharmonic
Vibration

by Analog Computer

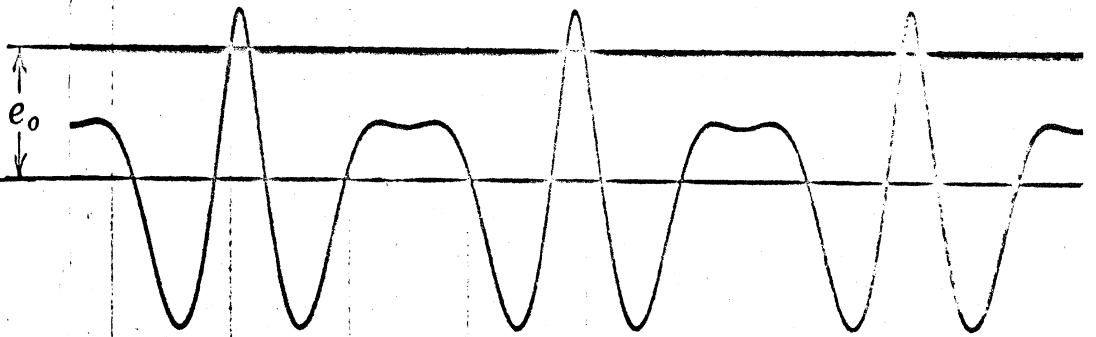
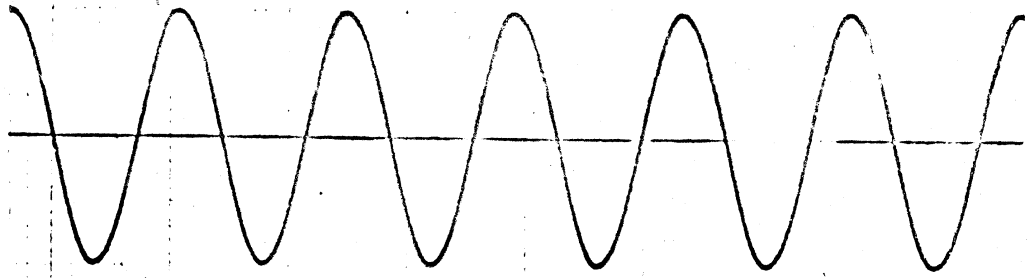


Theoretical

Fig 5 (a) Digital and Analog Results

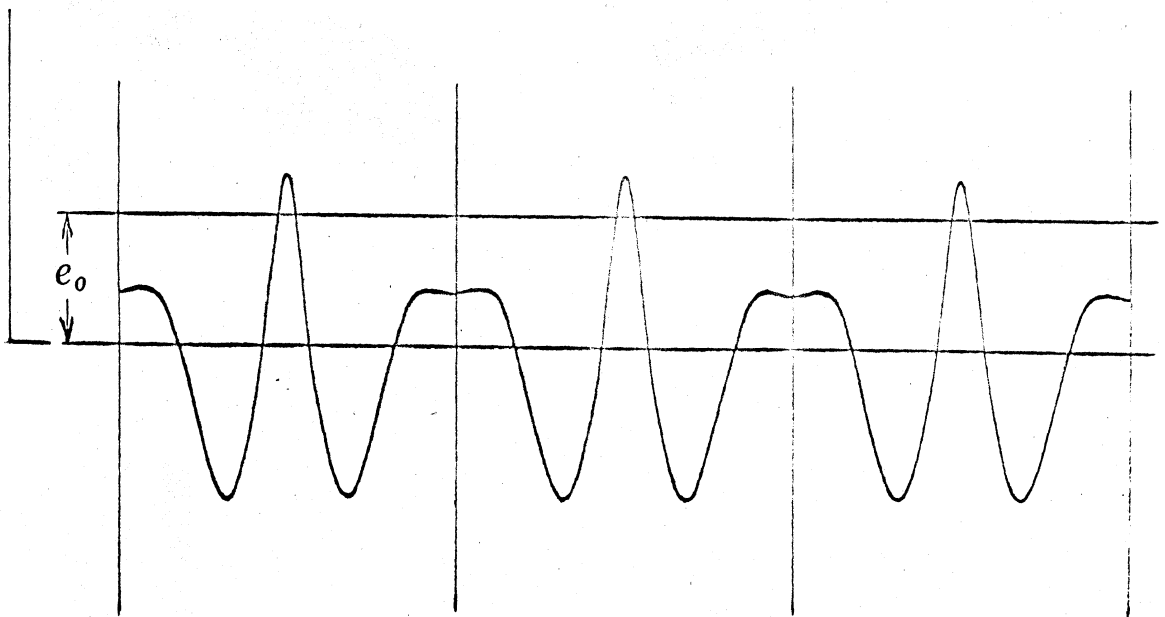
$$\Omega = 0.780, \quad q/ke_o = 0.497$$

Exciting
Force



ultra -subharmonic
Vibration

by Analog Computer

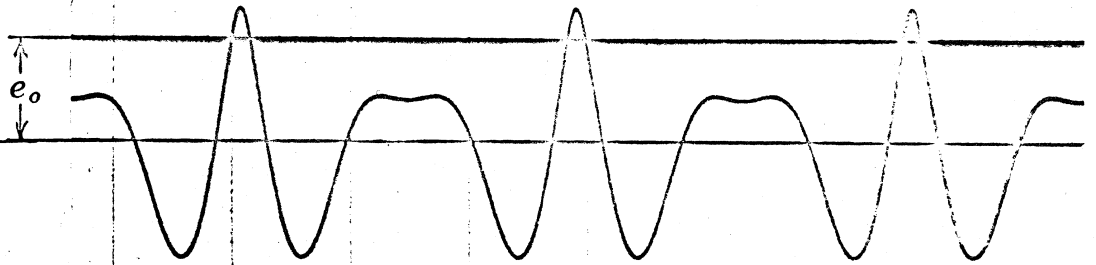
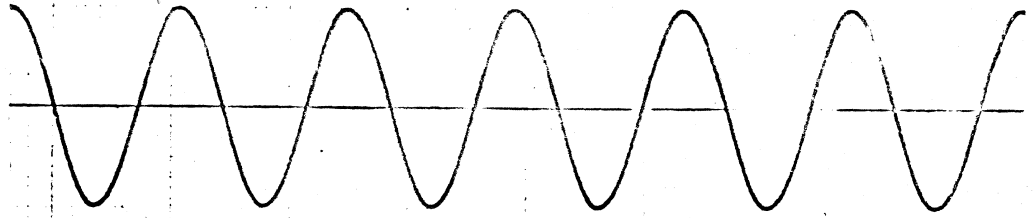


Theoretical

Fig 5 (b) Digital and Analog Results

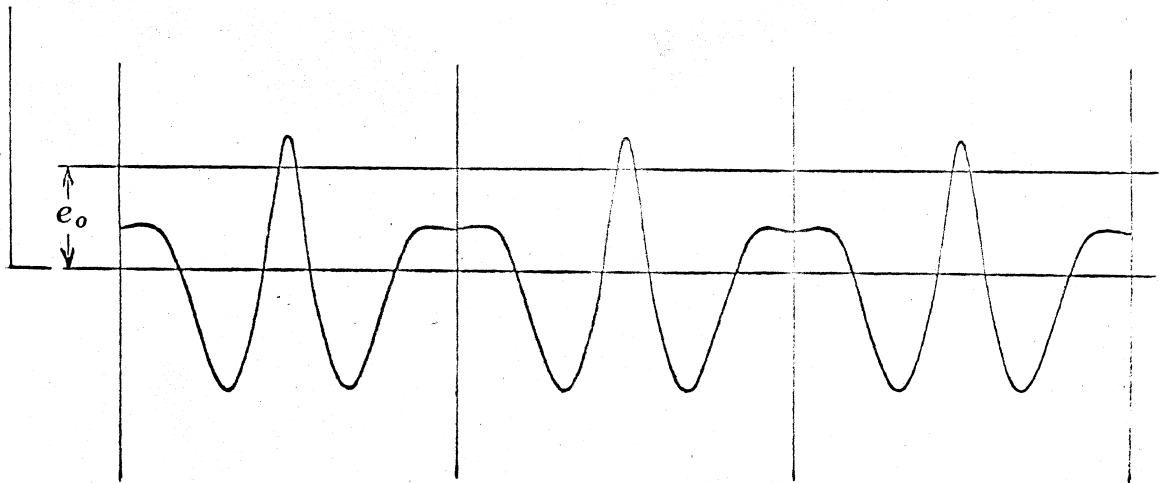
$$\Omega=0.780, \quad q/ke_o=0.497$$

Exciting
Force



Ultra -subharmonic
Vibration

by Analog Computer



Theoretical

Fig 5 (b) Digital and Analog Results

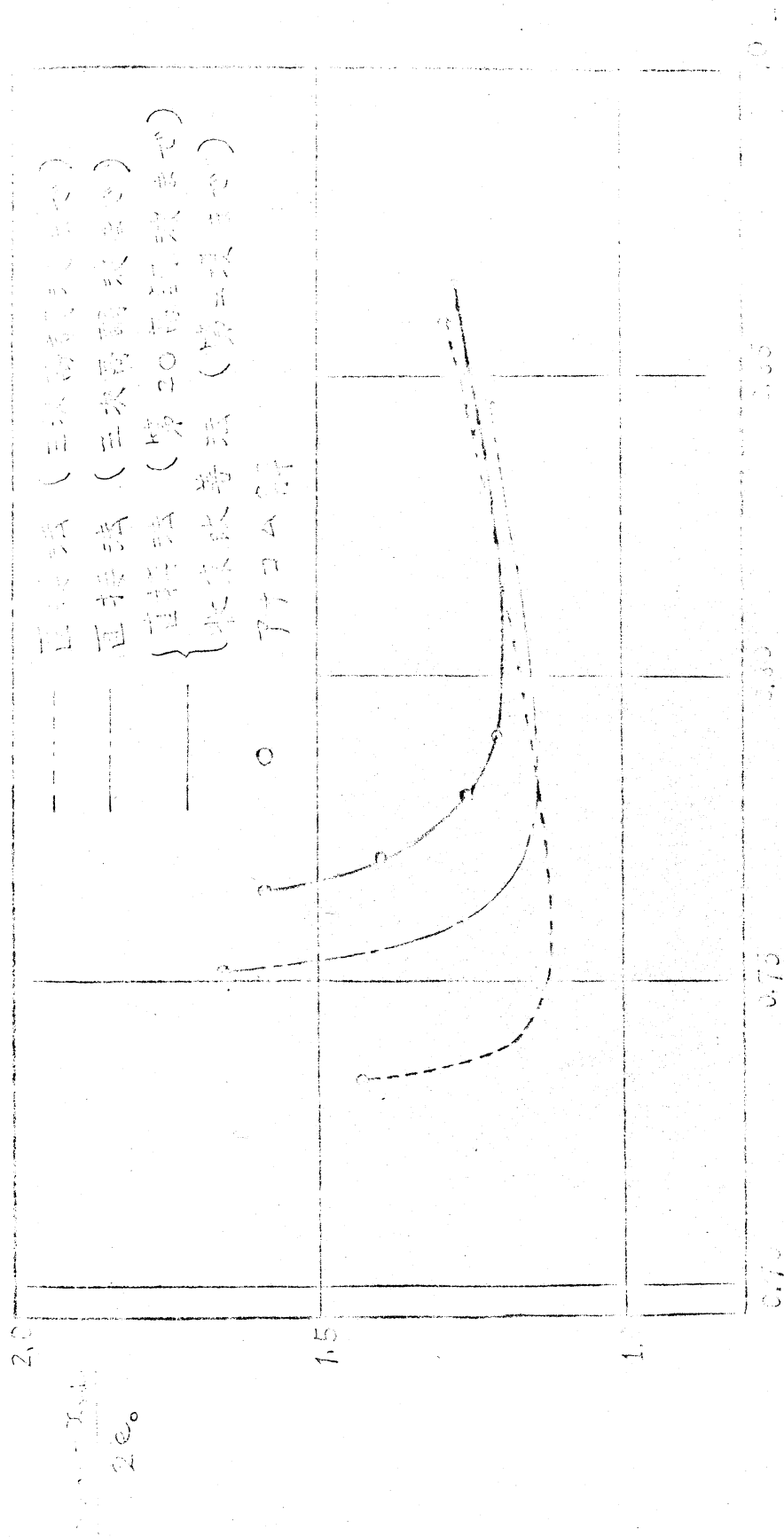


図 6. 種々の近似法と方法による三波高線の比較

$K/k=10.0, \Omega=0.770, \theta=19.50$

	直接法 (第3項まで)	直接法 (第5項まで)	直接法 (第20項まで)	収束改善法 (第2項まで)
X(0)	0.05551236	0.07515430	0.42656104	0.48639570
X(1)	0.05535226	0.07493786	0.42537922	0.48505370
X(2)	0.05487393	0.07429148	0.42184802	0.48104386
X(3)	0.05408327	0.07322288	0.41601015	0.47441445
X(4)		0.07174540	0.40793597	0.46524505
X(5)		0.06987779	0.39772246	0.45364532
X(6)			0.38549165	0.43975330
X(7)			0.37138872	0.42373318
X(8)			0.35557975	0.40577284
X(9)			0.33384909	0.38608085
X(10)			0.31959656	0.36488334
X(11)			0.29983437	0.34242047
X(12)			0.27918389	0.31894286
X(13)			0.25787234	0.29470778
X(14)			0.23612938	0.26997539
X(15)			0.21418382	0.24500495
X(16)			0.19226024	0.22005105
X(17)			0.17057593	0.19536010
X(18)			0.14933781	0.17116694
X(19)			0.12873976	0.14769171
X(20)			0.10896009	0.12513709
q/ke.	0.4656486	0.4510371	0.4929589	0.4990818
$\frac{x_{max}-x_{min}}{2e_0}$	1.0751350	1.0372404	1.3390459	1.383916

表 II

 $K/k=10.0, \Omega=0.770, Q=19.650$

	収束改善法(第2項まで)	収束改善法(第3項まで)
ξ_1	8.646196391	8.684612963
ξ_3	-0.042826028	-0.038143360
ξ_5	—————	0.000679817
X(0)	0.60188250	0.60190153
X(1)	0.60019741	0.60021627
X(2)	0.59516276	0.59518110
X(3)	0.58684006	0.58685755
X(4)	0.57533072	0.57534705
X(5)	0.56077447	0.56078934
X(6)	0.54334707	0.54336024
X(7)	0.52325759	0.52326885
X(8)	0.50074506	0.50075423
X(9)	0.47607472	0.47608168
X(10)	0.44953387	0.44953857
X(11)	0.42142748	0.42142989
X(12)	0.39207341	0.39207357
X(13)	0.36179764	0.36179564
X(14)	0.33092936	0.33092536
X(15)	0.29979615	0.29979033
X(16)	0.26871914	0.26871177
X(17)	0.23800856	0.23799990
X(18)	0.20795934	0.20794973
X(19)	0.17884724	0.17883702
X(20)	0.15092525	0.15091479
q/ke_0	0.50941772	0.50941372
$\frac{x_{max}-x_{min}}{2e_0}$	1.457548	1.457554